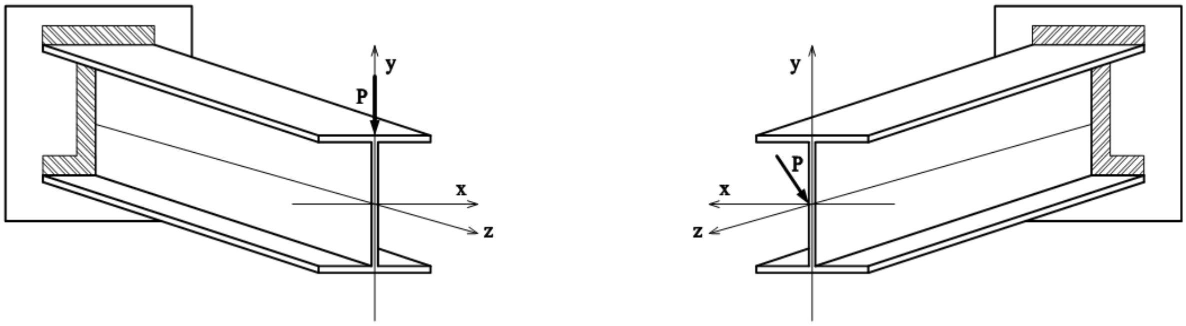
التأثيرات المركبة
Sollicitations composées

1- الإنحناء المنحرف: (Flexion déviée)

1-1- تعريف:

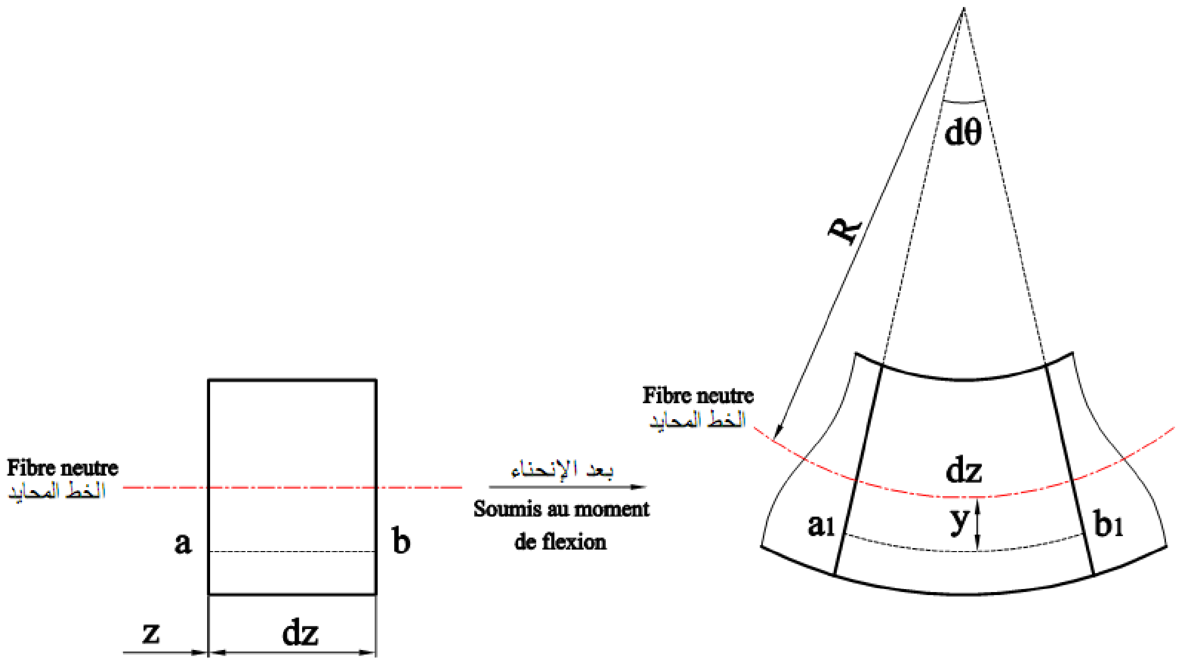
نقول عن على إنحناء أنه منحرف عندما لا يمر عزم الإنحناء من أحد المحاور الرئيسية للمقطع أو القوى الخارجية لا تكون مطبقة ضمن داخل مستوى إنحناء رئيسي (x,z) أو (y,z) .



Flexion sipmle — الإنحناء البسيط

Flexion déviée — الإنحناء المنحرف

1-2- الإجهادات الناظمية بالنسبة للإنحناء البسيط (Contraintes normales en flexion simple)



$$N = \int_A \sigma \; dA \qquad\qquad M_x = N.y = \int_A \sigma . y \; dA$$

$$M_x = \int_A \sigma \; dA \quad ....(01)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{(R + y)d\theta - dz}{dz} = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad ....(02)$$

La loi de Hooke $\rightarrow \quad \sigma = E\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{y}{R}$

$$\sigma = \frac{Ey}{R} \quad ....(03)$$

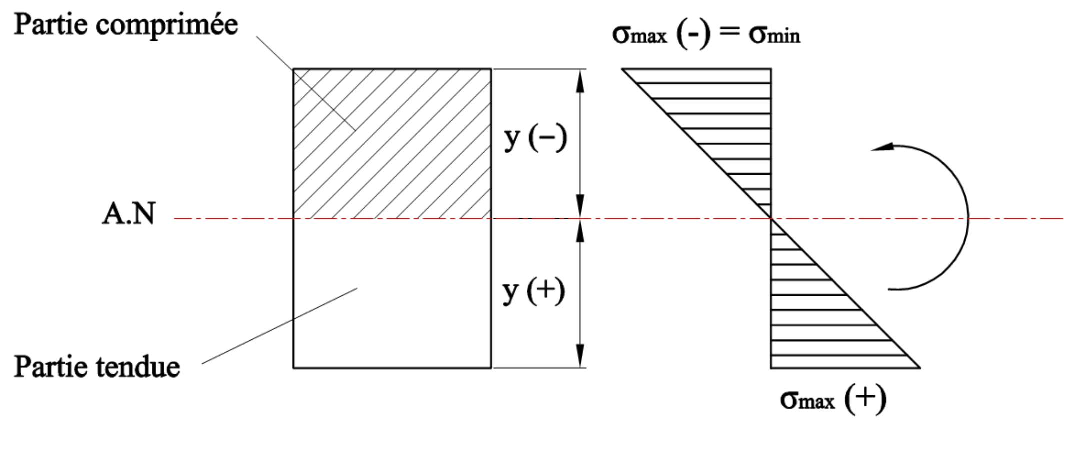
$$M_x = \int_A \frac{E}{R} . y^2 \; dA = \frac{E}{R} \int_A y^2 \; dA \rightarrow M_x = \frac{E}{R} . I_x \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_x}{E . I_x}$$

$$\sigma = \frac{E.y}{R} = \frac{M_x}{I_x} y \rightarrow \quad \sigma = \frac{M_x}{I_x} . y \quad ....(04)$$

La formule de navier

3-1- ملاحظات:

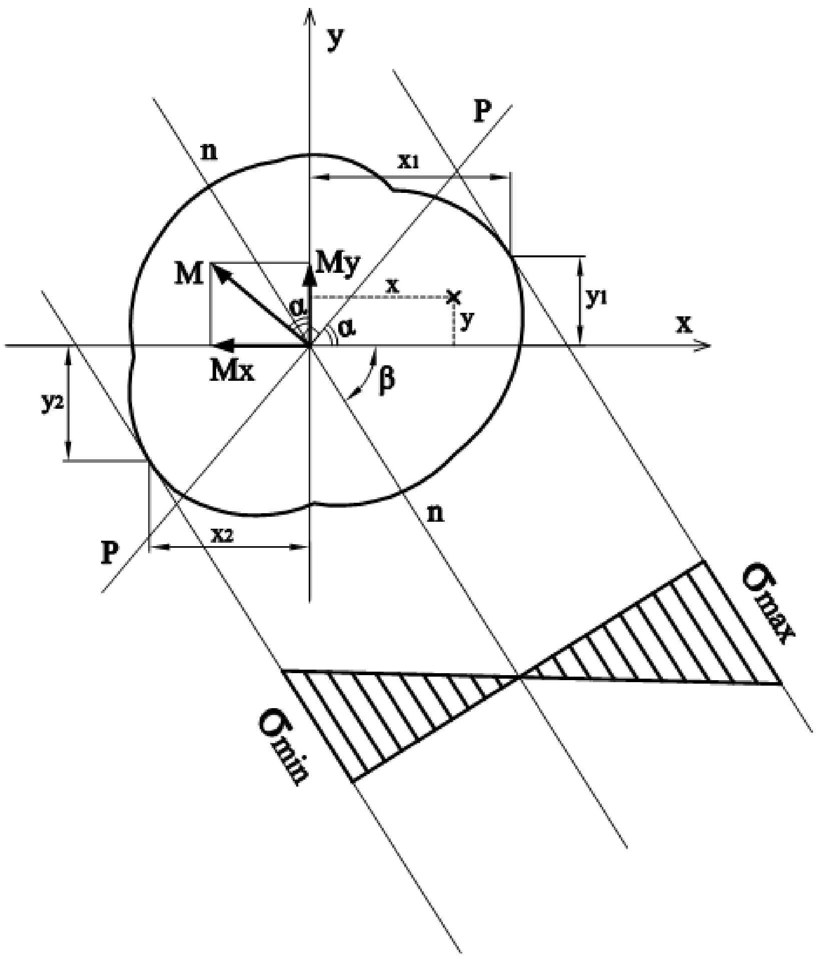
1. الإجهاد σ يتناسب طردا مع عزم الانحناء.
2. الإجهاد σ يتغير خطيا بدلالة y .
3. الخط الأكثر تحميل (la fibre la plus sollicitée) يقع في الحدود البعيدة على الخط المحايد (إما يكون شد أو ضغط).



4-1- الإجهادات الناظمية بالنسبة للإنحناء المنحرف (Contraintes normales en flexion déviée)

يدرس الإنحناء المنحرف كمجموع من إنحنائين بسيطين وبتالي الإجهاد الناظمي المؤثر على كل نقطة من نقاط المقطع العرض يتعين في بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = M \left(\frac{y}{I_x}\sin\alpha + \frac{x}{I_y}\cos\alpha\right) \qquad (05)$$



حيث :

x و y : إحداثيات النقطة.

I_x و I_y : عزوم العطالة للمحاور الرئيسية للمقطع.

M_x و M_y : عزوم الإنحناء بالنسبة للمحورين الرئيسيين وهي مركبات عزم الإنحناء المنحرف حيث:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

(P,z) : هو مستوى الإنحناء المنحرف والمشكل مع مستوى الإنحناء الرئيسي (x,z) زاوية α .

1-5-معادلة الخط المحايد nn :

تتعين بتعويض $\sigma = 0$.

$$y = -x \frac{I_x}{I_y} . \frac{M_y}{M_x} = -x \frac{I_x}{I_y} . \cot \alpha = x \tan \beta \qquad \text{.......................(06)}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \beta$$

$$\tan \beta = -\frac{I_x}{I_y} . \frac{M_y}{M_x} = -\frac{I_x}{I_y} . \cot \alpha \qquad \text{.......................................(07)}$$

حيث :

β : زاوية ميل الخط المحايد مع المحور الرئيسي x.

1-6- ملاحظات:

1. بمأن في الحالة العامة $I_y \neq I_x$ ، لذا فإن الخط المحايد عادة غير عمودي مستوى الإنحناء المنحرف (P,z) بل يميل في جهة المحور ذي عزم العطالة الصغير.
2. في كافه العلاقة تعتبر العزوم M_x و M_y موجبة إذا كانت تخلق إجهاد شد في نقاط الربع الأول من المقطع.

الإجهادات الناظمية الأعظمية للشد (σ_{max}) و الأعظمية للضغط (σ_{min}) تتعين بالعلاقة الأساسية بعد تعويض إحداثيات (x_1, y_1, x_2, y_2) التي هي نقاط التماس مع محيط مقطع و المستقيمات الموازية للخط المحايد :

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \dfrac{M_x}{I_x} y_1 + \dfrac{M_y}{I_y} x_1 \\ \sigma_{\min} = \dfrac{M_x}{I_x} y_2 + \dfrac{M_y}{I_y} x_2 \end{cases} \qquad \text{..........................(08)}$$

وإذا ظهر الإجهاد الناظمي الأعظمي للشد أو للضغط في نقطة ما أبعد ما تكون على المحاور الرئيسية بالنسبة للمقاطع المستطيلة أو من شكل حرف I أو المقاطع المشابهة تصبح لدينا العلاقة السابقة كما يلي :

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \dfrac{|M_x|}{W_x} + \dfrac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_{\min} = -\dfrac{|M_x|}{W_x} - \dfrac{|M_y|}{W_y} \end{cases} \qquad \text{..........................(09)}$$

وبالتالي : $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$

حيث : W_x و W_y هي عزوم المقاومة للمقطع بالنسبة للمحاور x و y.

2- الإنحناء المركب: (Flexion composée)

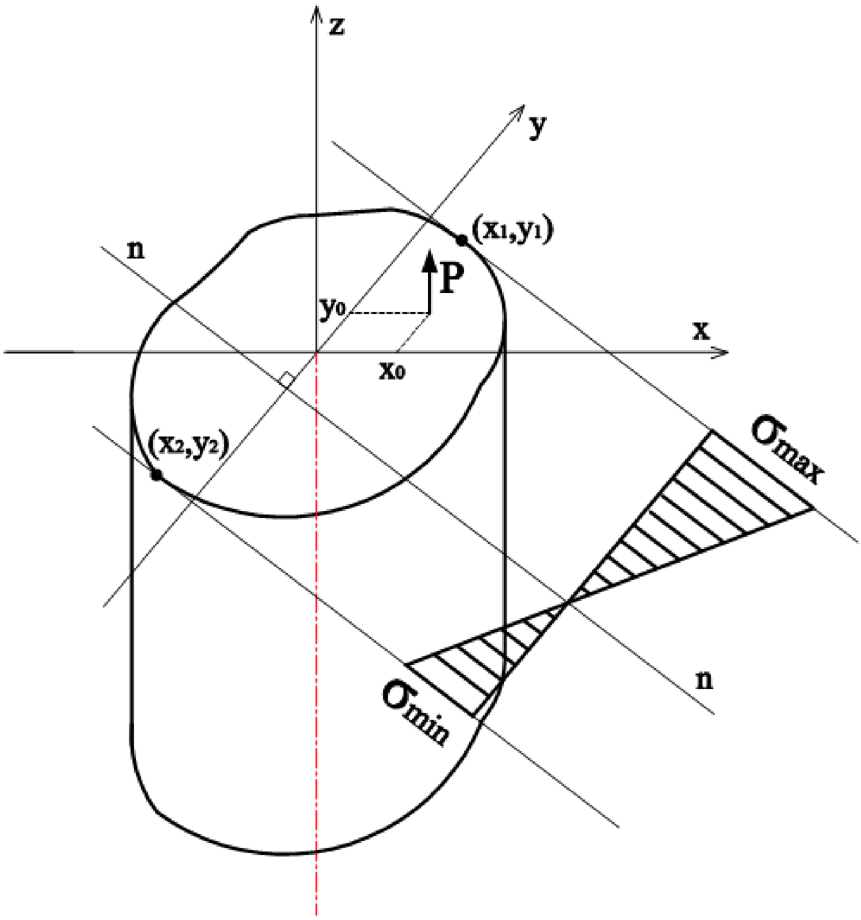
2-1- تعريف: حاله الإنحناء المركب هي حالة الشد أو الضغط اللامركزي وهي تكافئ حالة الشد والضغط المركزي مضاف إليه إنحناء منحرف

2-2- الإجهادات الناظمية بالنسبة للإنحناء المنحرف

(Contraintes normales en flexion composée)

الإجهاد الناظمي المؤثر في أي نقطة من نقاط المقطع العرض يتعين في بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad \text{.......................................(10)}$$



وبالتالي :

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P.y_0}{I_x} y + \frac{P.x_0}{I_y} x \qquad \text{.......................................(11)}$$

حيث :

A : مساحة المقطع العرضي

N_z : القوة الناظمية

M_y و M_x : عزما الإنحناء بالنسبة للمحاور الرئيسية x و y.

y_0 و x_0 : إحداثيات التأثير القوة اللامركزية P.

2-3- معادلة الخط المحايد nn :

تتعين بتعويض $\sigma = 0$.

$$\frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{\mathrm{P}}{A} + \frac{\mathrm{P}.y_0}{I_x} y + \frac{\mathrm{P}.x_0}{I_y} x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

2-4- ملاحظات:

1. من معادلة الخط المحايد نلاحظ أن الخط المحايد لا يمر بمركز ثقل المقطع.
2. في كافه العلاقة السابقة (12) تعتبر العزوم M_x و M_y موجبة إذا كانت تخلق إجهاد شد في نقاط الربع الأول من المقطع أما N_z فتعتبر موجبة إذا كانت قوة شد.

2-5- الإجهادات الناظمية الأعظمية للشد و للضغط

تتعين بالعلاقة الأساسية (12) بعد تعويض إحداثيات (x_1, y_1, x_2, y_2) التي هي نقاط التماس لمحيط المقطع مع المستقيمات الموازية للخط المحايد :

$$\begin{cases} \sigma \max = \dfrac{N_z}{A} + \dfrac{M_x}{I_x} y_1 + \dfrac{M_y}{I_y} x_1 \\ \sigma \min = \dfrac{N_z}{A} + \dfrac{M_x}{I_x} y_2 + \dfrac{M_y}{I_y} x_2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

بالنسبة للمقاطع المستطيلة أو من شكل حرف I أو المقاطع المشابهة تظهر الإجهادات الناظمية الأعظمية للشد و للضغط في النقاط الأكثر بعدا عن المحاور الرئيسية للعطالة و تساوي:

$$\begin{cases} \sigma \max = \dfrac{N_z}{A} + \dfrac{|M_x|}{W_x} + \dfrac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma \min = \dfrac{N_z}{A} - \dfrac{|M_x|}{W_x} - \dfrac{|M_y|}{W_y} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

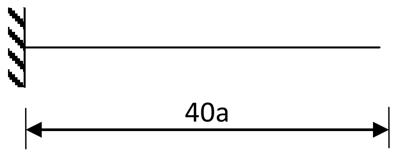
التأثيرات المركبة

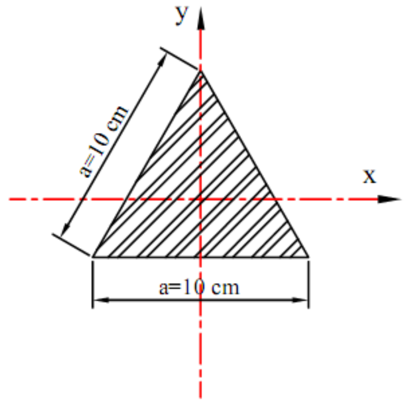
Sollicitations composée

التمرين 01 :

عين قيمة الاجهاد الناظمي الأعظمي للشد و الضغط في المقطع العرضي الخطير للرافدة.

حيث: $\gamma=7.8\ g/cm^3$

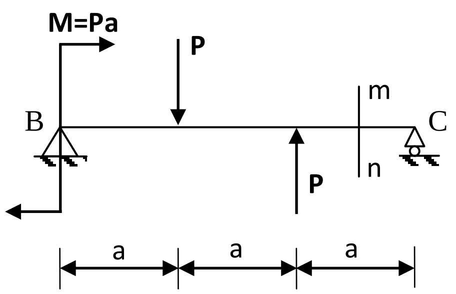


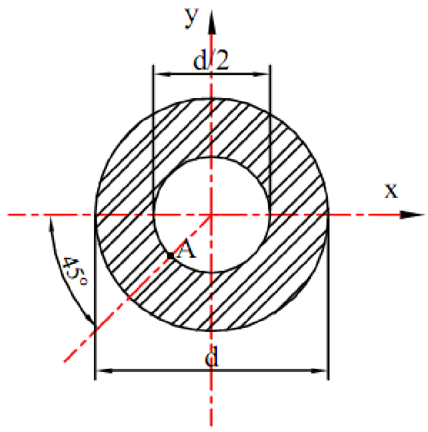


التمرين 02 :

عين قيمة الاجهاد الناظمي في النقطة A من المقطع العرضي الخطير للرافدة ($\sigma_{A\ max}$) .

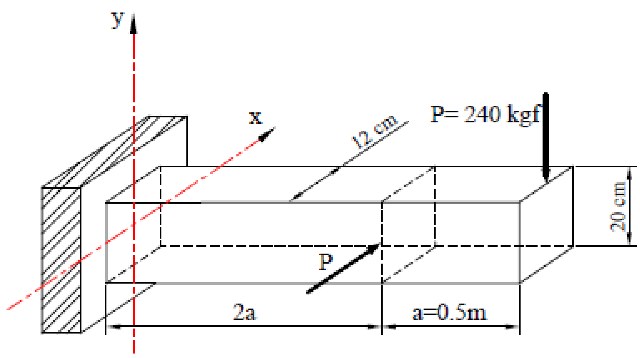
و كذلك الاجهاد الناظمي في النقطة A من المقطع العرض mn ($\sigma_{A\ mn}$) .





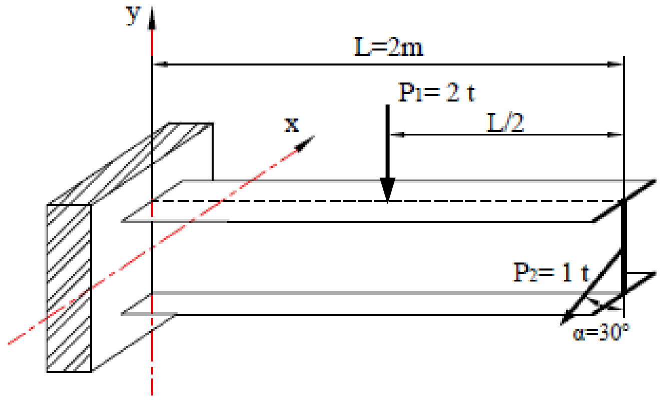
التمرين 03 :

عين قيمة الاجهاد الناظمي الأعظمي σ_{max} و وضعية الخط المحايد في المقطع العرضي الخطير للرافدة.



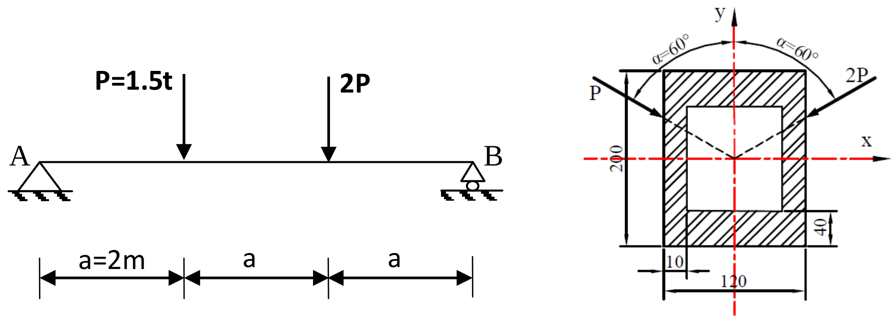
التمرين 04 :

عين قيمة الاجهاد الناظمي الأعظمي σ_{max} و وضعية الخط المحايد في المقطع العرضي الخطير للرافدة.



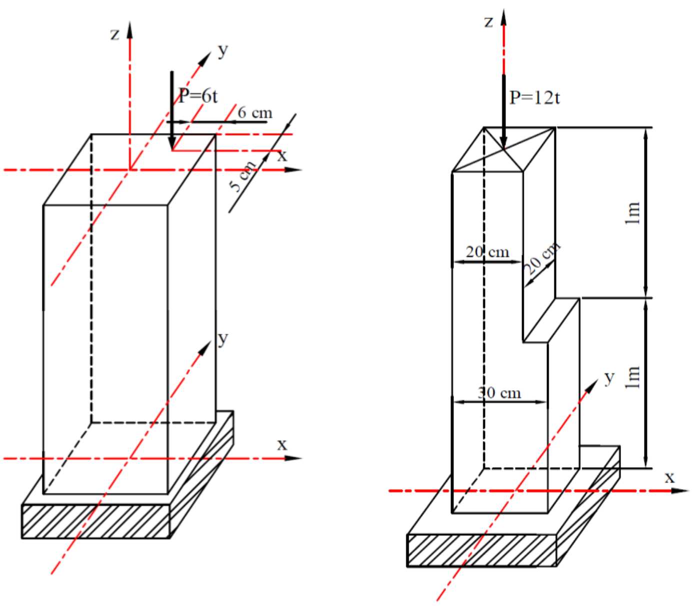
التمرين 05 :

عين قيمة الاجهاد الناظمي الأعظمي σ_{max} و وضعية الخط المحايد في المقطع العرضي الخطير للرافدة.



التمرين 06 :

عين قيمة الاجهادات الناظمية الأعظمية للشد σ_{max} و الضغط σ_{min} و وضعية الخط المحايد في المقطع العرضي الخطير بالنسبة للحالتين a وb.



(a) (b)

حساب التشوهات وطرق الطاقة

Calcul des déformations et méthodes énergétiques

1- مقدمة

تحتها تأثير القوى الخارجية كل الإنشاءات تتعرض للتشوهات الناتجة عن قابلية المادة المكونة للإنشاء على التشوه.

وبالتالي المنشأ ينتقل من الوضع الابتدائي (وضع توازن غير مشوه) إلى وضع آخر (وضع توازن مشوه) وعليه فإن حساب التشوهات عند كل نقطة من نقاط المنشأ له أهمية للمهندس من حيث الجانب النظري والعملي.

- أما الجانب النظري فيتلخص في كون هذه التشوهات تساعد وتعطي الإمكانية لحساب الإنشاءات الغير مقررة ستاتيكيا (هي المنشات التي لا يمكن حلها بواسطة معادلات التوازن إلا بعد الاستفادة من معادلات التشوهات).
- أما الجانب العملي فيتلخص في أن الاستخدام الأمثل للإنشاء يتطلب أو يفرض أن لا يتجاوز التشوه أو التشوهات في الإنشاء قيم حدية معلومة (والتي نعبر عنها بشرط الصلابة) وليس الاكتفاء بشرط المقاومة (حيث أن الإجهاد الأعظمي في المقطع الخطير لا يتجاوز الحد المسموح به).

2- فرضيات حساب التشوهات:

في حساب التشوهات نفترض أن المادة المكونة للإنشاء والقوى المسلطة عليه متوفرة على كل فرضيات مقاومة المواد في ما يلي:

- إعتبار المادة متجانس (Homogène) و متماثلة التكوين (Isotrope).
- إعتبار مادة المنشأ المرنة (Elastique).
- إعتبار التشوهات الضعيفة بالمقارنة مع الأبعاد الهندسية للمنشأ (la petitesse des déformations).
- فرضية المقاطع المستوية (Navier-Bernoulli).
- العلاقة الخطية ما بين الإجهاد والتشوه (Loi de Hooke) $\sigma = E.\varepsilon$.

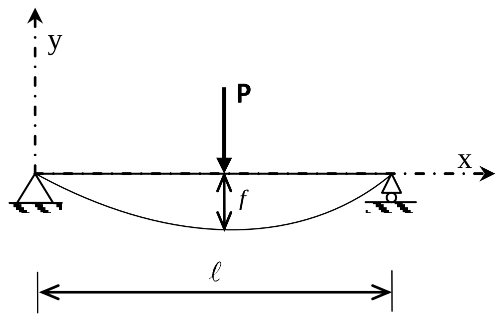
3- طريقة الطاقة لحساب التشوهات:

نظريه حفظ الطاقة في كل مراحل التشوه تنص على أن العمل الميكانيكي للقوى الخارجية يساوي العمل الميكانيكي للقوى الداخلية أو بعبارة أخرى ما دامت الحمولة لا تخرج من المجال المرن فان العمل الميكانيكي للقوى الخارجية يتحول كليا إلى طاقه كامنة (العمل الميكانيكي للقوى الداخلية في المنشأ المشوه).

وهذه الحقيقة نلاحظها عمليا في ما يلي:

إذا حملنا رافدة بمجموعة من القوى الخارجية تتعرض هذه الأخيرة إلى التشوه وبتالي نقاط تطبيق القوى تتغير بمعناه أن القوى الخارجية تنجز عمل ميكانيكي حيث أن هذا العمل الميكانيكي يتخزن بالرافدة وهذا الذي يفسر عوده الرافدة إلى وضعها الطبيعي الابتدائي الغير مشوه إذا أزيلت القوى الخارجية المسلطة عليها.

4- العمل الميكانيكي للقوى الخارجية :



عند الازدياد القوة P بشكل تدريجي يتبعها زيادة في السهم **(** f **)** بشكل تدريجي تناسبي مع قيمة P .

وبالتالي من اجل المرور من الحالة **(**λ**)** إلى الحال **(**$\lambda + d\lambda$**)**.

بعد إهمال المقادير الصغيرة نجد:

$$dT^{e} = f.P.\lambda d\lambda$$

لأجل الانتقال من الوضع الابتدائي 0 إلى الوضع النهائي 1:

$$T = \int_0^1 f.P.\lambda d\lambda = f.P.\left.\frac{\lambda^2}{2}\right|_0^1$$

$$T = \frac{1}{2} f.P \qquad ....(15)$$

وإذا كانت القوة فجائية فالعمل المنجز هو :

$$T = P.f \qquad ....(16)$$

في حالة وجود قوى متنوعة فإن العمل المنجز من الانتقال من الوضع الابتدائي إلى الوضع النهائي هو :

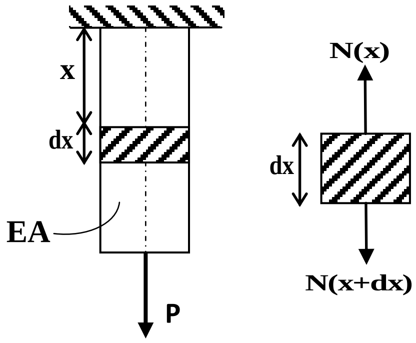
$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} P_i.f_i + \sum_{j=1}^{n} P_j.f_j \qquad ....(17)$$

4-1- ملاحظة:

1. السهم دوما يكون في اتجاه حامل القوة.
2. العمل الناتج عن ردود الأفعال لا يؤخذ بعين الاعتبار بسبب الانتقالات المعدومة على مستوى المساند.

5- العمل الميكانيكي للقوى الداخلية :

5-1- القوى الناظمية N_z **:**



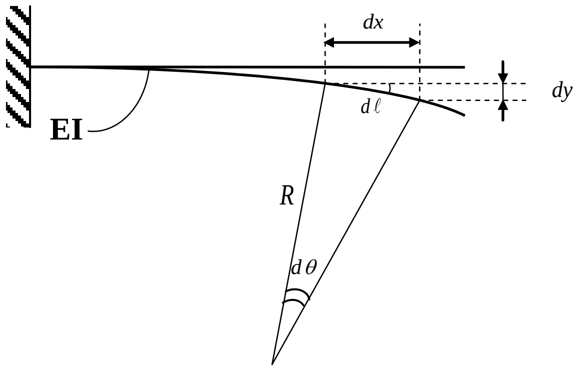
الجزء المقتطع سوف يتعرض إلى إنتقال مقداره $d\delta$

$$d\delta = \frac{N\ dx}{E\ A}$$

$$dT^N = \frac{1}{2} N\ d\delta = \frac{1}{2} N\ \frac{N\ dx}{E\ A}$$

$$T^N = \int \frac{N^2}{E.A}\ dx \quad ....(18)$$

5-2- العزوم M **:**



$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E.I} \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{d\ell}$$

حيث : $\frac{1}{R}$ يمثل درجة التقوس (la courbure)

$$\text{tg } \theta = \frac{dy}{d\ell} \simeq \theta \; ; d\ell = dx$$

$$\theta = \frac{dy}{d\ell} = \frac{dy}{dx} \; ; \; \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

$$y'' = \frac{M}{E.I} \quad ....(19)$$

المعادلة التفاضلية للتشوه (Equation différentielle de la ligne élastique)

$$dT^M = \frac{1}{2} M \; d\theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = y'' = \frac{M}{E.I}$$

$$dT^M = \frac{1}{2} M \; \frac{M}{E.I} \; dx = \frac{M^2}{2E.I} dx$$

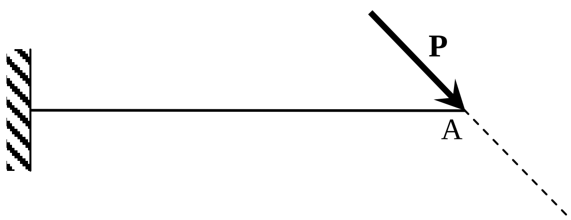
$$T^M = \int \frac{M^2}{2E.I} dx \quad ....(20)$$

3-5- ملاحظة :

لقد تم إهمال العمل الناتجة عن قوى القص بسبب ضعفه.

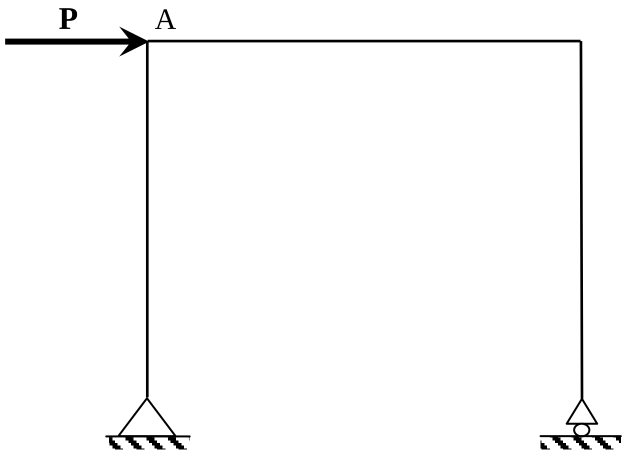
6- مجال تطبيق نظرية الطاقة :

إن مجال تطبيق نظريه الطاقة محدود جدًا فهو لا يعطينا الإمكانية لحساب الإزاحة في أي إتجاه الذي نشاء بل حساب الإزاحة يكون فقط عند نقطة تطبيق القوة وفي إتجاه القوة فمثلا الشكل (a) لا نرى فيه أي امكانية لحساب الإزاحة إلا عند النقطة A واتجاه لقوة.



الشكل (a)

كذلك هو نفس الشيء بالنسبه للشكل (b).



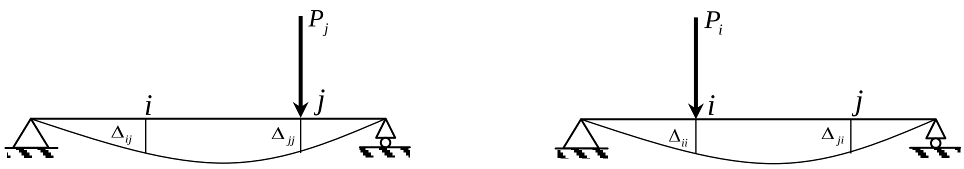
الشكل (b)

وبالتالي فلابد من البحث عن بدائل أخرى حيث نعمم فيها طريقه الطاقة.

7- نظرية Betti (Théorème de Betti) :

العمل الميكانيكي الناتج عن قوة P_i من أجل إنتقال الناتج عن قوة P_j يساوي العمل الميكانيكي الناتج عن القوة P_j من أجل انتقال ناتج القوة P_i.

$$P_j \ \Delta_{ji} = P_i \ \Delta_{ij} \qquad \text{.....................................(21)}$$



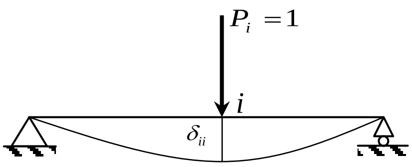
حيث:

Δ_{ii} : القيمة الجبرية للإزاحة عند النقطة (i) تحت تأثير القوة P_i.

Δ_{ij} : القيمة الجبرية للإزاحة عند النقطة (i) تحت تأثير القوة P_j.

Δ_i : القيمة الجبرية للإزاحة عند النقطة (i) تحت تأثير كل القوى.

8- نظرية Maxwell (Théorème de Maxwell) :



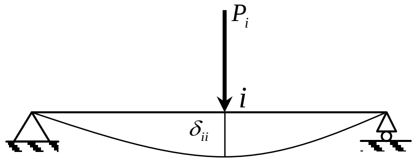
حيث :

δ_{ii} : هي الإنتقال المرافق لقوة الوحدة (déplacement du à une charge unitaire).

$$\text{Betti} \quad \rightarrow \quad P_i = P_j \quad \Rightarrow \quad \Delta_{ji} = \Delta_{ij}$$
$$P_i = P_j = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_{ji} = \delta_{ij}$$

الإنتقال الناتج في النقطة (i) بسبب قوة واحدية مطبقة النقطة (j) يساوي الى الإنتقال في النقطة (j) الناتج عن قوة واحدية (قوة الوحدة) مطبقة في النقطة (i).

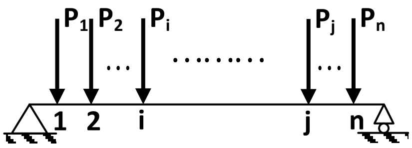
9- النظرية العامة لحساب الإنتقال :



$$\Delta_{ii} = P_i \,.\, \delta_{ii}$$
$$\Delta_{ij} = P_j \,.\, \delta_{ij}$$

وبالتالي القيمة الجبرية للإزاحة تساوي إلى القوة ضرب الإنتقال المرافق لقوة الوحدة.

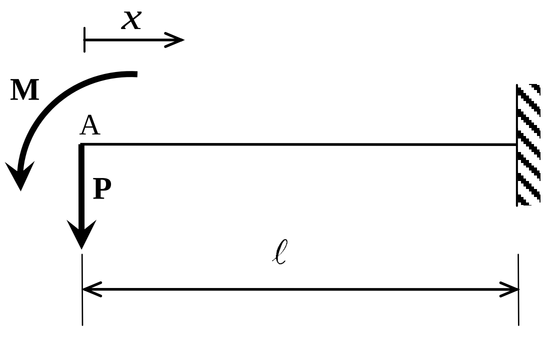
10- نظرية كاستيليانو (Theoreme de Castigliano) :



$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

وبتالي نظرية كاستيليانو (Castigliano) تنص على أن مشتقة الطاقة بالنسبة لأي قوة هي بمثابة القيمة الجبرية للإنتقال في اتجاه تلك القوة.

تطبيق :



بواسطة طريقة Castigliano أحسب الإنتقال الشاقولي والإنتقال الدوراني عند A $(\Delta_A ; \theta_A)$.

$$\Delta_A = \frac{\partial W}{\partial P} \;;\; \theta_A = \frac{\partial W}{\partial M} \;;\; W = \int_0^{\ell} \frac{M^2(x)}{2E.I}\, dx$$

$$\Delta_A = ?$$

$$\Delta_A = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P}$$

$$\Delta_A = \int_0^{\ell} \frac{M(x)}{E.I} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx = \frac{1}{E.I} \int_0^{\ell} -(M + Px).(-x)\, dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{E.I}\left[\frac{M.x^2}{2} + \frac{P.x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{M.\ell^2}{2EI} + \frac{P.\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_A = ?$$

$$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M}$$

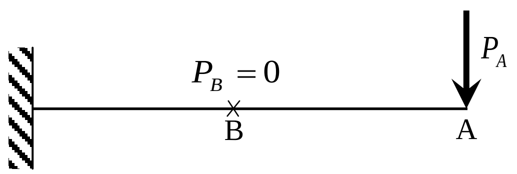
$$\theta_A = \int_0^{\ell} \frac{M(x)}{E.I} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx = \frac{1}{E.I} \int_0^{\ell} -(M + Px).(-1)\, dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{E.I}\left[M.x + \frac{P.x^2}{2}\right]_0^{\ell}$$

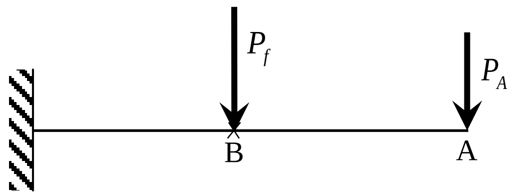
$$\theta_A = \frac{M.\ell}{EI} + \frac{P.\ell^2}{2EI}$$

Erreur ! Signet non défini.

لأجل تعميم نظرية كاستيليانو أي بمعنى حساب الإنتقال في أي نقطة كانت حيث توجد القوة المركزة في هذه النقطة أو لا توجد فإن وجدت القوة المركزة فإن الأمر سهل نقوم بتطبيق العلاقة $\Delta_A = \dfrac{\partial W}{\partial P_A}$.



أما في حالة إنعدام القوة المركزة فمثلا في النقطة B نحدث قوة خيالية (P_f)، نحسب مقدار الطاقة بدلالة القوة الخيالية والقوى المطبقة في نقاط أخرى ، ثم نشق بالنسبة للقوة الخيالية وبعد الاشتقاق نساوي هذه القوة الخيالية بالصفر فتكون النتيجة هي القيمة الحقيقية للإنتقال عند النقطة B.



$$\Delta_B = \left(\frac{\partial W}{\partial P_f}\right)_{P_f = 0} \quad \text{...(23)}$$

11- نظرية مور (Theoreme de Mohr) " قوة الوحدة " :

إنطلاقا من نظرية كاستيليانو (Castigliano) نجد :

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$$

$$W=\int_0^{\ell} \frac{M^2(x)}{2E.I}\,dx$$

$M = P$ الإنـ تـقا ل

$\dfrac{\partial M}{\partial P} =$ الإنـ تـقا ل

$\overline{M} =$ الإنـ تـقا ل

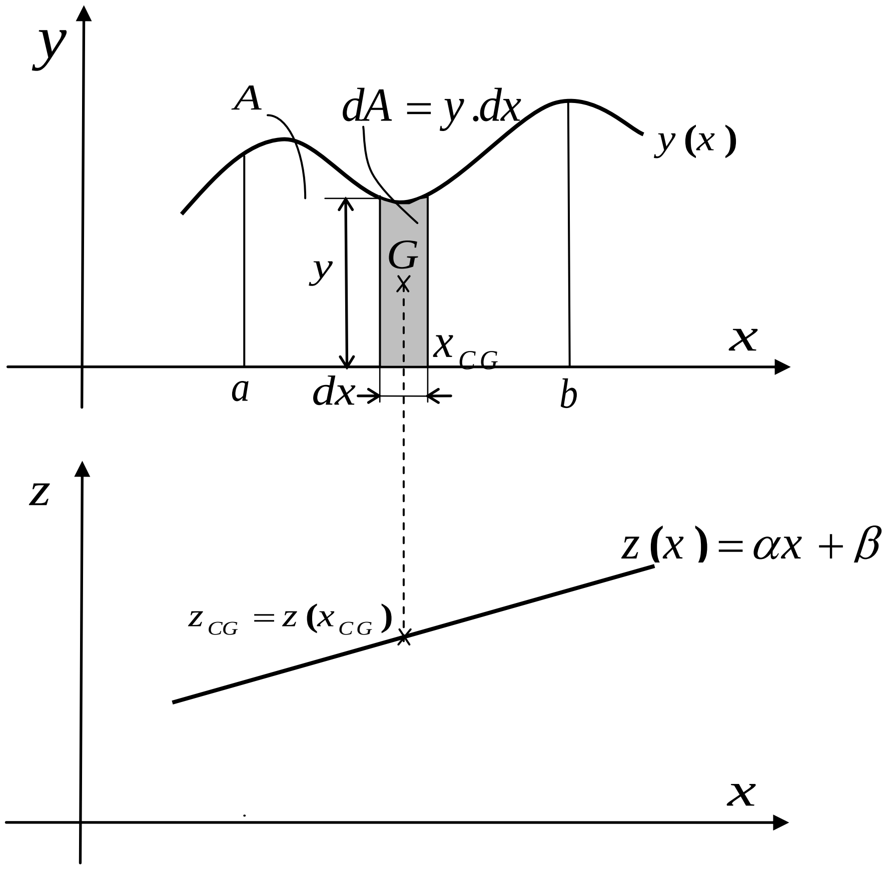
$$\overline{M} = \frac{\partial M}{\partial P}$$

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{2EI}\int \frac{\partial M^2}{\partial M}.\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$

$$\Delta = \int \frac{M\,\overline{M}}{E.I}\,dx \text{ ....(24)}$$

إن المتمعن في هذه العلاقة يجب أن لديها خصوصية معينة تتمثل في كون أنها تكامل لجداء دالتين M و $\overline{M}$ حيث أن M درجتها (n) في حين أن $\overline{M}$ هي دالة خطية وقد إستغل العالم (Verechaguine) هذه الوضعية لصياغة الطريقة التخطيطية لحل تكامل مور (Mohr).

10- طريقة (Verechaguine) لحل تكامل (Mohr) :



$$\int_a^b y.z\ dx \quad ; \quad x_{CG} = \frac{S_y}{A}$$

$$dA = y.dx \quad \text{et} \quad z(x) = \alpha x + \beta$$

$$\int_a^b y.z\ dx = \int_a^b (\alpha x + \beta)\ dA$$

$$= \alpha \int_a^b x.dA + \int_a^b \beta.dA$$

$$= \alpha S_y + \beta.A$$

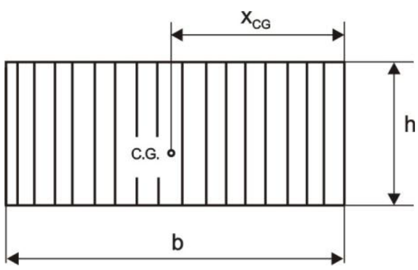
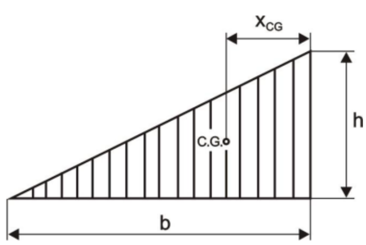
$$= \alpha.x_{CG}.A + \beta.A$$

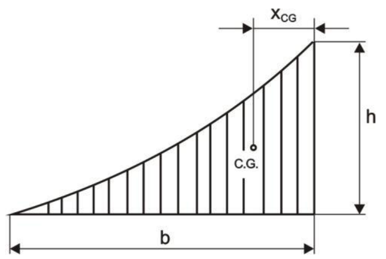
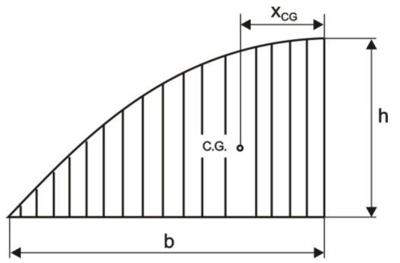
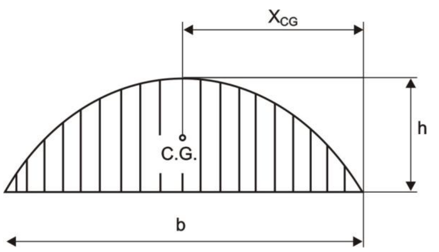
$$= A(\alpha.x_{CG} + \beta)$$

$$= \mathrm{A.z_{CG}}$$

و بالتالي حسب (Verechaguine) فإن قيمة التكامل $\int M\bar{M}\,.dx$ يساوي إلى جداء مساحة مخطط M مضروب في ترتيبية مركز ثقل M على مخطط $\overline{M}$.

ومن أجل تسريع حساب تكامل مور بطريقة (Verechaguine) نستخدم الجدول التالي الذي يوضح بعض المخططات المشهورة مع قيم مساحتها وكذا المسافة حتى مركز ثقلها بالنسبة للمحور x (x_{CG}).

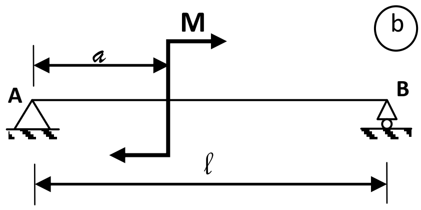
N^{o}	Forme du diagramme	Aires du diagramme	x_{CG}
01		$A = b.h$	$x_{CG} = \frac{b}{2}$
02		$A = \frac{b.h}{2}$	$x_{CG} = \frac{b}{3}$

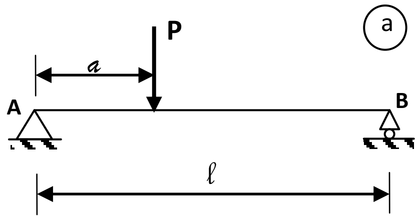
03		$A = \frac{b.h}{3}$	$x_{CG} = \frac{b}{4}$
04		$A = \frac{2b.h}{3}$	$x_{CG} = \frac{3b}{8}$
05		$A = \frac{2b.h}{3}$	$x_{CG} = \frac{b}{2}$

حساب التشوهات وطرق الطاقة

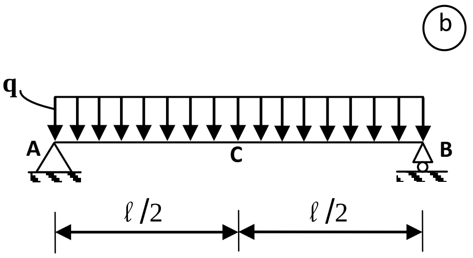
Calcul des déformations et méthodes énergétiques

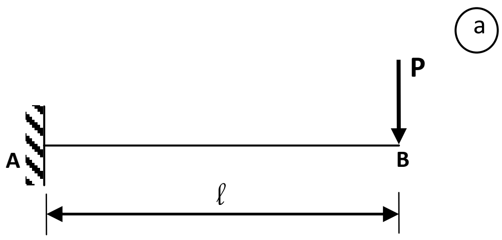
1) بواسطة طريقة الطاقة أحسب الطاقة الناتجة والانتقال الناتج عن القوى الخارجية مع العلم أن الرافدة لها عزم عطالة ثابت I .



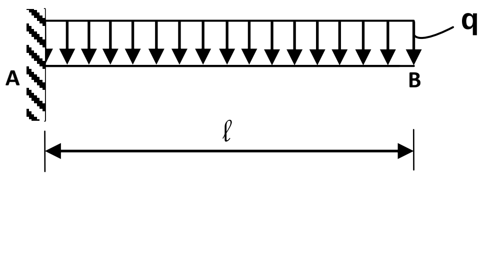


2) بواسطة طريقة Castigliano أحسب الإنتقال الشاقولي أو الإزاحة الشاقولية عند B في الحالة a
و أحسب الإنتقال الزاوي أو الإزاحة الزاوية عند C في الحالة b.

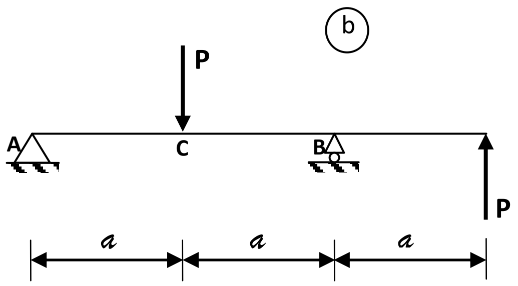


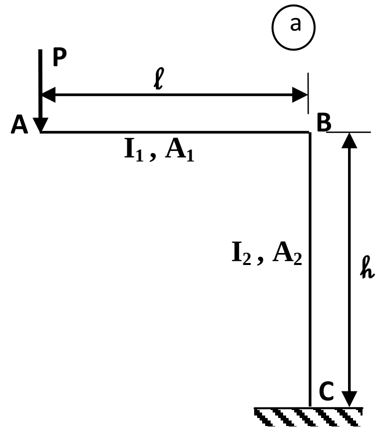


3) أحسب الإنتقال الشاقولي عند B بواسطة طريقة Castigliano و طريقة Mohr .



4) بواسطة طريقة Verechaguine أحسب الإنتقال الشاقولي عند A في الحالة a و أحسب الإنتقال الشاقولي والإنتقال الدوراني عند C في الحالة b.





حساب الروافد الغير مقرره ستاتيكيا ذات المجاز الواحد

Calcul des poutres hyperstatiques à une seule travée

1-تعريف :

نقول عن رافدة أنها غير مقررة ساتيكيا أو هيكل غير مقرر ستاتيكيا إذا كان عدد المجاهيل أكبر من عدد معادلات التوازن.

2- درجة عدم تقرير الستاتيكي :

1-2 عدد المجاهيل :

عدد المجاهيل يعطى بالعلاقة التالية: $(r+3b)$

حيث :

r :يمثل عدد ردود الأفعال (nombre des réactions d'appui)

b :عدد القضبان (nombre des barres)

2 -2عدد المعادلات :

عدد المعادلات يعطى بالعلاقة التالية : $(3n+k)$

حيث :

n :عدد العقد (nombre des nœuds)

k :عدد الشروط الاضافية (nombre des conditions supplémentaires)

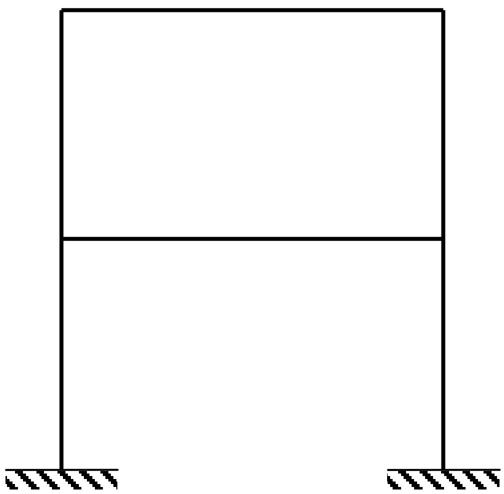
وبالتالي انطلاقا من عددالمجاهيل وعدد المعادلات لدينا ثلاث حالات للنظام

أ- الحالة الاولى : لما عدد المجاهيل يساوي لعدد المعادلات أي $(r+3b) = (3n+k)$
ومنه نقول أن الرافدة أو الهيكل مقرر ستاتيكيا (structure isostatique)

ب- الحالة الثانية : لماعدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات أي $(r+3b) \prec (3n+k)$
ومنه نقول أن الرافدة أو الهيكل غيرمستقر (structure instable)

ج- الحالة الثالثة : لماعدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات أي $(r+3b) \succ (3n+k)$
ومنه نقول أن الرافدة أو الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة h حيث : $h = (r+3b)-(3n+k)$
(structure hyperstatique)

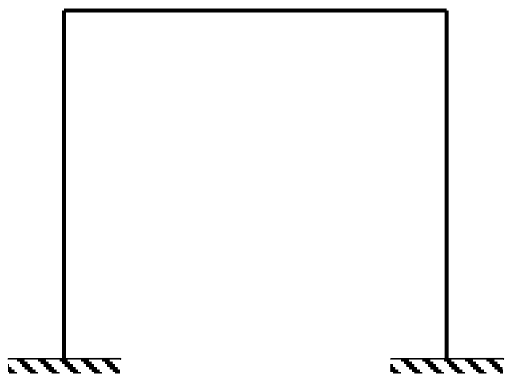
مثال01:



$$r = 6\ ;\ b = 6\ ;\ n = 6\ ;\ k = 0$$
$$h = (r+3b)-(3n+k)$$
$$h = (6+3.6)-(3.6+0)$$
$$h = 6$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة السادسة

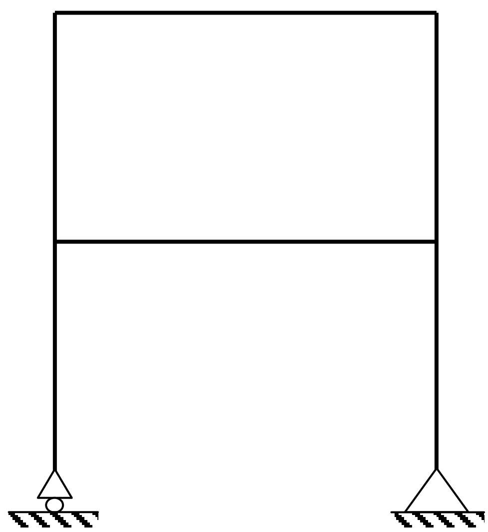
مثال02:



$$r=6\ ;\ b=3\ ;\ n=4\ ;\ k=0$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(6+3.3)-(3.4+0)$$
$$h=3$$

ومنه الهيك لغير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الثالثة

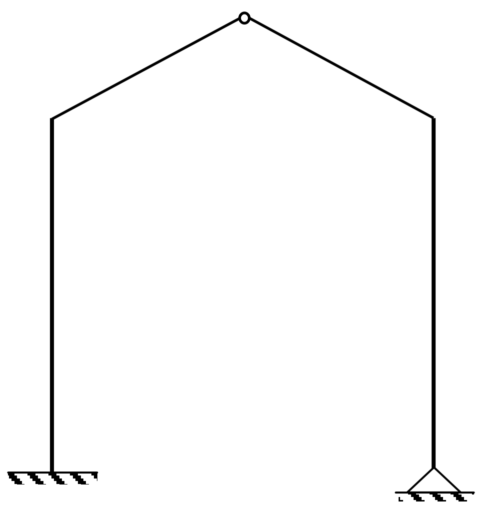
مثال03:



$$r=3\ ;\ b=6\ ;\ n=6\ ;\ k=0$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(3+3.6)-(3.6+0)$$
$$h=3$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الثالثة

مثال04:



$$r=5\ ;\ b=4\ ;\ n=5\ ;\ k=1$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(5+3.4)-(3.5+1)$$
$$h=1$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الأولى

3- طرق حل الروافد الغير مقررة ستاتيكيا :

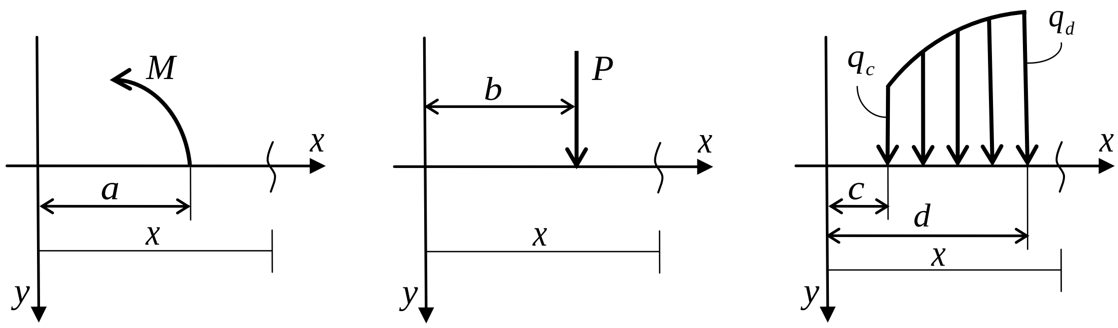
ولحل الروافد الغير مقررة ستاتيكيا نتبع الطرق التالية :

1-3- طريقة العوامل الأولية (méthode des paramètres initiaux) :

طريقة العوامل الأولية تعتمد على مبدأ عدم استمرارية الدالة من أجل تحديد علاقة عزوم الإنحناء في رافدة متكونة من عدة مقاطع. بأخذ العوامل الأولية للإنتقال الشاقولي y_0 و للإنتقال للدوراني θ_0 وذلك مع أخذ المبدأ على مستوى الطرف الأيسر للروافدة تعطى العلاقات $\theta(x)$ و $y(x)$ بواسطة طريقة العوامل الأولية كما يلي :

$$EI\,\theta(x) = EI\,\theta_0 + \sum M\,\frac{(x-a)}{1!} + \sum P\,\frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c\,\frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d\,\frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q_c'\,\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d'\,\frac{(x-d)^4}{4!} + \dots; \qquad (25)$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\,\theta_0\,\frac{x}{1!} + \sum M\,\frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P\,\frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c\,\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d\,\frac{(x-d)^4}{4!} + \sum q_c'\,\frac{(x-c)^5}{5!} - \sum q_d'\,\frac{(x-d)^5}{5!} + \dots, \qquad (26)$$



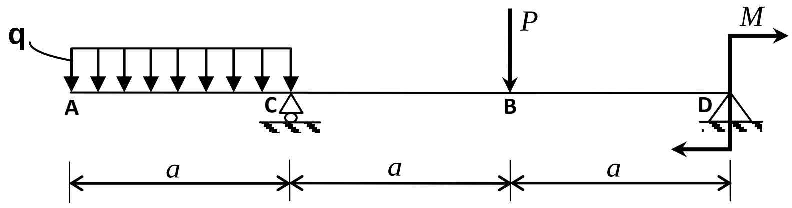
أين:

- I : يمثل عزم العطالة للمقطع بالنسبة للمحور z .
- M : عزم انحناء مركز.
- a : البعد ما بين المبدأ ونقطة تطبيق العزم المركز.
- P : تمثل قوة مركزة وكذلك تعبر عن ردود الأفعال.
- b : البعد ما بين المبدأ ونقطة تطبيق القوة المركزة.
- q_c, q_d : تعبر على التوالي على شدة الحمولة الموزعة في البداية والنهاية.
- q_c', q_d' : تعبر على مشتق الحمولة الموزعة في النقاط $(x=c)$ و $(x=d)$.

مثال :

بواسطة طريقة العوامل الأولية أحسب الإزاحة الشاقولية عند B والإزاحات الدورانية عند المساند (C , D).

حيث لدينا : $P = 4qa \;,\; M = qa^2$



1. حساب ردود الأفعال :

$$\sum F_x = 0 \qquad H_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad V_C + V_D = q.a + P \qquad V_C + V_D = 5q.a$$

$$\sum M_{/B} = 0 \qquad V_C.2a - q.a\,\frac{5}{2}a - qa.a + qa^2 = 0$$

وبالتالي :

$$V_C = \frac{11}{4}qa \quad ; \quad V_D = \frac{9}{4}qa$$

2. حساب الإزاحات :

$$EI\,\theta(x) = EI\,\theta_0 + q\,\frac{(x-0)^3}{3!} - q\,\frac{(x-a)^3}{3!} - V_C\,\frac{(x-a)^2}{2!} + P\,\frac{(x-2a)^2}{2!}$$

$$= EI\,\theta_0 + q\,\frac{x^3}{6} - q\,\frac{(x-a)^3}{6} - \frac{11}{4}qa\,\frac{(x-a)^2}{2} + 4qa\,\frac{(x-2a)^2}{2}$$

$$EIy(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{EIy_0 + EI\,\theta_0 x + q\,\frac{x^4}{24}}_{I} - q\,\frac{(x-a)^4}{24} - \frac{11}{4}qa\,\frac{(x-a)^3}{6}}_{II} + 4qa\,\frac{(x-2a)^3}{6}}_{III}$$

حيث لدينا المقاطع :

$$I : \quad 0 \le x \le a$$

$$II : \quad a \le x \le 2a$$

$$III : \quad 2a \le x \le 3a$$

$$EIy(x=a) = 0 \longrightarrow EIy(x=a) = EIy_0 + EI\,\theta_0 a + \frac{qa^4}{24} = 0$$

$$EIy(x=3a)=0 \longrightarrow EIy(x=3a)=EIy_0+EI\,\theta_0 3a+\frac{81}{24}qa^4-\frac{16}{24}qa^4-\frac{88}{24}qa^4+\frac{2}{3}qa^4=0$$

$$\begin{cases} EIy_0+EI\,\theta_0 a+\dfrac{qa^4}{24}=0 \\ EIy_0+3EI\,\theta_0 a+\dfrac{81}{24}qa^4-\dfrac{16}{24}qa^4-\dfrac{88}{24}qa^4+\dfrac{2}{3}qa^4=0 \end{cases}$$

$$2EI\,\theta_0 a-\frac{8}{24}qa^4=0 \longrightarrow \theta_0=\frac{qa^3}{6EI}$$

وبالتعويض نجد :

$$EIy_0+\frac{qa^4}{6}+\frac{qa^4}{24}=0 \longrightarrow y_0=-\frac{5}{24}\frac{qa^4}{EI}$$

وبتالي يمكننا كتابة معادلات الازاحة الشاقولية والدورانية بالنسبة لجميع مقاطع الرافدة من الشكل التالي :

$$EI\,\theta(x)=\frac{qa^3}{6}+q\frac{x^3}{6}\Bigg|_{0\le x\le a}-q\frac{(x-a)^3}{6}-\frac{11}{8}qa(x-a)^2\Bigg|_{a\le x\le 2a}+2qa(x-2a)^2\Bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

$$EIy(x)=-\frac{5}{24}qa^4+\frac{qa^3}{6}x+q\frac{x^4}{24}\Bigg|_{0\le x\le a}-q\frac{(x-a)^4}{24}-\frac{11}{24}qa(x-a)^3\Bigg|_{a\le x\le 2a}+\frac{2}{3}qa(x-2a)^3\Bigg|_{2a\le x\le 3a}$$

ومنه يمكن حساب الإزاحات الشاقولية والدورانية عند B و عند المساند:

$$EI\,\theta(x=a)=EI\,\theta_a=\frac{qa^3}{6}+q\frac{a^3}{6} \longrightarrow \theta_a=\frac{qa^3}{3EI}$$

$$EI\,\theta(x=3a)=EI\,\theta_{3a}=\frac{qa^3}{6}+q\frac{27a^3}{6}-q\frac{8a^3}{6}-\frac{11}{8}qa.4a^2+2qa.a^2$$

$$=(\frac{1}{6}+\frac{27}{6}-\frac{8}{6}-\frac{44}{8}+2)qa^3$$

$$EI\,\theta_{3a}=-\frac{qa^3}{6} \longrightarrow \theta_{3a}=-\frac{qa^3}{6EI}$$

$$EIy(x=2a)=EIy_{2a}=-\frac{5}{24}qa^4+\frac{qa^3}{6}.2a+q\frac{16a^4}{24}-q\frac{a^4}{24}-\frac{11}{24}qa.a^3$$

$$=(-\frac{5}{24}+\frac{2}{6}+\frac{16}{24}-\frac{1}{24}-\frac{11}{24})qa^4$$

$$EIy_{2a}=\frac{7}{24}qa^4 \longrightarrow y_{2a}=\frac{7}{24}\frac{qa^4}{EI}$$

2-3- طريقة الرافدة التخيلية (la méthode de la poutre fictive) :

من أجل رافدة معطاة نقوم برسم مخطط عزوم الإنحناء ثم إعتبار هذا المخطط عبارة عن حمولة موزعة بانتظام للرافدة التخيلية. لحساب الإزاحات الدورانية أو الإنتقالات الدورانية من أجل أي مقطع من مقاطع الرافدة الحقيقية المعطاة نقوم بقسمة قوة القص من أجل نفس المقطع في الرافدة التخيلية $T_f(x)$ على الثابت EI الخاص بالرافدة الحقيقية حسب العلاقة التالية :

$$\theta(x) = \frac{T_f(x)}{EI} \qquad \text{.................................(27)}$$

ومن أجل حساب الإزاحات الشاقولية أو الإنتقالات الدورانية في أي مقطع من مقاطع الرافدة الحقيقية المعطاة نقوم بقسمة عزم الإنحناء من أجل نفس المقطع في الرافدة التخيلية $M_f(x)$ على الثابت EI الخاص بالرافدة الحقيقية حسب العلاقة التالية :

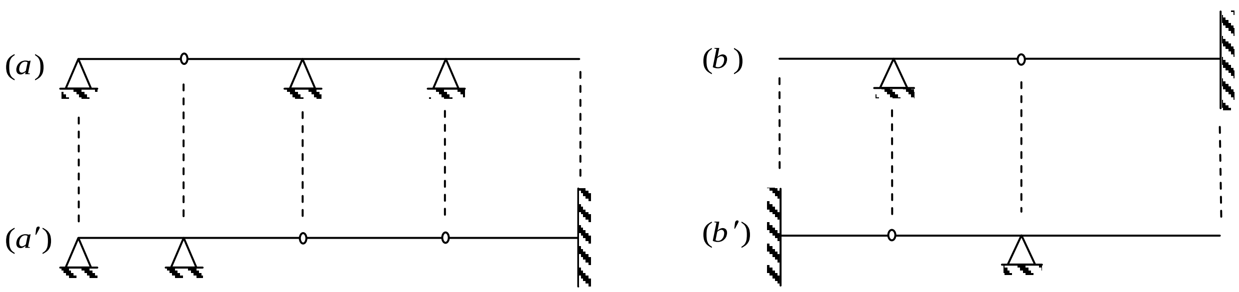
$$y(x) = \frac{M_f(x)}{EI} \qquad \text{.................................(28)}$$

وكذلك من أجل إنشاء الرافدة التخيلية الموافقة للرافدة الحقيقية المعطاة يجب إتباع القواعد التالية :

1. مسند متواجد في حواف الرافدة الحقيقية المعطاة يبقى مسند في للحواف للرافدة التخيلية.
2. مسند متواجد في وسط الرافدة الحقيقية المعطاة يصبح مفصل للرافدة التخيلية.
3. مسند وثاقة (extrémité encastrée) متواجد في حواف الرافدة الحقيقية المعطاة يصبح طرف حر (extrémité libre) في الرافدة التخيلية.
4. طرف حر متواجد في حواف الرافدة الحقيقية المعطاة يصبح مسند وثاقة في الرافدة التخيلية.
5. مفصل متواجد في الرافدة الحقيقية المعطاة يصبح مسند للرافدة التخيلية.

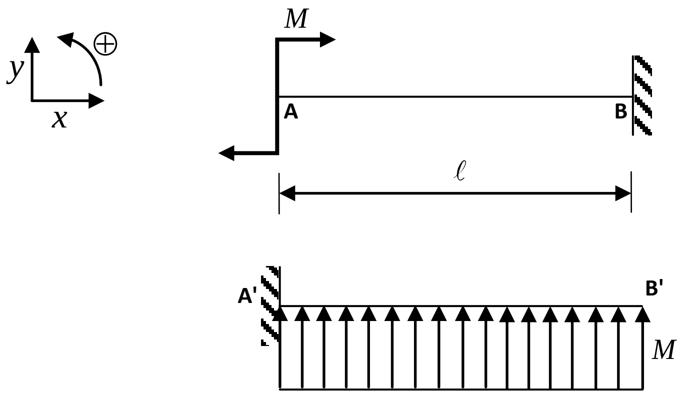
كما يمكن تلخيص كل هذه القواعد في الشكلين التاليين حيث :

- ❖ a و b تمثل الروافدة الحقيقية المعطاة.
- ❖ a' و b' تمثل الروافدة التخيلية الموافقة للروافدة الحقيقية المعطاة.



مثال 01 :

حساب الإزاحة الشاقولية و الإزاحة الدورانية عند A.



poutre réelle

poutre fictive

$$T_{A'} = -M.\ell$$

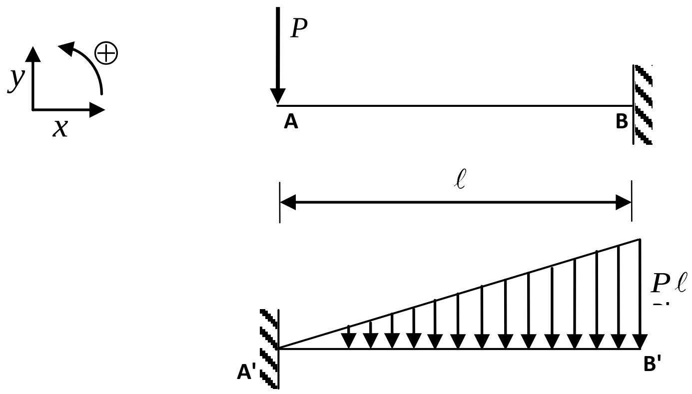
$$M_{A'} = \frac{M.\ell^2}{2}$$

$$\theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = -\frac{M\ell}{EI}$$

$$y_A = \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{M\ell^2}{2EI}$$

مثال 02 :

حساب الإزاحة الشاقولية و الإزاحة الدورانية عند A.



poutre réelle

poutre fictive

$$T_{A'} = P\ell.\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^2}{2}$$

$$M_{A'} = -P\ell.\frac{\ell}{2}.\frac{2\ell}{3} = -\frac{P\ell^3}{3}$$

$$\theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

$$y_A = \frac{M_{A'}}{EI} = -\frac{P\ell^3}{3EI}$$

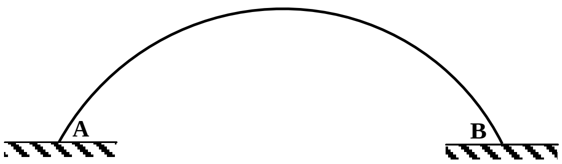
3-3- نظرية مينابرية (Théorème de Ménabrea) :

وتسمى كذلك مبدأ العمل الأقل وهي تعبر عن قيم ردود الأفعال التي تجعل الرافدة غير مقررة ساتيكيا والتي ينتج عنها أدنى طاقة داخلية.

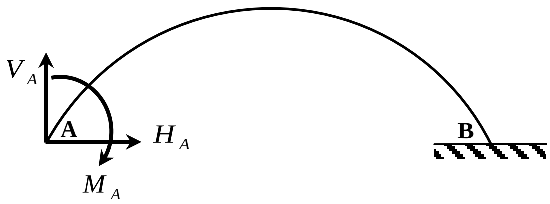
نفترض أنه لدينا رافدة من شكل قوس غير مقررة ستاتيكيا من الدرجة الثالثة الموضحة في الشكل أسفله لجعل هذه الرافدة مقررة ستاتيكيا نقوم بتحرير المسند A و بتعويض القوى المجهولة الثلاث في المسند بثلاث ردود أفعال (H_A, V_A, M_A) وهذه الرافدة المقررة ستاتيكيا نسميها بالرافدة المرافقة (la poutre isostatique associée) مع العلم أن الإنتقالات عند النقطة A في هذه الرافدة معدومة.

ومنه إنطلاقا من نظرية كاستيليانو (Castigliano) نستطيع كتابة التالي :

$$\frac{\partial W}{\partial H_A} = 0 \ , \ \frac{\partial W}{\partial V_A} = 0 \ , \ \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0 \qquad ....(29)$$



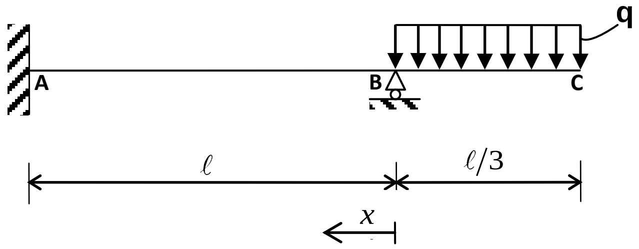
الرافدة الغير مقررة ستاتيكيا
(la poutre hyperstatique)



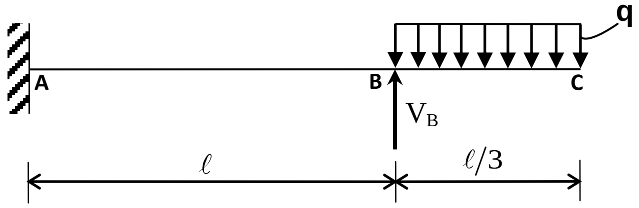
الرافدة المقررة ستاتيكيا المرافقة
(la poutre isostatique associée)

وعليه يصبح لدينا ثلاث معادلات الشيء الذي يمكننا من حساب ردود أفعال الثلاث في المسند A (H_A, V_A, M_A).

مثال :



الرافدة الغير مقررة ستاتيكيا
(la poutre hyperstatique)



الرافدة المقررة ستاتيكيا المرافقة
(la poutre isostatique associée)

$$M(x) = V_B.x - \frac{q\ell}{3}.(x + \frac{\ell}{6})$$

$$M(x) = V_B.x - \frac{q\ell}{3}.x - \frac{q\ell^2}{18}$$

$$W = \frac{1}{2EI}.\int_0^\ell M^2(x).dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial V_B} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{1}{EI}.\int_0^\ell M(x).x.dx = \frac{1}{EI}.\int_0^\ell \left(V_B.x - \frac{q\ell}{3}.x - \frac{q\ell^2}{18}\right).x.dx = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{1}{EI}\left[V_B.\frac{x^3}{3} - \frac{q\ell}{3}.\frac{x^3}{3} - \frac{q\ell^2}{18}.\frac{x^2}{2}\right]_0^\ell = 0$$

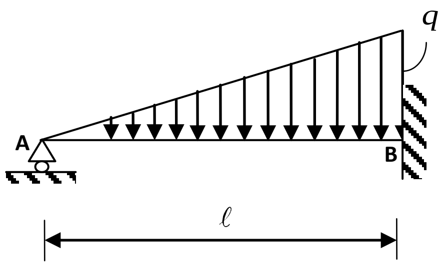
$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \left[V_B.\frac{\ell^3}{3} - \frac{q\ell^4}{9} - \frac{q\ell^4}{36}\right] = 0 \longrightarrow V_B.\frac{\ell^3}{3} = \frac{5q\ell^4}{36}$$

$$V_B = \frac{15q\ell}{36}$$

حساب الروافد الغير مقرره ستاتيكيا ذات المجاز الواحد

Calcul des poutres hyperstatiques à une seule travée

التمرين 01 :



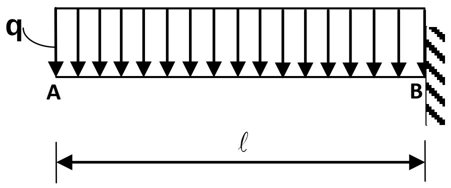
أحسب مخططات T و M لهذه الرافدة الغير مقررة ستاتيكيا بطريقة العوامل الأولية و كذلك بمبدأ العمل الأقل لمينابرية (Ménabrea).

التمرين 02 :

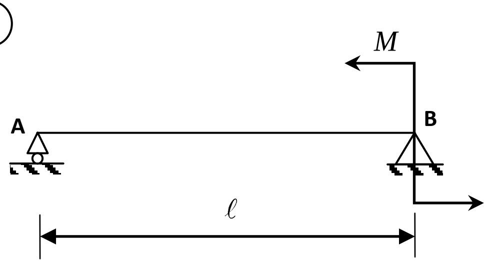
علما أن الروافد لها عزم عطالة ثابت I بواسطة طريقة الرافدة التخيلية (la méthode de la poutre fictive) أحسب الانتقالات التالية الناتجة عن القوى الخارجية :

1. حساب الإزاحة الشاقولية و الإزاحة الدورانية عند A في الحالة (a).
2. حساب الإزاحات الدورانية عند A و B و الإزاحة الشاقولية العظمى (f_{max}) في الحالة (b).
3. حساب الإزاحة الشاقولية عند منتصف الرافدة في الحالة (c).

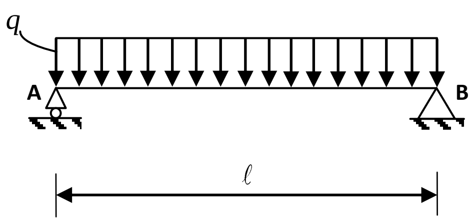
a



b



c



حساب الروافد الغير مقررة ستاتيكيا المتعددة المجازات

Calcul des poutres hyperstatiques à plusieurs travées

1- الروافد المستمرة (Poutres continues):

الروافد المستمرة هي روافد غير مقررة ستاتيكيا تستند على العديد من المساند و بعبارة أخرى تستند على عدد من المساند أكثر من اثنين و هذا النوع من الروافد يتعرض فقط للحمولات الشاقولية كما أن درجة عدم التقرير الستاتيكي لهذه الروافد تساوي إلى عدد المساند الوسطى حيث تكون هذه المساند عبارة على مساند بسيطة.

أما في حالة وجود مسند أو مسندي وثاقة طرفين (un ou deux encastrements d'extrémités) فان درجه عدم التقرير ستاتيكي تساوي إلى عدد المساند الوسطى مضاف اليه عدد المساند الموثقة.

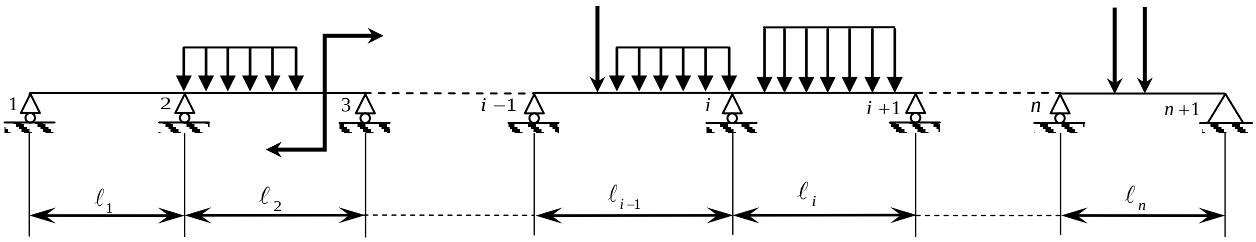
إذا أخذنا على سبيل المثال روافدة مستمرة مع مسند وثاقة طرفي واحد فتكون درجة عدم التقرير الستاتيكي تساوي إلى عدد المساند الوسطى + 01.

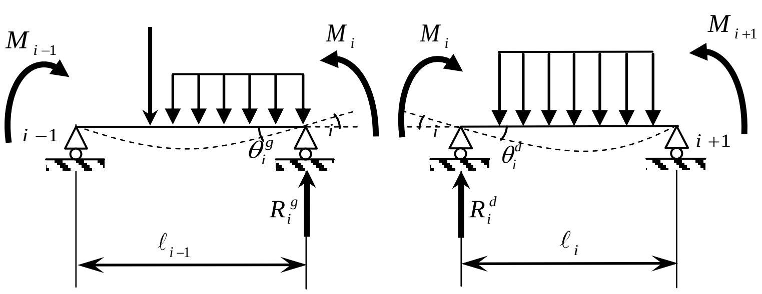
ولحساب هذه الروافد المستمرة هناك عدة طرق .

2- طريقة العزوم الثلاث (la méthode des trois moments) :

هي طريقة العزوم الثلاث أو طريقة كلابيرون (CLAPEYRON) تسمح هذه الطريقة بحساب على العزوم على مستوى للمساند الوسطى في الرافدة المستمرة.

نعتبر الرافدة المستمرة الموضحة في الشكل أسفله, حيث نقوم بتقسيم هذه الرافدة المستمرة إلى عدد من الروافد البسيطة المقررة ستاتيكيا أي أن كل الروافد تكون موضوعة على مساند بسيطة.





وبتالي نتحصل على عدد (n-1) من المعادلات على الشكل التالي :

$$M_{i-1}.\ell_{i-1} + 2M_i\,(\ell_{i-1}+\ell_i) + M_{i+1}.\ell_i = -6EI.(\theta_i^g + \theta_i^d) \qquad ....(30)$$

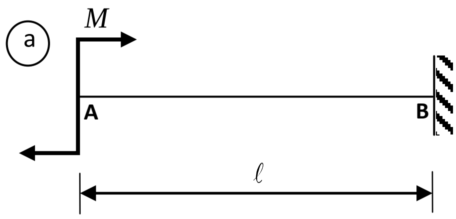
حيث :

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} : تمثل العزوم الثلاث المجهولة من أجل المساند $(i-1, i, i+1)$.

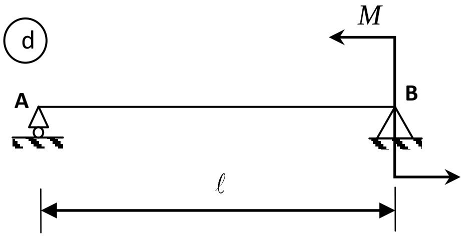
ℓ_{i-1}, ℓ_i : طول المجازات في الروافد المتجاورة.

θ_i^g, θ_i^d: الازاحة الدورانية للمسند i من جهة اليسار واليمين. و هذه الإزاحات تأخذ الإشارة الموجبة إذا كان تقوس الرافدة يأخذ نفس الإتجاه الموضح في الشكل السابق.

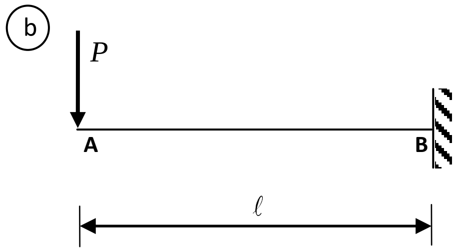
كما أن قيم الإزاحات θ_i^g و θ_i^d يمكن حسابها بأي طريقة من الطرق السابقة ويمكن كذلك تلخيص بعض الإزاحات في الروافد المقررة ستاتيكيا و المشهورة في الأشكال التالية :



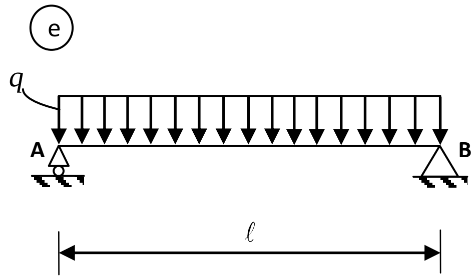
$\theta_A = -\dfrac{M\ell}{EI}$, $y_A = \dfrac{M\ell^2}{2EI}$



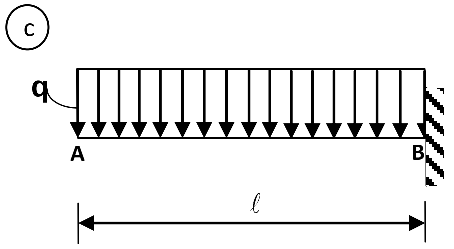
$\theta_A = -\dfrac{M\ell}{6EI}$, $\theta_B = \dfrac{M\ell}{3EI}$



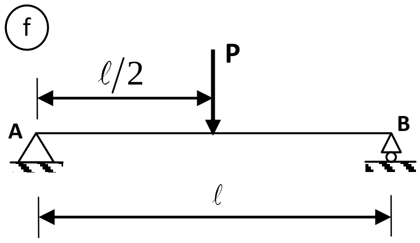
$\theta_A = \dfrac{P\ell^2}{2EI}$, $y_A = -\dfrac{P\ell^3}{3EI}$



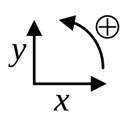
$\theta_A = -\dfrac{q\ell^3}{24EI}$, $\theta_B = \dfrac{q\ell^3}{24EI}$



$\theta_A = \dfrac{q\ell^3}{6EI}$, $y_A = -\dfrac{q\ell^4}{8EI}$



$\theta_A = -\dfrac{P\ell^2}{16EI}$, $\theta_B = \dfrac{P\ell^2}{16EI}$



كما يمكن كتابة الصيغة العامة لرد الفعل i من الشكل التالي :

$$R_i = R_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{\ell_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{\ell_i} \qquad ....(31)$$

حيث :

R_i : رد فعل المسند (i).

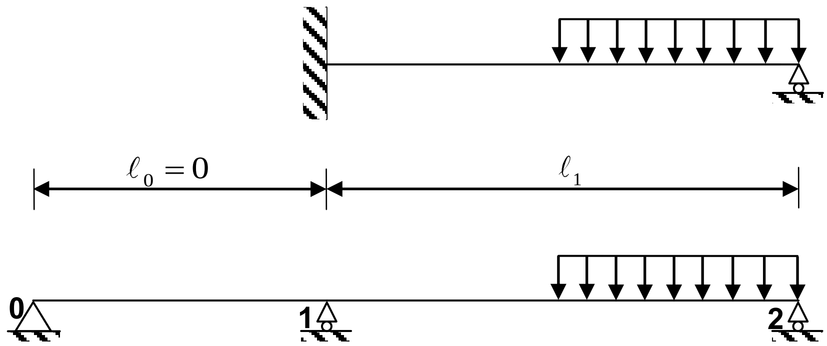
R_i^0 : مجموع ردود الأفعال للمسند (i) بالنسبة للرافدتين المتجاورتين.

2-1 ملاحظات :

1. من اجل رافدة مستمرة تحتوي على وثاقة (encastrement) في أحد أطرافها نقوم بحذف الوثاقة وتعويضها برافدة بسيطة طولها $\ell = 0$. وبالتالي تصبح معادلة العزوم من الشكل التالي :

$$2M_i \ell_i + M_{i+1}.\ell_i = -6EI.\theta_i^d$$

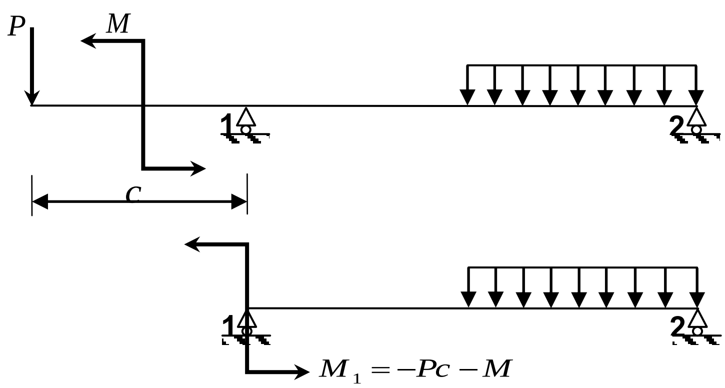
مثال :



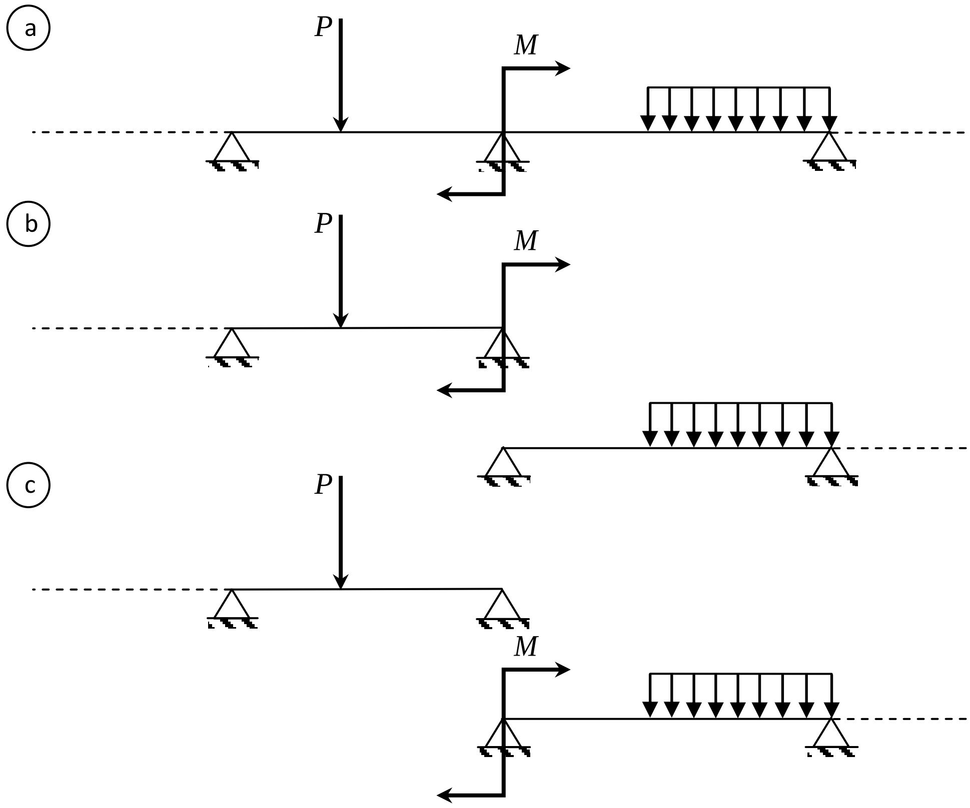
ومنه معادلة العزوم للمثال تكتب من الشكل التالي :

$$2M_1\ell_1 + M_2.\ell_1 = -6EI.\theta_1^d$$
$$2M_1\ell_1 = -6EI.\theta_1^d$$

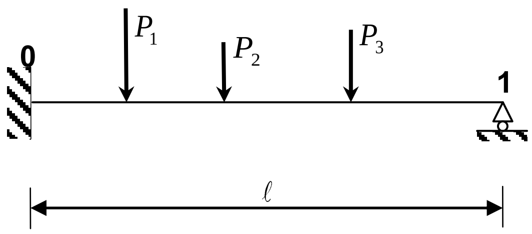
2. إذا وجد في الرافدة المستمرة طرف حر محمل نقوم بتعويض الطرف المحمل بعزم يكون مركز على مستوى المسند الموالي للطرف الحر وبإشارة موافقة للحمولة المطبقة.



3. إذا وجد عزم مركز على مستوى مسند وسطي في الرافدة المستمرة ممكن نقل هذا العزم إلى الرافدة البسيطة على اليمين أو على اليسار ومن المستحسن نقل العزم إلى الرافدة البسيطة الأقل تحميل.



4. لرسم مخططات العزوم M و قوى القص T للروافد الغير مقررة ستاتيكيا نتبع طريقة التراكب (la méthode de superposition).



على سبيل المثال إذا كان لدينا رافدة من الشكل الموضح أعلاه يمكننا كتابة معادلات العزوم M و قوى القص T وبالنسبة لمقطع يبعد بمسافة x عن المسند الأيسر بالشكل التالي :

$$M(\mathrm{x}) = \mu(\mathrm{x}) + \mathrm{M}_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$
$$T(\mathrm{x}) = \frac{d\,\mu(\mathrm{x})}{dx} + \frac{(M_1 - M_0)}{\ell} \quad \text{..................(32)}$$

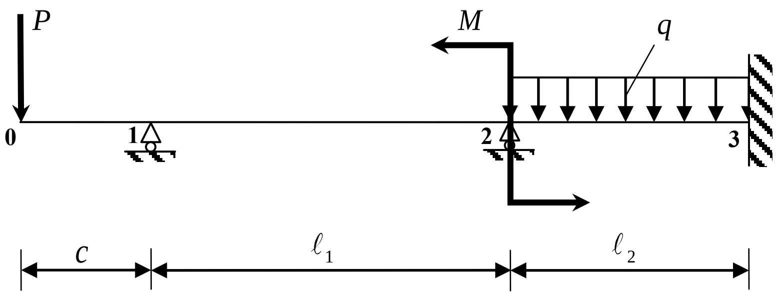
حيث :

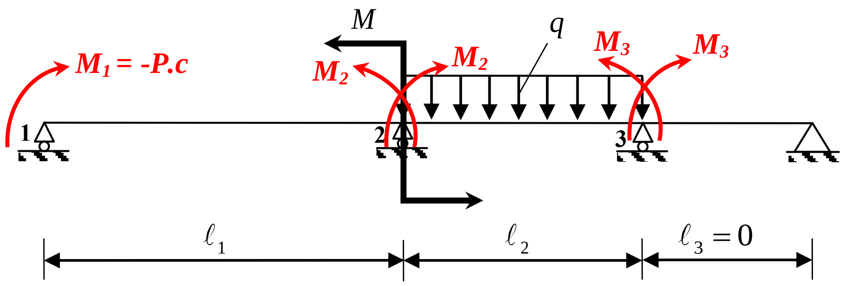
$\mu(\mathrm{x})$: يمثل معادلة عزوم الإنحناء للرافدة السابقة وذلك في حالتها البسيطة (أي لما تكون الرافدة مقررة ستاتيكيا).

تطبيق:

أرسم مخططات T و M لهذه الرافدة الغير مقررة ستاتيكيا بطريقة العزوم الثلاث.

حيث : $P = 2t,\ M = t.m,\ q = 6t/m,\ c = 1m,\ \ell_1 = 3m,\ \ell_2 = 2m.$





1. حساب العزوم عند المساند :

المسند الثاني $(i = 2)$:

$$M_1.\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3.\ell_2 = -6EI.(\theta_2^g + \theta_2^d)$$
$$-2.3 + 2M_2(3+2) + M_3.2 = -6EI.(\theta_2^g + \theta_2^d)$$
$$EI.\theta_2^g = \frac{M\,\ell_1}{3} = \frac{4.3}{3} = 4\ t.m^2$$
$$EI.\theta_2^d = \frac{q\,\ell_2^3}{24} = \frac{6.2^3}{24} = 2\ t.m^2$$
$$-6 + 10M_2 + 2M_3 = -6(4+2)$$
$$10M_2 + 2M_3 = -30$$

المسند الثالث $(i = 3)$:

$$M_2.\ell_2 + 2M_3(\ell_2 + \ell_3) = -6EI.\theta_3^g$$
$$2M_2 + 4M_3 = -6EI.\theta_3^g$$
$$EI.\theta_2^d = EI.\theta_3^g = 2\ t.m^2$$
$$2M_2 + 4M_3 = -12$$
$$M_2 + 2M_3 = -6$$

نقوم بحل جملة المعادلات وذلك للتعرف على قيم العزوم:

$$\begin{cases} 10M_2 + 2M_3 = -30 \\ M_2 + 2M_3 = -6 \end{cases}$$

$$M_2 = -\frac{8}{3} = -2.667\ t.m \quad ; \quad M_3 = -\frac{5}{3} = -1.667\ t.m$$

2. رسم مخططات M و T :

المجاز الأول ($0 \to 1$) :

$$(0 \to 1):\ 0 \le x \le 1\ m$$

$$M(\mathrm{x}) = -P.\mathrm{x} = -2.\mathrm{x} \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \to M(0) = 0 \\ x = 1 \to M(1) = -2\ t.m \end{array} \right.$$

$$T(\mathrm{x}) = -2\ t$$

المجاز الثاني ($1 \to 2$) :

$$(1 \to 2):\ 0 \le x \le 3\ m$$

$$M(x) = \mu(x) + M_1(1 - \frac{x}{\ell_1}) + M_2 \frac{x}{\ell_1}$$

$$= \frac{M}{3}x - 2(1 - \frac{x}{3}) - 2.667\ \frac{x}{3}$$

$$= \frac{4}{3}x - 2 + \frac{2}{3}x - 2.667\ \frac{x}{3}$$

$$M(x) = 1.111x - 2 \left\langle \begin{array}{l} M(x = 0) = -2\ t.m \\ M(x = 3) = 1.333\ t.m \end{array} \right.$$

$$T(\mathrm{x}) = 1.111\ t$$

المجاز الثالث ($2 \to 3$) :

$$(2 \to 3):\ 0 \le x \le 2\ m$$

$$M(x) = \mu(x) + M_2(1 - \frac{x}{\ell_2}) + M_3 \frac{x}{\ell_2}$$

$$= \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2} - 2.667(1 - \frac{x}{2}) - 1.667\ \frac{x}{2}$$

$$= 6x - 3x^2 - 2.667 + 1.3335x - 0.8335x$$

$$M(x) = -3x^2 + 6.5x - 2.667 \left\langle \begin{array}{l} M(x = 0) = -2.667\ t.m \\ M(x = 2) = -1.667\ t.m \end{array} \right.$$

$$T(\mathrm{x}) = -6x + 6.5 \left\langle \begin{array}{l} T(x=0) = 6.5\ t \\ T(x=2) = -5.5\ t \end{array} \right.$$

$$T(\mathrm{x}) = 0 \rightarrow M_{\max}$$

$$T(\mathrm{x}) = -6x + 6.5 = 0 \longrightarrow x = 1.083\ m$$

$$M_{\max} = M(x = 1.083) = 0.854\ t.m$$

ردود الأفعال :

$$R_1 = -T_{10} + T_{12} = -(-2) + 1.111 = 3.111\ t$$

$$R_2 = -T_{21} + T_{23} = -1.111 + 6.5 = 5.389\ t$$

$$R_3 = -T_3 = 5.5\ t$$

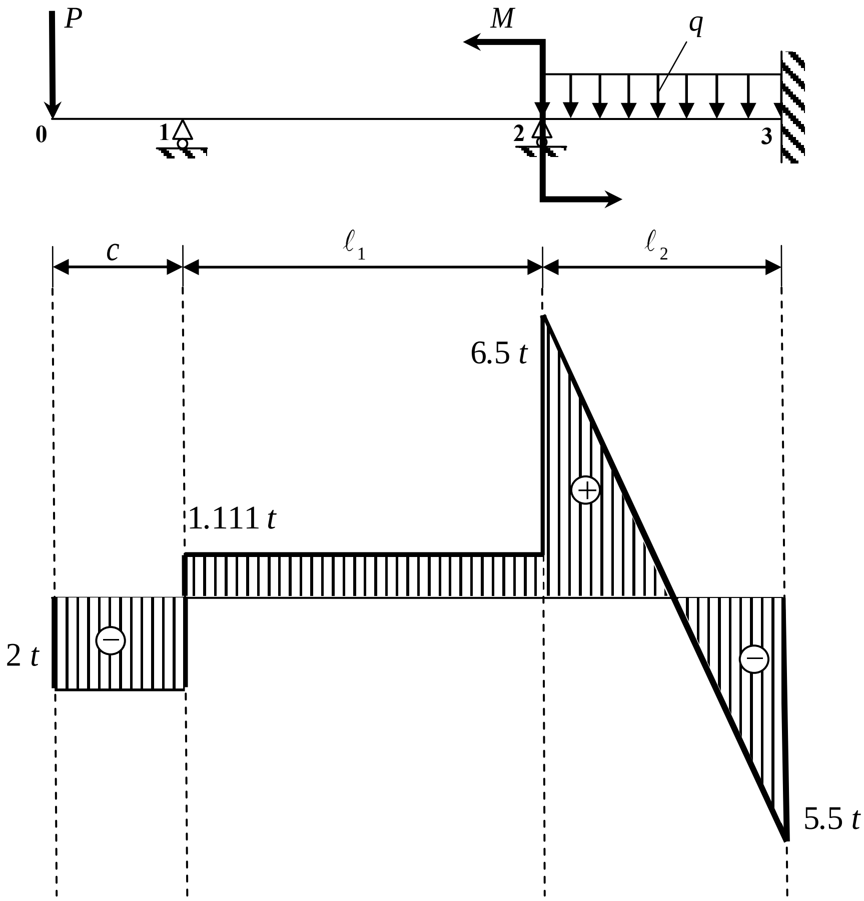


Diagramme de T

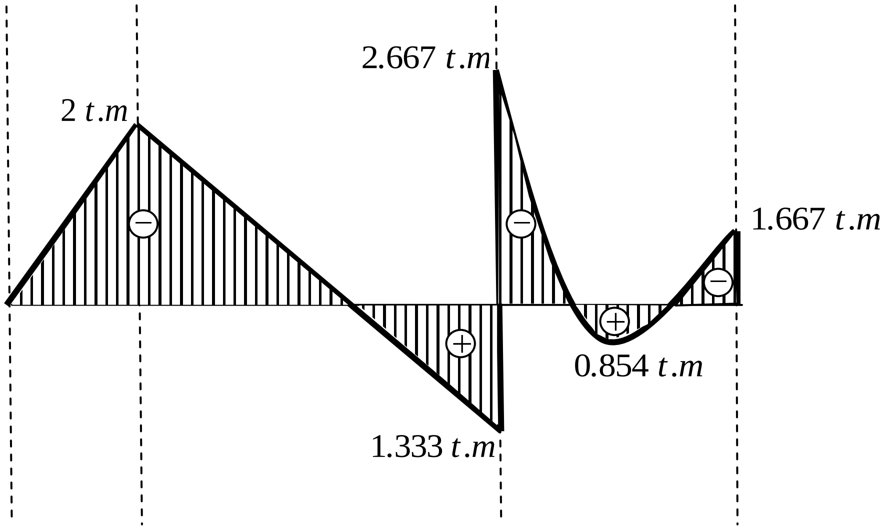


Diagramme de M