الدرس الاول :الاعداد الحقيقية

توجد طرق مختلفة لبناء الأعداد الحقيقية والتي لا مجال لذكرها ألان وسوف نكتفي بافتراض مجموعة غير خالية R مع ثلاث خواص والتي هي : بديهيات الحقل ، بديهيات الترتيب ، بديهية الكمال . تسمى R مجموعة الأعداد الحقيقية

سوف نفترض بالإضافة إلى وجود مجموعة الأعداد الحقيقية عمليتين الأولى هي عملية الجمع والتي تقضي بأنة لأي عددين حقيقيين x, y يوجد عدد حقيقي يمثل بالرمز $x+y$ ويسمى حاصل جمع x مع y . والعملية الثانية هي عملية الضرب والتي تقضي بأنه لأي عددين حقيقيين x, y يوجد عدد حقيقي يمثل بالرمز xy ويسمى حاصل ضرب x في y . وتتصف هاتان العمليتان بالخواص التي تطرحها البديهيات التالية :

(1) بديهية الإبدال

(أ) $x+y=y+x$ لكل $x, y \in R$

(ب) $xy = yx$ لكل $x, y \in R$

(2) بديهية التجميع

(أ) $x+(y+z)=(x+y)=z$ لكل $x, y, z \in R$

(ب) $x(yx)=(xy)z$ لكل $x, y, z \in R$

(3) بديهية التوزيع

$x(y+z)=xy+xz$ لكل $x, y, z \in R$

(4) بديهية العنصر المحايد

(أ) يوجد $0 \in R$ بحيث أن $x+0=0+x=x$. يسمى العدد 0 بالمحايد الجمعي

(ب) يوجد $1 \in R$ بحيث أن $x.1=1.x=x$. يسمى العدد 1 بالمحايد الضربي

(5) بديهية العنصر النظير

(أ) لكل $x \in R$ يوجد $(-x) \in R$ بحيث أن $x+(-x)=(-x)+x=0$.

يسمى العدد $(-x)$ بالنظير الجمعي إلى x وللسهولة يكتب $-x$ بدلا من $(-x)$.

(ب) لكل $x \in R$, $x \neq 0$ يوجد $y \in R$ بحيث أن $xy = yx = 1$ ويسمى العدد y بالنظير ألضربي إلى x ويرمز له بالرمز x^{-1}

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للحقل وسنترك برهانها للقارئ لأنة ينتج مباشرة من التعريف.

خاصية

ليكن $x, y, z \in R$

(1) $-(x-y) = y-x$

(2) $x-y = x+(-y)$

(3) $x+z = y+z$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(4) إذا كان $z \neq 0$ فان $xz = yz$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(5) $xy = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$ أو $y = 0$

(6) $(-x)y = x(-y) = -xy$

(7) $-(-x) = x$

(8) إذا كان $x \neq 0$ فان $(x^{-1})^{-1} = x$ و $(-x)^{-1} = -x^{-1}$

توجد مجموعة جزئية غير خالية من R يرمز لها بالرمز R_+ وتحقق البديهيات التالية :

(1) إذا كان $x, y \in R_+$ فان $x+y \in R_+$ و $xy \in R_+$

(2) إذا كان $x \in R$ فان واحد فقط من العبارات التالية صادقة

$-x \in R_+ \ , \ x = 0 \ , \ x \in R_+$

الأعداد التي تنتمي إلى R_+ تسمى أعداد موجبة (أي أن R_+ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة). العدد الحقيقي x هو عدد سالب إذا وفقط إذا كان $-x \in R_+$. ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة يرمز لها بالرمز R_- والصفر ليس موجبا أو سالبا وعلية

$R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$

تعريف

لتكن $x, y \in R$ يقال عن x بأنه اقل من y (يكتب $x < y$) إذا كان $y - x \in R_+$ ويقال عن x بأنه اكبر من y (يكتب $x > y$) إذا كان $y < x$ ،أي إذا كان $x - y \in R_+$ وعلية يكون $x < y$ إذا وفقط إذا كان $y > x$

(1) $x \leq y$ تعني أما $x < y$ أو $x = y$ وتقرا x اقل أو يساوي y

(2) $x \leq y < z$ تعني $x \leq y$ و $y < z$

بسهولة يمكن إثبات $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على R وهذا يعني أن R مجموعة مرتبة

خاصية

(1) لكل $x, y \in R$ فأما $x < y$ أو $x > y$ أو $x = y$

(2) إذا كان $x < y$ وكانت $y < z$ فان $x < z$

(3) $x+z < y+z$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

(4) إذا كان $x < y$ وكانت $z < w$ فان $x+z < y+w$

(5) إذا كان $z > 0$ فان $xz < yz$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

خاصية

إذا كان كل من x, y عددا حقيقيا وكان $x > 0$ فأنة يوجد $n \in Z^+$ بحيث أن $nx > y$

نتجة

(1) لكل عدد حقيقي موجب x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $x > \frac{1}{n}$

(2) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n > x$

(3) لكل عدد حقيقي x يوجد عددان صحيحان m, n بحيث أن $m < x < n$

(4) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح واحد فقط n بحيث أن $n \leq x < n+1$

(5) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x-1 < n \leq x$

(6) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x-1 \leq n < x$

حقل الاعداد النسبية

خاصية

كل حقل مرتب يحتوي على حقل جزئي يشابه حقل الأعداد النسبية

برهان

ليكن $(F,+,\cdot)$ حقلا مرتبا وليكن 0 العنصر المحايد الجمعي، 1 العنصر المحايد الضربي في F .

نرمز للعدد $1+1+\cdots+1$ n من المرات بالرمز $n \cdot 1$ حيث n عدد صحيح غير سالب

$n \cdot 1 = 1+1+\cdots+1$

نريد أن نبرهن : إذا كان $n \cdot 1 = 0$ فان $n = 0$ سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض k اصغر عدد صحيح موجب بحيث $k \cdot 1 = 0$

بما أن $k\cdot 1 = 1+1+\cdots+1$ k من المرات $\Leftarrow k>1 \Leftarrow k-1>0 \Leftarrow (k-1)\cdot 1 > 0$
وعلية $0 = k\cdot 1 > (k-1)\cdot 1 > 0$ وهذا غير ممكن. إذن إذا كان $n\cdot 1 = 0$ فان $n = 0$ وبذلك نستنج أن F يحتوي على عناصر من النوع $n\cdot 1$ لكل عدد صحيح غير سالب n وان $n\cdot 1 = 0$ إذا وفقط إذا كان $n = 0$ وكذلك $m\cdot 1 = n\cdot 1$ إذا وفقط إذا كان $m = n$
بما أن $(F,+,\cdot)$ حلقة فان F يحتوي على كل العناصر $-(n\cdot 1)$ حيث $-n\cdot 1$ هو $(-1)+(-1)+\cdots+(-1)$ n من المرات
ولهذا يمكن القول أن F يحتوي على نسخة من مجوعة الأعداد الصحيحة Z
بما أن $(F,+,\cdot)$ حقل $\Leftarrow$ لكل $n\in Z,\ \ n\neq 0 \Leftarrow \frac{1}{n}\in F$ وعلية نستنج أن F يحتوي على نسخة من حقل الأعداد النسبية.

: نستنتج حفل الأعداد الحقيقية R يحتوي على حقل الأعداد النسبية Q لان R حقل مرتب وعلية $Q\subset R$. والسؤال الذي يطرح هنا : هل أن $Q=R$؟ للإجابة على هذا السؤال نحتاج الحقائق الآتية :

خاصية

$\boxed{\text{لايوجد للمعادلة } x^2 = 2 \text{ جذر في حقل الأعداد النسبية}}$

برهان

سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض أن $y\in Q$ بحيث أن $y^2 = 2$

بما أن $y\in Q \Leftarrow y=\frac{a}{b}$ حيث a,b أعداد صحيحة، $b\neq 0$ و $g.c.d(a,b)=1$

يما أن $y^2 = 2 \Leftarrow \frac{a^2}{b^2}=2 \Leftarrow$

$a^2 = 2b^2 \quad \cdots(1)$

بما أن $2b^2$ عدد زوجي $\Leftarrow a^2$ عدد زوجي $\Leftarrow a$ عدد زوجي

$\Leftarrow a=2c \Leftarrow a^2=4c^2$

بما أن $a^2=2b^2 \Leftarrow 4c^2=2b^2 \Leftarrow b^2=2c^2$

$\Leftarrow b^2$ عدد زوجي $\Leftarrow b$ عدد زوجي $\Leftarrow g.c.d(a,b)=2$ وهذا تناقض $\Leftarrow y\notin Q$ وعلية لايوجد للمعادلة $x^2 = 2$ جذر في حقل الأعداد النسبية

خاصية

$\boxed{\text{للمعادلة } x^2 = 2 \text{ جذر حقيقي موجب واحد فقط}}$

برهان

لتكن $A=\{x\in Q : x>0,\ \ x^2<2\}$ $\Leftarrow A\neq\phi$ لان مثلا $1\in A$. وكذلك A محدودة من الأعلى لان مثلا 3 حد أعلى لها.

بما أن R تحقق خاصية الكمال وان A مجموعة غير خالية ومقيدة من الأعلى.

$\Leftarrow$ يوجد $y\in R$ بحيث $y=\sup A$

نريد أن نبرهن $y^2=2$. سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $y\neq 2$. هنالك احتمالان هما أما $y^2<2$ أو $y^2>2$

(1) إذا كان $2-y^2>0 \;\Leftarrow\; y^2-2<0 \;\Leftarrow\; y^2<2$

لتكن $\lambda\in R$ بحيث أن $0<\lambda<1$

$$(y+\lambda)^2=y^2+2\lambda y+\lambda^2=y^2+\lambda(2y+\lambda)$$

بما أن $2y+\lambda<2y+1 \;\Leftarrow\; \lambda<1$

بما أن $y^2+\lambda(2y+\lambda)<y^2+\lambda(2y+1) \;\Leftarrow\; \lambda(2y+\lambda)<\lambda(2y+1) \;\Leftarrow\; \lambda>0$

وعلية $(y+\lambda)^2<y^2+\lambda(2y+1)$

(ا) إذا كانت $\lambda<\dfrac{2-y^2}{2y+1}$

$$(y+\lambda)^2<y^2+\lambda(2y+1)<y^2+2-y^2=2$$

بما أن $y>0$ و $y+\lambda>0 \;\Leftarrow\; \lambda>0$

$y+\lambda\in A \;\Leftarrow\; (y+\lambda)^2<2,\;\; y+\lambda>0 \;\Leftarrow$

بما أن y قيد أعلى للمجوعة A $\;\lambda\le 0 \;\Leftarrow\; y+\lambda\le y \;\Leftarrow$ وهذا تناقض لان

(ب) إذا كانت $\lambda\ge\dfrac{2-y^2}{2y+1}$. نضع $\alpha\le\lambda \;\Leftarrow\; \alpha=\dfrac{2-y^2}{2y+1}$

بما أن $2y+1>0 \;\Leftarrow\; y>0$ وكذلك بما أن $\alpha>0 \;\Leftarrow\; 2-y^2>0$

بما أن $\alpha<1 \;\Leftarrow\; \lambda<1$ وعلية $0<\alpha<1$ وكذلك نحصل

$$(y+\alpha)^2<y^2+\alpha(2y+1)=y^2+2-y^2=2$$

$\alpha\le 0 \;\Leftarrow\; y+\alpha\in A \;\Leftarrow$ (نفس الطريقة في ا) وهذا تناقض

(2)

إذا كان $y^2-2>0 \;\Leftarrow\; y^2>2$

لتكن $\beta\in R$ بحيث أن $0<\lambda<1$

$$(y-\beta)^2=y^2-2\beta y+\beta^2=y^2-\beta(2y-\beta)$$

بما أن $2y-\beta<2y+1 \;\Leftarrow\; -\beta<\beta<1 \;\Leftarrow\; 0<\beta<1$

$\beta(2y-\beta)<\beta(2y+1) \;\Leftarrow\; \beta>0$

$y^2-\beta(2y-\beta)>y^2-\beta(2y+1) \;\Leftarrow\; -\beta(2y-\beta)>-\beta(2y+1) \;\Leftarrow$

$(y-\beta)^2>y^2-\beta(2y+1)$

(ا) إذا كانت $\beta\le\dfrac{y^2-2}{2y+1}$ فان

$(y-\beta)^2 > 2 \Leftarrow y^2-\beta(2y+1) \geq 2 \Leftarrow -\beta(2y+1) \geq 2-y^2 \Leftarrow \beta(2y+1) \leq y^2-2$

$y-\beta$ قيد أعلى للمجوعة A

بما أن y اصغر قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow y \leq y-\beta \Leftarrow \beta \leq 0$ وهذا تناقض.

(ب) إذا كانت $\beta > \dfrac{y^2-2}{2y+1}$. نضع $\gamma = \dfrac{y^2-2}{2y+1}$ ونفس الطريقة نثبت أن $0<\gamma<1$ و

$(y-\gamma)^2 > 0$ وهذا يؤدي $y-\gamma$ قيد أعلى للمجوعة A . وبذلك يكون $y \leq y-\gamma$ وعلية $\gamma \leq 0$ وهذا تناقض.

نستنتج من وجود التناقض في كل من (1) و (2) يؤدي إلى $y^2 = 2$ ، أي أن y جذر حقيقي موجب للمعادلة $x^2 = 2$

نبرهن على أن هذا الجذر الموجب y يكون وحيدا

نفرض أن z عدد حقيقي موجب أخر ($z \neq y$) بحيث أن $z^2 = 2$

بما أن $z \neq y$ $z>0$ و $z \neq y$

$\Leftarrow$ **أما** $z>y$ **أو** $z<y$

بما أن $y>0$ و $z>0$

$\Leftarrow$ **أما** $z^2>y^2$ **أو** $z^2<y^2$

$\Leftarrow$ **أما** $2>2$ **أو** $2<2$ **وهذا تناقض** $\Leftarrow z=y$

خاصية

حقل الأعداد النسبية حقل جزئي فعلي من حقل الأعداد الحقيقية

البرهان :

بما أن المعادلة $x^2 = 2$ تمتلك جذر حقيقي والذي يرمز له بالرمز $\sqrt{2}$ $\Leftarrow \sqrt{2} \in R$

وبما أن المعادلة $x^2 = 2$ لاتمتلك جذر في Q $\Leftarrow \sqrt{2} \notin Q$

ملاحظة

باستخدام نفس الأسلوب المستخدم في برهان المبرهنة السابقة ، يمكن أن نبرهن المبرهنة الآتية :

خاصية

لكل عدد حقيقي موجب a ولكل عدد صحيح موجب n ، يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط يحقق المعادلة $x^n = a$. ويرمز لهذا العدد الوحيد بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$ ونطلق علية بالجذر النوني للعدد a .

الاعداد الغير النسبية

لتكن Q^c تمثل المجموعة المتممة (المكملة) لمجموعة الأعداد النسبية Q في مجموعة الأعداد الحقيقية R

$$Q^c = R | Q = \{x \in R : x \notin Q\}$$

يطلق على المجموعة Q^c مجموعة الأعداد غير النسبية

بما أن $\sqrt{2} \in Q^c \Rightarrow Q^c \neq \phi$

خاصية

إذا كان $x \in Q$ وكان $y \in Q^c$ فان

(1) $x + y \in Q^c$

(2) $xy \in Q^c$ بشرط $x \neq 0$

برهان

(1)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $x + y \notin Q^c$

بما أن $x + y \in R \Leftarrow x + y \in Q$

بما أن $x \in Q$ وان Q حقل $\Leftarrow -x \in Q$ وكذلك $(x + y) + (-x) \in Q \Leftarrow y \in Q$ وهذا تناقض.

خاصية

ليكن $a,b \in R$ بحيث أن $a < b$ يوجد عدد غير نسبي s بحيث $a < s < b$ وعلية فأنة يوجد عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية بين أي عددين حقيقيين

برهان

بما أن $a < b \Leftarrow a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$

بما أن كل من $a - \sqrt{2}$ و $b - \sqrt{2}$ عدد حقيقي

باستخدام كثافة الأعداد النسبية يوجد $r \in Q$ بحيث أن $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$

$\Leftarrow a < r + \sqrt{2} < b$

بما أن r عدد نسبي و $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي $s = r + \sqrt{2}$ عدد غبر نسبي وعلية $a < s < b$

ألان :

بما أن $a < s \Leftarrow$ يوجد عدد غير نسبي s_1 بحيث أن $a < s_1 < s$

وباستمرار هذه العملية نحصل على عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية تقع بين a و b.

تعريف

ليكن $a,b \in R$ بحيث ان $a < b$

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

$$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in R : -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty,b] = \{x \in R : -\infty < x \leq b\}$$

$$(a,\infty) = \{x \in R : a < x < \infty\}$$

$$[a,\infty) = \{x \in R : a \leq x < \infty\}$$

القيمة المطلقة

ليكن x عددا حقيقيا. القيمة المطلقة إلى x ، و يرمز لها بالرمز $|x|$
ويعرف بالصيغة التالية

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للحقل وسنترك برهانها للقارئ لأنة ينتج مباشرة من التعريف.

خواص القيمة المطلقة

(1) $|x| = \max\{-x, x\}$ لكل $x \in R$ وعلية $|x| \geq -x$, $|x| \geq x$

(2) $|x| \geq 0$ لكل $x \in R$

(3) $|x| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$

(4) $|-x| = |x|$ لكل $x \in R$

(5) $|x - y| = |y - x|$ لكل $x, y \in R$

(6) $|xy| = |x||y|$ لكل $x, y \in R$

(7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ لكل $x, y \in R$, $y \neq 0$

(8) $|x + y| \leq |x| + |y|$ لكل $x, y \in R$

(9) $|x - y| \leq |x| + |y|$ لكل $x, y \in R$

(10) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ لكل $x, y \in R$

(11) $|x| \leq a$ إذا وفقط إذا $-a \leq x \leq a$

بعض المتراجحات المهمة

(1) متراجحة هولدر إذا كان $p, q \in R$ بحيث أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ فان

$$\sum_{i=1} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

حيث x_i, y_i أعداد حقيقية. وبصورة خاصة إذا كانت $p = 2$ فان $q = 2$ وان

$$\sum_{i=1} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

وتسمى متراجحة كوشي– شوار

(2) متراجحة منكوفسكي إذا كان $p \geq 1$ فان

$$(\sum_{i=1}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

حيث x_i , y_i أعداد حقيقية.

المجموعات القابلة للعد

تعريف

لتكن كل من A,B مجموعة . يقال عن المجموعة A بأنها تكافئ المجموعة B ويكتب $(A \sim B)$ إذا وجد دالة تقابلية من المجموعة A على المجموعة B ويكتب $(A \nsim B)$ إذا كانت A لاتكافئ B .

مبرهنة

(1) إذا كانت $E=\{2,4,6,...\}$ فان $N \sim E$

($f: N \to E$ معرفة بالصيغة $f(n)=2n$ لكل $n \in N$)

(2) إذا كانت $O=\{1,3.5....\}$ فان $N \sim O$

($f: N \to O$ معرفة بالصيغة $f(n)=2n+1$ لكل $n \in N$)

(3) إذا كانت $N^*=\{0,1,2,3,...\}$ فان $N \sim N^*$

($f: N \to N^*$ معرفة بالصيغة $f(n)=n-1$ لكل $n \in N$)

(4) $Z \sim N^*$ ($f: Z \to N^*$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x-1, & x>0 \end{cases}$$

(5) $N \sim Q$

وعلية نستنتج أن المجموعات Q,Z,N^*,N,O,E متكافئة

(6) إذا كانت $A=[0,1]$ وكانت

$$I_1=(a,b), I_2=(a,b], I_3=[a,b), I_4=[a,b]$$

فان $A \sim I_i$ لكل $i=1,2,3,4$

($f: A \to I_i$ معرفة بالصيغة $f(x)=a+(b-a)x$ لكل $x \in A$)

إذا كانت $A=(-1,1)$ وكانت $B(a,b)$ فان $A \sim B$

(2) ($f: A \to B$ معرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)$, لكل $x \in A$

(3) إذا كانت $A=(0,1)$ فان $A \sim \Re^+$

($f: A \to R^+$ معرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ لكل $x \in A$)

(4) إذا كانت $A=(-1,1)$ فان $A \sim \Re$

(5) إذا كانت $A=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ فان $A \sim \Re$

($f: A \to \Re$ معرفة بالصيغة $f(x) = \tan x$ لكل $x \in A$)

(6) إذا كانت $A = (0,1)$ فان $A \sim \Re$

(7) لكل k عدد طبيعي ضع $N_K = \{1,2,3,\ldots,k\}$ فان

أ) $N_k \nsim N$

ب) $N_k \sim N_1$ إذا وفقط إذا كان $k = 1$

(8) $P(X) \nsim X$ لكل مجموعة X

تعريف

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بأنها مجموعة منتهية إذا كانت A مجموعة غير خالية أو تكافئ المجموعة N_k لبعض عدد طبيعي k .ويقال أن A مجموعة غير منتهية إذا لم تكن A مجموعة منتهية (أي أن المجموعات غير المنتهية هي مجموعات غير خالية ولا تكافئ N_K لكل عدد طبيعي k)

إذا كانت A مجموعة منتهية فان $A \sim N_k$ لبعض عدد طبيعي k وعلية توجد دالة متقابلة $f: N_k \to A$. ضع $f(i) = a_i$ لكل $i \in N_k \Leftarrow a_i \in A$ لكل $i = 1,2,3,\ldots,k$ وعلية فان $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

خاصيه

(1) لتكن كل من A, B مجموعة غير خالية بحيث أن $A \sim B$

أ) A منتهية إذا وفقط إذا كانت B منتهية

ب) A غير منتهية إذا وفقط إذا كانت B غير منتهية

(2) كل مجموعة منتهية لايمكن أن تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها

(3) كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية تكون منتهية

(4) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت $A \subset B$ فان B مجموعة غبر منتهية

(5) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت B مجموعة ما فان $A \cup B$ تكون غير منتهية

تعريف

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بانها مجموعة قابلة للعد (أو يقال معدودة) إذا كانت A منتهية أو تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية N .يقال عن A بأنها غير منتهية وقابلة للعد إذا كانت A مجموعة غير منتهية وتكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية N .ويقال عن A بأنها غير قابلة للعد إذا كانت A مجموعة غير منتهية ولا تكافئ N .

خاصية

(1) كل مجموعة منتهية تكون قابلة للعد

(2) كل من $Q, Z, N^*, N, E.O$ مجموعات غير منتهية وقابلة للعد

(3) كل من $\Re$ والفترات في $\Re$ مجموعات غير قابلة للعد

ملاحظة

إذا كانت A مجموعة غير منتهية قابلة للعد فان $A \sim N$ وعلية توجد دالة متقابلة $f : N \to A$ ضع $f(n) = a_n$ لكل $n \in N \Leftarrow a_n \in A$ لكل $n \in N$

وعلية $A = \{a_n : n \in N\} = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$

مبرهنة

(1) كل مجموعة غير منتهية قابلة للعد تكون مكافئة لمجموعة جزئية فعلية منها

(2) كل مجموعة غير منتهية تحتوي على مجموعة جزئية غير منتهية قابلة للعد

(3) المجموعة $N \times N$ قابلة للعد

(4) إذا كانت كل من A, B مجموعة قابلة للعد فان

ا) المجموعة $A \cup B$ تكون قابلة للعد

ب) المجموعة $A \times B$ تكون قابلة للعد

تذكير بتعاريف المنطق

تعريف

نسمي قضية كل عبارة تحتمل الصحة أو الخطأ.
نفي قضية P هي القضية التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة، وتكون خاطئة عندما تكون P صحيحة.
نرمز غالبا لنفي القضية P بـ $\overline{P}$.

مثال

1) "العبارة $5<8$" قضية، وهي قضية خاطئة.
2) "الرباط عاصمة المغرب" قضية، وهي قضية صحيحة.
3) نفي القضية "الرباط عاصمة المغرب" هي " الرباط ليست عاصمة المغرب".

ملاحظة

لاحظ أن بعض القضايا في الرياضيات تضم متغيرات، وينبغي الحصول على معلومات إضافية للبت في صحتها.

تعريف

لتكن P و Q قضيتين.

* وصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \wedge Q$، التي تكون صحيحة إذا وفقط كانت كل من P و Q صحيحة.
* إذا كان وصل القضيتين P و Q خاطئا قلنا إن P و Q متناقضتان (أو غير منسجمتين).

* فصل القضيتين P و Q هو القضية، ذات الرمز $P \vee Q$، التي تكون صحيحة إذا إحدى القضيتين P و Q أو كلاهما.

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف يؤدي إلى أن قضية الوصل $P \wedge Q$ خاطئة في كل حالة من الحالات التالية :

1. إذا كانت P خاطئة.
2. إذا كانت Q خاطئة.
3. إذا كانت كلّ من P و Q خاطئة.

مثال

نعتبر القضية P التالية : $x \in R ,\ x \geq \frac{1}{2}$، والقضية Q التالية $x \in R ,\ x \leq \frac{1}{2}$. عندئذ تكون قضية الوصل $P \wedge Q$ هي $x \in R ,\ x = \frac{1}{2}$.

ملاحظة

نلاحظ أن التعريف السابق يؤدي إلى أن قضية الفصل $P \vee Q$ خاطئة إذا كانت كلّ من القضيتين P و Q خاطئة.

مثال

نعتبر القضية P التالية : "$x \in R ,\ x > \frac{1}{2}$"، والقضية Q التالية "$x \in R ,\ x < \frac{1}{2}$". عندئذ تكون قضية الفصل $P \vee Q$ هي $x \in R ,\ x \neq \frac{1}{2}$.

تعريف

لتكن P و Q قضيتين. نرمز للقضية $\overline{P} \vee Q$ بـ $P \Rightarrow Q$، ونسميها استلزاما، وتقرأ " P تستلزم Q".

ملاحظات

1) نجد في بعض الكتب لفظ "يقتضي" بدل "يستلزم".

2) لاحظ أن الاستلزام "علاقة" متعدية، بمعنى أن

$$\left((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \right) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

3) لاحظ أن من مآخذ الاستلزام أنه يسمح بكتابة $1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$ "دون حياء" إذ أن $\overline{P} \vee Q$ تعني هنا أن المطلوب هو صحة إحدى القضيتين $1 \neq 2$ أو $2 = 3$. ولما كانت القضية $1 \neq 2$ صحيحة فإن $1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$! نعبّر عن ذلك أحيانا بالقول إن "الخاطئ يستلزم الخاطئ" (كما يستلزم الصحيح أيضا) ... خلافا لـ "الصحيح" فهو لا يستلزم إلا "الصحيح".

لرؤية ذلك افترض أن P صحيحة. حينئذ تكون $\overline{P}$ خاطئة. وعليه إذا افترضنا أن " $P \Rightarrow Q$ " صحيح، أي أن القضية $\overline{P} \vee Q$ صحيحة (علما أن $\overline{P}$ خاطئة) فلا بد أن تكون Q صحيحة. خلاصة القول إن الانطلاق من صحة P يؤدي حتما إلى صحة Q.

ومن جهة أخرى نلاحظ أن هناك جانبا شكليا (صوريا) واضحا في مسألة "الاستلزام" : إذا كانت القضية P تعني أن "القاهرة عاصمة مصر" والقضية Q تعني " $3 = 3$ " فمن الواضح أن $P \Rightarrow Q$ لأن $\overline{P} \vee Q$ صحيحة رغم أن موقع القاهرة لا علاقة له بالعدد 3.

كما أننا لو نعتبر القضية R التي تنص على أن "القاهرة عاصمة بيروت" وكانت S أية قضية فسنجد أن $R \Rightarrow S$ لأن $\overline{R} \vee S$ صحيحة... من حسن الحظ أننا لا نستعمل المنطق الرياضي في هذا السياق العبثي !

تعريف

لتكن P و Q قضيتين. نقول إن P و Q متكافئتان إذا كانت P تستلزم Q و Q تستلزم P.

الكتابة $P \Leftrightarrow Q$ هي الرمز المعبِّر عن تكافؤ القضيتين P و Q.

ملاحظة

1) نلاحظ أن تكافؤ قضيتين يعني أنهما صحيحتان معا أو خاطئتان معا، ولا يمكن أن تصح إحداهما دون الأخرى.

2) لدينا $P \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{P}\right)}$ من أجل كل قضية P ، أي أن نفي نفي قضية يكافئ تلك القضية.

3) لاحظ أن التكافؤ "علاقة" متعدية، بمعنى أن

$$\left(\left(P \Leftrightarrow Q\right) \wedge \left(Q \Leftrightarrow R\right)\right) \Rightarrow \left(P \Leftrightarrow R\right).$$

4) لدينا : $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right) \Leftrightarrow \left(P \Rightarrow Q\right)$ من أجل قضيتين P و Q.

إليك الجدول الحقيقة التالي الذي يلخص ما ورد أعلاه، من أجل قضيتين P و Q :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

مثال

1) باستعمال جدول الحقيقة، نثبت أن $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$:

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2) باستعمال جدول الحقيقة نثبت أيضا أن $\overline{P} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$:

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

خاصية

لتكن P و Q و R ثلاث قضايا. لدينا التكافؤان التاليان :

1) توزيع الفصل على الوصل :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

2) توزيع الوصل على الفصل :

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

أنماط البرهان

- هناك ما يسمى بالبرهان **المباشر** الذي يعتمد على خاصية الاستنتاج المنطقي.
ويتمثل ذلك في المبدأ التالي : إذا كانت القضية P صحيحة و $P \Rightarrow Q$ (أي P يستلزم Q) فإن Q صحيحة.

- وهناك البرهان بالخلف (برهان **غير مباشر**)، وهي طريقة تتمثل في إثبات استحالة قيام نفي القضية التي نريد البرهان على صحتها. وهنا نفرض أن القضية Q المراد إثباتها خاطئة ثم نبرهن عندئذ أن القضية P الواردة في الفرضيات خاطئة. وبذلك ينتهي البرهان. كل ذلك يعتمد على صحة التكافؤ التالي الذي أشرنا إليه آنفا : $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$. فلكي نثبت $P \Rightarrow Q$ يكفي (ويلزم) أن نثبت $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

- وهناك البرهان **بفصل الحالات** : يقوم مبدؤه على الملاحظة التالية :

إذا كانت P و Q و R ثلاث قضايا تحقق الشروط الثلاثة التالية :

1) $P \vee Q$ صحيحة،

2) $P \Rightarrow R$ صحيحة،

3) $Q \Rightarrow R$ صحيحة.

عندئذ تكون القضية R صحيحة.

ملاحظة

من الناحية العملية نعتبر عموما في هذا النمط $Q = \overline{P}$ فيتحقق على الدوام الشرط الأول لأن $P \vee \overline{P}$ صحيحة دوما.

- هناك البرهان **بالمثال المضاد** الذي نلجأ إليه في الحالة التالية : إذا كانت لدينا خاصية $P(\lambda)$ متعلقة بوسيط λ ينتمي إلى مجموعة A وكان السؤال : هل $P(\lambda)$ صحيحة مهما كان $\lambda \in A$؟ فإذا أردنا الجواب بالنفي فما علينا سوى أن نجد قيمة واحدة للوسيط λ_0 بحيث تكون $P(\lambda_0)$ خاطئة. يعتبر البحث عن قيمة للوسيط λ_0 بحثا عن مثال مضاد يفند صحة $P(\lambda)$ مهما كان $\lambda \in A$.

- وهناك البرهان بالتراجع (أو بالتدريج) : نستخدم هذا النوع من الاستدلال عموما إذا كانت القضية المراد إثباتها تتعلق بوسيط طبيعي. ويقوم البرهان بالتراجع على المبدأ التالي :

أ) لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ تحقق الشرطين:

1) $0 \in A$،

2) $\forall x \in A : x+1 \in A$.

عندئذ يكون $A = \mathbb{N}$.

ب) إذا كانت $(P(n))$ خاصية مرتبطة بوسيط طبيعي n وتحقق الشرطين :

1) $P(0)$ صحيحة.

2) الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيح من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

عندئذ تكون الخاصية $(P(n))$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة

يتمثل القيام بالبرهان على خاصية $(P(n))$ بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ في التأكد من صحة الشرطين الواردين في ب).

مثال

من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$, S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$\alpha_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

نريد إثبات القضية :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ S_n = \alpha_n \ .$$

من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $S_n = \alpha_n$.

نلاحظ أن الخاصية $P(0)$ تعني : $S_0 = \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \alpha_0$. ومن ثمّ

نرى بشكل بديهي أنها صحيحة.

لنفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n، ونثبت صحة $P(n+1)$.

من السهل التأكد من أن :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \alpha_n - (n+1)^2.$$

وعندما نستغل فرض التراجع القائل $S_n - \alpha_n = 0$ فإننا نحصل على:

$$S_{n+1} - \alpha_{n+1} = \left(S_n + (n+1)^2\right) - \left(\alpha_n - (n+1)^2\right)$$
$$= S_n - \alpha_n$$
$$= 0.$$

ومنه $S_{n+1} = \alpha_{n+1}$.

وبالتالي فإن الخاصية $P(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي n.

الدرس الثاني :المتتاليات

تمهيد

لاحظ

a- 1، 3، 5، 7، 9، 11،......

b- 1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ،.....

c- -3 ، $-\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{8}$ ، $-\frac{3}{16}$ ، $-\frac{3}{32}$ ،....

d- $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{6}{7}$،....

e- -2 ، 3 ، 1 ، 4 ،5، 9 ،.....

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الاعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هى الاعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هى أعداد على شكل $\frac{1}{n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هى أعداد على شكل $\frac{-3}{2^n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هى أعداد على شكل $\frac{n}{n+1}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هى أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ين اللذين قبله وهكذا.........

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c اذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ u_0 و الثاني بـ u_1 و الثالث بـ u_2 و هكذا دواليك فاننا نحصل على اللائحة u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،.......

أ/ ما رتبة u_8 ب/ حدد قيمة u_8

ج/ ما رتبة u_n ، حدد u_n

- u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،........ تسمى حدود متتالية
- اذا كان الحد الاول هو u_0 فان رتبة u_0 هى 1 و رتبة u_1 هي 2 و هكذا....... رتبة u_n هي $n+1$

ج- a/ $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ b/ $u_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ c/ $u_n = \frac{-3}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

u_n يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ v_1 و الثاني بـ v_2 و الثالث بـ v_3 و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة v_1 ، v_2 ، v_3 ،........

ما رتبة v_n ، حدد v_n

رتبة v_n هي n و $v_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ياللذين قبلهما وهكذا.........
اذا اعتبرنا أن w_1 ، w_2 ، w_3 ، .... حدود متتالية الائحة e فان $w_3 = w_1 + w_2$ و $w_4 = w_2 + w_3$ ...
$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ملاحظة:
المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض n و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجيب أن نرجع إلى حدين قبلهما

- تعريف

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا و $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ جزء من $\mathbb{N}$
كل دالة من I نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية

اصطلاحات
-* $u: \ I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية
يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.
يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in I}$ عوض u.
-* اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 0}$ أو (u_n)
-* اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 1}$
-* اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$

أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = (-2)^n + 3n \quad \text{و} \quad v_n = 2n^2 - 3n \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$

تحديد متتالية
تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = 2n - 6 \quad \text{و} \quad v_n = a \ \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad w_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة
أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$

المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى
أمثلة
نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \quad v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات ترجعية
/1 أحسب u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_2 ; v_3 ; w_2 ; w_0

2/ بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتيبة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) حيث $u_n = \dfrac{2}{3}n - 1$ و $v_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

1/ أحسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1

2/ بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ نقول إن المتتالية (u_n) محدودة من الادنى بالعدد 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$ نقول إن المتتالية (u_n) محدودة من الاعلى بالعدد 1

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة من الاعلى اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة من الادنى اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ محدودة من الاعلى و محدودة من الادنى

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = 2n - 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$$

بين أن (u_n) محدودة من الادنى و $(v_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الاعلى بالعدد3 و $(w_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

المتتالية الرتيبة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ متزايدة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ متزايدة تماما اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \succ u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ متناقصة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ متناقصة، تماما اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \prec u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تابثة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I لدينا $u_n = u_m$

امثلة

أدرس رتابة المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = 2n - 1$ و $v_n = -3n + 5$

برهن أن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متزايدة $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

خاصيات

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية متزايدة $\Leftrightarrow \quad \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

امثلة

لتكن (u_n) متتالية حسابية اساسها3 و حدها الأول $u_0 = -2$

1 / أحسب u_n بدلالة n و أحسب u_{200}

2/ أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

لتكن (u_n) متتالية حسابية حيث $u_{50} = 20$ و $u_{30} = -40$

1/ حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية (u_n)

2/ أحسب المجموع $S = u_{15} + u_{16} + \ldots + u_{54}$

أحسب $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots. + (2n+1)$

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب u_n بدلالة n. ثم أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

المتتالية الهندسية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

امثلة

(u_n) متتالية حيث $u_n = 3(2)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

1/ بين بالترجع أن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر $q \neq 1$ و $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$

أ- بين أن $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن $S_n = u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

ملاحظة - اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 q^{n-1}$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

أمثلة

* لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

* لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان $S_n S_n$ مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = u_p(n-p)$

أمثلة

1/ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

2/ لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

أحسب بدلالة n المجموع $S = 2 + 4 + 8 + 16 .... + 2^n$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول v_0
2. احسب v_n ثم u_n بدلالة n
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

احسب S_n بدلالة n

نهاية متتالية

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند $+\infty$

نكتب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ باختصار $\lim u_n$

نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = \frac{1}{n}+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

نحدد $\lim u_n$ و $\lim v_n$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ إذن $\lim u_n = +\infty$ $\qquad$ نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+3 = 3$ إذن $\lim v_n = 3$

تعريف نهاية منتهية لمتتالية

نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى l إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = l$

تعريف نهاية لا منتهية لمتتالية

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]A;+\infty[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = +\infty$

*نقول ان نهاية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تؤول إلى $-\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty;A[$ يحتوي علىجميع حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ابتداء من رتبة. نكتب $\lim u_n = -\infty$

ملاحظة $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

خاصية

ليكن p عدد صحيح طبيعي $p\geq 1$ و k عدد حقيقي

$$\lim \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim n^p = +\infty \qquad \lim \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim \frac{1}{n^p} = 0$$

خاصية

لتكن متتالية عددية $(u_n)_{n\geq n_0}$ و l عددا حقيقيا

$$\lim(u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

$$\lim|u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

متتالية متقاربة – متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.

نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط كانت غير متقاربة.

أمثلة

نعتبر $u_n = \frac{-3}{n^2}+4$ و $v_n = n^3$ و $w_n = (-1)^n$

(u_n) متقاربة لان $\lim u_n = 4$

(v_n) متباعدة لان $\lim v_n = +\infty$

(w_n) متباعدة لأن (w_n) لا تقبل نهاية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\geq n_0}$, متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

l عدد حقيقي حيث $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n\geq N \quad \exists N\in\mathbb{N}$.

اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \leq v_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$ اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v = +\infty$ اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث $v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n \geq N \quad \exists N \in \mathbb{N}$ اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

أمثلة نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حدد $\lim u_n$ في الحالات التالية:

أ- $u_n = n^2 + n - 3$ ب- $u_n = -n^2 + n$ ج- $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل $n \geq 3$ $n^2 \leq n^2 + n - 3$ و حيث $\lim n^2 = +\infty$ ومنه $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل $n \geq 2$ $1 - \dfrac{n}{2} \leq 0$ ومنه $1 - n \leq -\dfrac{n}{2}$ و بالتالي $n - n^2 \leq -\dfrac{n^2}{2}$

وحيث $\lim -\dfrac{n^2}{2} = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل $n \geq 1$ $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ و حيث $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ فان $\lim u_n = 0$

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

بين بالترجع أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و استنتج $\lim u_n$

نهاية المتتالية الهندسية q^n

الحالة1: $q \succ 1$

يوجد عدد حقيقي موجب a حيث $q = 1 + a$ نعلم أن $(1+a)^n \geq 1 + na$ ومنه $q^n \geq 1 + na$

وحيث $\lim 1 + na = +\infty$ فان $\lim q^n = +\infty$

الحالة2 $q = 1$ لدينا $\lim q^n = 1$

الحالة3 $-1 \prec q \prec 1$

$|q| \prec 1$ ومنه $\dfrac{1}{|q|} \succ 1$ و منه $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = \lim \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim |q^n| = 0$

إذن $\lim q^n = 0$

الحالة4 $q \leq -1$ (q^n) ليست لها نهاية

خاصية

اذا كان $q \succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$	اذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فان $\lim q^n = 0$
اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$	اذا كان $q \leq -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة *- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1 \prec q \leq 1$

*- ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r \succ 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = +\infty$ إذا كان $r \prec 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = 0$

أمثلة حدد $\lim \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$ و $\lim \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

خاصيات

كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n \leq v_n$ لكل $n \geq N$ فان $l \leq l'$

كل متتالية متزايدة و محدودة من الاعلى هي متتالية متقاربة
كل متتالية متناقصة و محدودة من الادنى هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية متزايدة و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية متناقصة و موجبة هي متتالية متقاربة

العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n \qquad \lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n \qquad \lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

إذا كان $\lim v_n \neq 0$ فان $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
l	l'	$l + l'$	$l \times l'$	$\frac{l}{l'}$ $(l' \neq 0)$
l $l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
l $l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l \neq 0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l \neq 0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l

متتاليات من نوع $f(u_n)$

خاصية

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلة في العدد الحقيقي l فان المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة بــ $v_n = f(u_n)$ بحيث $n \geq n_0$ متقاربة و نهايتها $f(l)$

متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

نعتبر (u_n) متتالية عددية حيث $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$

1- بين أن $2 \leq u_n \leq \dfrac{7}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

2- لتكن (v_n) متتالية عددية حيث $v_n = 1 - \dfrac{4}{u_n + 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب- ب- حدد $\lim v_n$ استنتج $\lim u_n$

3- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$

أ- تأكد أن f متصلة على $\left[2;\dfrac{7}{2}\right]$

ب- بين أن $f\left(\left[2;\dfrac{7}{2}\right]\right) \subset \left[2;\dfrac{7}{2}\right]$

ت- حل المعادلة $f(x) = x$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ينتمي إلى I و f متصلة على I و $f(I) \subset I$.

اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x) = x$

الدرس الثالث: السلاسل العددية

تعريف

المجموعة اللانهائي لحدود متتالية عددية لا نهائية فإذا كانت $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية حدودها $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ فإن المجموع اللانهائي لهذه الحدود $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$ بشكل سلسلة عددية ونرمز لها بـ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

نسمي u_1 بالحد الأول للسلسلة، u_2 حدها الثاني، u_n حدها ذا المرتبة n أو الحد العام وهو الصيغة الرياضية التي تولد جميع حدود السلسلة.

تمثل السلسلة إما بإعطاء جميع حدودها أو بإعطاء حدها العام وتكتب اختصاراً بالشكل: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ حيث u_n هو الحد العام للسلسلة المفروضة.

أمثلة

1) السلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

تسمى هذه السلسلة بالسلسلة التوافقية، حدها العام $u_n = \frac{1}{n}$ وتكتب بالشكل المختصر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2) السلسلة $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

حدها العام $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ونكتب بالشكل المختصر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

3) السلسلة $2 - 6 + 18 - \ldots\ldots + 2(-3)^{n-1}$ حدها العام $u_n\, 2(-3)^{n-1}$ وشكلها المختصر $2\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1}$

4) السلسلة $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^{n-1} + \ldots\ldots$ حيث $a \neq 0$ عدد حقيقي

ونسمي هذه السلسلة بالسلسلة الهندسية، حدها العام $u_n = a^{n-1}$

5) السلسلة $a + 2a + 3a + \ldots\ldots + (n-1)a + \ldots\ldots$ تسمى السلسلة الحسابية وفيها الحد العام $u_n = (n-1)a$

مجموع السلسلة

إذا كان المجموع $u_1,u_2,......,u_n$ منتهياً فيمكن أن نجد قيمته الدقيقة ويسمى مجموع السلسلة أما إذا كان المجموع لانهائياً فلا نستطيع أن نقول شيئا عنهً إلا في بعض الحالات الخاصة.

متتالية المجاميع الجزئية

لتكن لدينا متتالية الأعداد الحقيقية الآتية: $u_1,u_2,......,u_n$

. المجاميع الجزئية لحدودها كما يلي

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2 = S_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3$$
$$.S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = S_{n-1} + u_n$$

تمثل المتتالية $s_1,s_2,........,s_n$ المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ وتسمى متتالية المجاميع الجزئية ونرمز لها بـ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

تقارب و تباعد السلاسل

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ونهايتها s أي $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ فإن العدد s يمثل مجموع السلسلة وتكون السلسلة في هذه الحالة متقاربة. أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة أي ليس لها نهاية محددة، فإن السلسة نفسها تكون متباعدة وليس لها مجموع محدد. مجموع السلسلة يخص السلاسل المتقاربة

أمثلة

1) السلسلة ......+1+........+1+1+1+1 متتالية المجاميع الجزئية لها

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + 1 = 2$$
$$s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$.$$
$$.$$
$$s_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$$

متتالية المجاميع الجزئية لها: .. ....,n,.........,1,2,3 متباعدة لأنها تؤول إلى اللانهاية

2) السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$$S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$$

.

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.........+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لأن $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$

3) السلسلة $2\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}=2-6+18-54+162+.....+2(-3)^{n-1}+......$

المجاميع الجزئية لها $S_1=2, S_2=-4, S_3=14, S_4=-40, S_5=122$ السلسلة متباعدة

السلسلة الحسابية

السلسلة الحسابية: هي مجموع حدود المتتالية الحسابية، وهي متتالية الأعداد التي

ينشأ كل حد فيها عن سابقه بإضافة مقدار ثابت r يسمى أساس المتتالية أي: $a_k=a_{k-1}+r$

$$a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r, ...$$

ويكون مجموعها النوني $A_n=a+(a+r)+(a+2r)+.....+[a+(n-1)r]$

مجموع حدود السلسلة الحسابية

نكتب
$$a_1+a_2+a_3+........+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$
$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+.......+a_3+a_2+a_1$$

نجمع كل حدين متقابلين

$$(a_1+a_n)(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+.......+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

$$2A_n=n[2a_1+(n-1)r]$$

$A_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ إن $A_n\to\infty$ عندما $n\to\infty$. إذاً فالسلسلة الحسابية متباعدة دوماً

السلسلة الهندسية

تعريف: نسمي السلسلة $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

سلسلة هندسية إذا كانت القسمة بين حدين متتاليين فيهما تساوي مقداراً ثابتاً q حيث

$q \neq 1$ يسمى أساس السلسلة الهندسية، أي: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1}q, n = 2,3,..........$

نستطيع كتابة حدود السلسلة الهندسية بالشكل $a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ...$

نسمي هذا المجموع $G_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$

$$qG_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n + ...$$

$$qG_n - G_n = aq^n - a$$

$$G_n(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$G_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

عندما $|q| < 1$ أي $-1 < q < 1$ نعلم أن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

وبالتالي فإن: $G = \lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$

أي أن النهاية موجودة ومحدودة فالسلسلة متقاربة

$|q| > 1$ أي $q > 1$ أو $q < -1$ بأخذ نهاية المجموع $\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q}$

ولكن $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ عندما $|q| > 1$ إذاً $\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \infty$

أي أن السلسلة متباعدة

تكون حدود السلسلة ثابتة وتساوي a وعندئذ مجموعها $G_n = na$

أي السلسلة أيضاً متباعدة $\lim_{n\to\infty} G_n = a\lim_{n\to\infty} n = \infty$

q=-1 يكون مجموع حدود السلسلة $G_n = a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1}a$

إن متتالية المجاميع الجزئية تساوي 0 أو a وذلك حسبما يكون n زوجياً أو فردياً، إذاً

لا نستطيع تحديد نهاية لهذه المتتالية فهي متباعدة،

خواص تقارب السلاسل

الشرط اللازم الغير كاف

الشرط اللازم لتقارب سلسلة عددية هو أن يتناهى حدها العام إلى الصفر

البرهان: لنفرض $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ سلسلة متقاربة.إذاً المجموع النوني لحدودها ينتهي إلى نهاية محدودة ووحيدة. ولتكن A عندما $n \to \infty$.

إن الحد العام للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ هو الفرق بين المجموعتين S_n ، S_{n-1}

$$u_n = S_n - S_{n-1} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

إذا كان الحد العام لا ينتهي إلى الصفر فهذا يدل على أن السلسلة متباعدة.

مثال

مثال على ذلك السلسلة الهندسية التي فيها $|q| > 1$ وجدنا أنها متباعدة حيث $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$

إن الشرط $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ هو لازم لتقارب السلسلة وليس كافياً لنأخذ كمثال على ذلك السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ التي فيها $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولكنها متباعدة. بالحقيقة لدينا إن حدود السلسلة هي: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots$

نكتب حدود هذه السلسلة ابتداء من الحد الثاني على شكل مجموعات عدد حدودها $1,2,8,\ldots\ldots,2^{k-1}$ حيث k ترتيب المجموعة

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + (\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{16}) + \ldots\ldots$$

$$\sum \frac{1}{n} > 1 + \tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{4} + 4\tfrac{1}{8} + 8\tfrac{1}{16} + \ldots\ldots = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots) = 1 + \tfrac{n}{2}$$

إن مجموع الـ (n-1) حداً الأولى منها وهو $\frac{n}{2}$ يتناهى إلى اللانهاية لذلك نجد أن مجموع حدود هذه السلسلة يتناهى إلى اللانهاية وبالتالي فهي متباعدة.على الرغم من أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

خاصية

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ سلسلتين متقاربتين إلى العدد A و B إن مجموعهما وفرقهما هو سلسلة متقاربة نحو العدد $A \pm B$ أي: $\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = A \pm B$

برهان

لنأخذ المجموع (الفرق) لـ n حد الأولى للمتتالية $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + ... + (u_n \pm v_n) = (u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n) \pm (v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n)$$

ومنه ينتج: $\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n = A \pm B$

خاصية

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة ومجموعها العدد A فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ متقاربة ومجموعها العدد $\lambda A \in R$

برهان

يمكن أن نكتب $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + ... + \lambda u_n + ...$

$$= \lambda(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...) = \lambda A$$

خاصية

إذا أضفنا أو حذفنا من السلسلة $\sum^{\infty} u_n$ عدداً منته من حدودها الأولى فلا تتغير طبيعة السلسلة من حيث التقارب أو التباعد.

برهان

لنأخذ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ولنحذف منها k حد الأولى ولنرمز بـ A_n لمجموع الحدود الـ (n) الأولى للسلسلة $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...u_n + ...$ و A'_n لمجموع الحدود الـ n الأولى للسلسلة $u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_n + ...$ نلاحظ: $A'_n = A_n - (u_1 + u_2 + ... + u_k)$

بفرض $u_1 + u_2 + ... + u_k = M$ حيث k عدد محدود ينتج M عدد محدود.

وبأخذ نهاية الطرفين للعلاقة الأخيرة نجد: $\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} A_n - (u_1 + u_2 + ... + u_k) = \lim_{n\to\infty} A_n - M$

إذا كان $\lim A_n$ موجودة ينتج $\lim A'_n$ موجودة وبالعكس. وبالتالي لا تتغير طبيعة السلسلة من حيث تقاربها او تباعدها.

خاصية

إذا أضفنا أو طرحنا من السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ عدداً منته من الحدود، لا تتغير طبيعة السلسلة من حيث تقاربها أو تباعدها.

برهان

لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ولنحذف منها n' حداً الأولى نحصل على سلسلة جديدة $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ حيث

$v_1 = u_{n'+1}, v_2 = u_{n'+2}, v_3 = u_{n'+3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ عندئذ من أجل n'>n

لدينا:
$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n'} + u_{n'+1} + u_{n'+2} + \ldots\ldots u_n$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n'}) + (v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_{n-n'})$$

نرمز للمجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ بـ U_n وللمجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ بـ V_n عندئذ نجد: $U_n + U_{n'} + (U_n - U_{n'}) = U_{n'} + V_{n-n'}$ فإذا كانت النهاية $\lim U_n$ موجودة (أو غير موجودة) فإن النهاية $\lim V_{n-n'}$ تكون $U_{n'}$ لا يتعلق بـ n

السلاسل الموجبة

إن السلاسل ذات الحدود الموجبة هي السلاسل التي تكون جميع حدودها $u_n \geq 0$ حيث $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ إن السلاسل ذات الحدود الموجبة (أو غير السالبة) هي إما متقاربة أو متباعدة أي إما $A_n \to A$ أو $A_n \to +\infty$

إن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة الموجبة $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ هي متتالية متزايدة.

حيث $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ ولكن $a_{n+1} \geq 0$ إذاً $A_{n+1} \geq A_n$

خاصية

تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة، عندئذ توجد النهاية $\lim_{n\to\infty} A_n = A$
حيث A_n هو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة.

اختبارات التقارب

اختبار المقارنة

لتكن لدينا السلسلتان العدديتان الآتيتان ذوات الحدود غير السالبة:

$$\sum_{N=\infty}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n + \dots \qquad \sum_{N=\infty}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n + \dots$$

وليكن $u_n \le v_n$ من أجل $n_0 < n$ حيث n_0 ترتيب حد من السلسلتين عندئذ

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متباعدة

برهان

ليكن $S'_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$ $\qquad S''_n = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$

من الواضح $S'_n \le S''_n$ فإن المتتالية .... $S''_1, S''_2, \dots\dots, S''_n, \dots\dots$ متقاربة أيضاً

مثال

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ إن حدود هذه السلسلة أصغر من حدود السلسلة $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ المتقاربة إذاً السلسلة المفروضة متقاربة

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots\dots \le 1 + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{40} + \dots\dots$$

ملاحظة

إن تطبيق اختبار المقارنة يحتاج إلى معرفة تقارب عدد من السلاسل أو تباعدها ونذكر هنا بعضاً منها:

1- السلسلة الحسابية متباعدة دوماً

2- السلسلة الهندسية متباعدة عندما $|q| \ge 1$ ومتقاربة عندما $|q| < 1$

3- السلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة دوماً

4- سلسلة ريمن ذات الشكل العام $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ حيث $P \in Q$ متقاربة عندما p>1 ومتباعدة عندما $p \le 1$

مثال

لتكن السلسلة العددية .... $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+.....+\frac{1}{2^{n-1}+1}+.........$

إن حدودها أصغر من حدود السلسلة: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+......+\frac{1}{2^{n-1}}$

وبما أن السلسلة الثانية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}<1$ فهي متقاربة. إذاً وحسب اختبار المقارنة فإن السلسلة المفروضة متقاربة.

إختبار القسمة

إذا كان لدينا السلسلتين U_n , V_n ولحساب النهاية $\lim \frac{V_n}{U_n}$

1- إذا كانت النهاية محدودة وغير معدومة فالسلسلتين من نوع واحد

2- إذا كانت النهاية معدومة وكانت $\sum u_n$ متقاربة فإن $\sum v_n$ متقاربة

3- إذا كانت النهاية غير محدودة وكانت $\sum u_n$ متباعدة فإن $\sum v_n$ متباعدة

4- إذا كانت النهاية معدومة وكانت $\sum u_n$ متباعدة فلا نستطيع تحديد طبيعة السلسلة $\sum v_n$

5- إذا كانت النهاية غير محدودة وكانت $\sum u_n$ متقاربة فلا نستطيع تحديد طبيعة $\sum v_n$

إختبار كوشي

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ولندرس النهاية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l$

1- إذا كان $l<1$ فالسلسلة متقاربة

2- إذا كان $l>1$ فالسلسلة متباعدة

3- إذا كان $l=1$ فلدينا حالة شك، أي أن اختبار كوشي لا يعطينا نتيجة قاطعة لطبيعة السلسلة

برهان

إذا كان $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l<1$ وكان $l<q<1$ عندئذ يوجد العدد الطبيعي $m\in N$، بحيث من أجل $m<n$ يكون $\sqrt[n]{u_n}<q$ أو $u_n<q^n$ فمن أجل قيم كبيرة لـ n أكبر من m، السلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ متقاربة عندما $0\leq q<1$ ، وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة عندما $q\geq 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l>1$ ، فمن أجل القيم الكبيرة لـ n، ستكون $\sqrt[n]{u_n}>1$ وبالتالي $u_n>1$ وبالتالي فإن الحد العام للسلسلة لا يتناهى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ فالسلسلة متباعدة

مثال

ادرس تقارب السلاسل الآتية: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$ السلسلة متقاربة.

إختبار دالمبير

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ولندرس النهاية: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$

1) إذا كان $l<1$ فالسلسلة متقاربة

2) إذا كان $l>1$ فالسلسلة متباعدة

3) إذا كان $l=1$ فلدينا حالة شك في معرفة تقارب أو تباعد السلسلة

برهان

1) إذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$ فإن $l<q<1$ عندئذ يوجد العدد الطبيعي $m\in N$ بحيث

من أجل جميع قيم $m\le n$ تتحقق المتراجحة $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q\Rightarrow u_{n+1}<qu_n$

من أجل n=m لدينا

$$u_{m+1}<qu_m$$
$$u_{m+2}<qu_{m+1}<q^2u_m$$
$$u_{m+3}<qu_{m+2}<q^3u_m$$

نلاحظ أن أي حد من السلسلة $u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\dots\dots\dots$ أصغر أو يساوي الحد المقابل له من السلسلة $u_m+qu_m+q^2u_m+\dots\dots$ المتقاربة لأنها سلسلة هندسية أساسها $q<1$ وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ متقاربة

2) لنفرض $l>1$ سيكون لدينا اعتباراً من قيمة معينة $n\ge m$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$

إذاً حدود السلسلة متزايدة اعتباراً من m+1 ينتج الحد العام لا ينتهي إلى الصفر أبداً السلسلة متباعدة.

$$u_n = \frac{1.4.9.........n^2}{1.3.5.......(4n-3)(4n-1)} \qquad u_{n+1} = \frac{1.4.9.......n^2.(n+1)^2}{1.3.5.......(4n+1)(4n+3)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.4.9.........n^2(n+1)^2}{1.3.5......(4n+1)(4n+3)} \times \frac{1.3.5.7.........(4n-3)(4n-1)}{1.4.9...........n^2}$$

$$\frac{(n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n(4+\frac{1}{n})(n)(4+\frac{3}{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(4+\frac{1}{n})(4+\frac{3}{n})} = \frac{1}{16} < 1$$

السلاسل المتناوبة

نسمي السلسلة العددية $\sum^{\infty} u_n$ التي فيها كل حدين متجاورين مختلفين بالإشارة، سلسلة متناوبة.

يمكن أن نكتب السلسلة المتناوبة بالشكل العام التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1}u_n + ...$$

حيث $u_n > 0$

إختبار ليبنتز

تتقارب السلسلة المتناوبة $\sum^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ (1) إذا تحققت :

1) متتالية القيم المطلقة لحدود السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ متناقصة :

$u_n > u_{n+1}, n = 1,2,3,.......$

2) يتناهى الحد العام إلى الصفر $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

مثال

السلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-}}{n}$

إن هذه السلسلة تحقق شروط لايبنتز. حيث أنها سلسلة متناوبة و متتالية القيم المطلقة لحدودها متناقصة, وكذلك $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

إذاً السلسلة متقاربة

تقارب السلاسل كيفية الاشارة

نقول عن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ متغيرة الإشارة حيث الحدود u_i مختلفة الإشارة. إنها متقاربة مطلقاً، إذاً سلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة، أي إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + ...|u_n| + ..$ متقاربة

إذا تقاربت السلسلة $\sum^{\infty} u_n$ ولم تتقارب مطلقاً (أي كانت $\sum |u_n|$ متباعدة)، فإن $\sum u_n$ متقاربة شرطياً.

يمكننا استخدام اختبارات التقارب للسلاسل ذات الحدود الموجبة لدراسة تقارب السلاسل المتناوبة أو متغيرة الإشارة بعد أخذ القيم المطلقة لحدودها، فتصبح سلاسل ذات الحدود الموجبة

مثال

ادرس تقارب السلاسل التالية $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot$

بتطبيق اختبار دالمبير

$$|u_n| = \frac{7.9.11........(2n+5)}{1.4.7.....(3n-2)}$$

$$|u_{n+1}| = \frac{7.9.11........(2n+5)(2n+7)}{1.4.7..........(3n-2)(3n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7.9.11........(2n+5)(2n+7)}{1.4.7..........(3n-2)(3n+1)} \times \frac{1.4.7.....(3n-2)}{7.9.11.......(2n+5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+7}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$$

والسلسلة متقاربة.

حساب مجموع سلسلة متقاربة

أوجد مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$

إن هذه السلسلة هي مجموع سلسلتين هندسيتين هما: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}, \sum \frac{1}{3^{n-1}}$ متقاربتان لأن $q_1 = \frac{1}{2} < 1$ ، $q_2 = \frac{1}{3} < 1$

$$S_1 = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

مجموع السلسلة $S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

أوجد مجموع حدود السلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

متتالية المجاميع الجزئية

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{1.5}, S_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9}, S_3 = S_2 + u_3 = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13}$$

$$S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}$$

بتوحيد المقامات وحذفها نجد $1 = A(4n+1) + B(4n-3)$

بالمطابقة : $\begin{matrix} 0 = 4A + 4B \\ 1 = A - 3B \end{matrix}$ نجد: $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$

إذاً نستطيع أن نكتب الحد العام بالشكل $u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + ... + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

السلسلة المفروضة مجموعها $S = \frac{1}{4}$

الدرس الرابع: مدخل للدوال العددية

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي f اذا ربطنا كل عدد من $\mathbb{R}$ على الاكثر بعدد حقيي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة x بالدالة f أو باختصار f لـ x

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .
مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f
نرمز لها بـ D_f

تعريف تساوي دالتين

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي
تكون f و g متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D
$f(x) = g(x)$

تعريف التمثيل البياني لدالة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .
التمثيل البياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x \in D_f$ نرمز لها بالرمز C_f $C_f = \{M(x;f(x))/x \in D_f\}$

ملاحظة

$M(x;y) \in C_f$ تكافئ $y = f(x)$ و $x \in D_f$
العلاقة $y = f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

مثال

حدد D_f ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{\left|x\right|-2}$$

$x\in D_f$ تكافئ $\left|x\right|-2\neq 0$ تكافئ $\left|x\right|\neq 2$ تكافئ $x\neq 2$ أو $x=-2$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\left\{-2;2\right\}$

لدينا إذا كان $x\in\left[0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ فان $f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{\left|x\right|-2}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=x+2$

إذا كان $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;0\right]$ فان $f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{\left|x\right|-2}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{-x-2}=-x+2$

نشئ المنحنى C_f

معادلة جزء C_f على $\left[0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ هي $y=x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة $A\left(0;2\right)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2

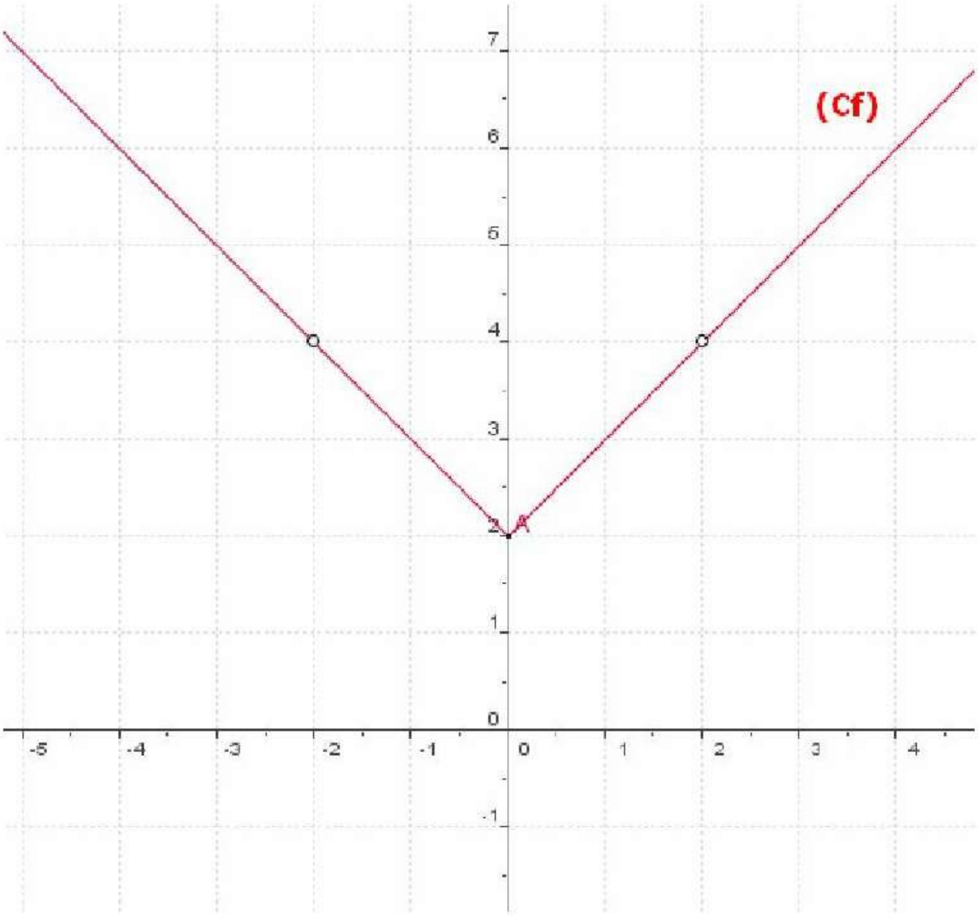
معادلة جزء C_f على $\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;0\right]$ هي $y=-x+2$ و منه C_f نصع مستقيم أصله النقطة

أ-

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C\left(2;0\right)$; $D\left(-4;6\right)$; $E\left(4;-6\right)$ تنتمي إلى C_f

د – أكتب $f\left(x\right)$ بدون رمز للقيمة المطلقة



الدالة الزوجية

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها
نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :
* لكل x من D_f $-x \in D_f$
* لكل x من D_f $f(-x) = f(x)$

مثال

$$f(x) = |x| - \frac{1}{x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}^*$ $-x \in \mathbb{R}^*$

لتكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

التمثيل المبياني لدالة زوجية

f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;f(x))$ من C_f و M' مماثلتها بالنسبة لمحور التراتيب .

ومنه $M'(-x;f(x))$

و حيث أن f زوجية فان $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$

ومنه $M'(-x;f(-x))$ و بالتالي $M' \in C_f$

اذن C_f متماثل بالنسبة لمحور التراتيب

العكس

بين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور التراتيب فان f دالة زوجية

خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$
تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور التراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

دالة فردية

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها
نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :
* لكل x من D_f $-x \in D_f$
* لكل x من D_f $f(-x) = -f(x)$

خاصة

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f متزايدة علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$
- تكون f متزايدة تماما علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f\left(x_1\right) \prec f\left(x_2\right)$
- تكون f متناقصة علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$
- تكون f متناقصة تماما علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f\left(x_1\right) \succ f\left(x_2\right)$

الدالة الرتيبة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f
نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما متزايدة علىI و إما متناقصة على I.

ملاحظة

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة f على مجال I يعني تجزيءI إلى مجالات
 تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 وx_2 عنصرين مختلفينمن D_f
العدد $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 وx_2.

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f متزايدة علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون f متزايدة تماما علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون f متناقصة علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون f متناقصة تماما علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x\,/\,x\in I\}\right)$

- إذا كانت f متزايدة على I فان f متناقصة على J.
- إذا كانت f متناقصة على I فان f متزايدة على J.

خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x\,/\,x\in I\}\right)$

- إذا كانت f متزايدة على I فان f متزايدة على J.
- إذا كانت f متناقصة على I فان f متناقصة على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f\cap\mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f\cap\mathbb{R}^-$

القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$
$f(x)\prec f(a)$
- نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a\in I$ حيث لكل $x\in I-\{a\}$
$f(x)\succ f(a)$

خاصة

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a \prec b \prec c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

دراسة وضعية منحنيين

ليكن C_f و Cg منحنيين للدالتين f و g على التوالي

يكون $f(x) \succ g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f فوق Cg في المجال I

يكون $f(x) \prec g(x)$ على المجال I اذا و فقط كان C_f تحت Cg في المجال I

حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال I هي نقط تقاطع المنحنيين C_f تحت Cg في المجال I