جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات **السنة الجامعية:** 2019/2020

المستوى: سنة ثالثة رياضيات **مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات**

حل السلسلة رقم 01

التمرين الأول: **لإثبات أن التطبيق التالي** $\{||v||_{X+Y} = \inf_{v=x+y}(||x||_X + ||y||_Y) \quad x \in X, y \in Y\}$ **نظيم**
سنستعمل الخاصية المميزة للحد الأدنى
البرهان موضح في الخطوات التالية:

- $\forall\ v \in X+Y \quad ||v||_{X+Y} \geq 0$?

لدينا

$$\|x\|_X \geq 0 \text{ ت } \|y\|_Y \geq 0;$$

إذن

$$\|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0;$$

ومنه

$$\inf_{x\in X, y\in Y}(||x||_X + ||y||_Y) \geq 0;$$

- $\|v\|_{X+Y} = 0 \Leftrightarrow \ v = 0$?

نضع

$$\|v\|_{X+Y} = \inf A, \text{ حيث } A = \{||x||_X + ||y||_Y : \ v = x+y\}$$

(١). $\Rightarrow$) **ليكن** $v \in X+Y$، **نفرض أن** $\inf A = 0$ أي $\|v\| = 0$.
الخاصية المميزة للحد الأدنى موضح كالتالي

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists\ z_\epsilon \in A \text{ ق.ت: } z_\epsilon < \inf A + \epsilon).$$

ليكن $j \in \mathbb{N}^*$، **نختار** $\epsilon = \frac{1}{j}$. **إذن ،** $\exists z_j \in A$ **بحيث:** $z_j < 0 + \frac{1}{j} = \frac{1}{j}$.
نعلم أن $z_j \geq 0$ **و** z_j **تكتب بالشكل**

$$z_j = \|x_j\| + \|y_j\|, x_j \in X, y_j \in Y\ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

هكذا

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq ||x||_X + ||y||_Y < \frac{1}{j} \qquad (١)$$

ونعلم أنه $v = x_j + y_j$ **من أجل كل** $\forall j \in \mathbb{N}$،
نمر لنهاية في المعادلة (1) **نتحصل على**

$$\|x_j\| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \wedge \quad \|y_j\| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

إذن

$$x_j \xrightarrow{X} 0 \quad \wedge \quad y_j \xrightarrow{Y} 0. \qquad (٢)$$

لذلك (نذكر أن $X \hookrightarrow X+Y \ \wedge \ Y \hookrightarrow X+Y$).

وبالتالي:

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow \quad & x_j \xrightarrow{X+Y} 0 \quad \wedge \quad y_j \xrightarrow{X+Y} 0. \\ & \Rightarrow x_j + y_j \xrightarrow{X+Y} 0 \\ & \Rightarrow v = 0.\end{aligned}$$

(٢). $v = 0 \Rightarrow \inf A = 0$ $(\Leftarrow)$ واضحة و $\inf A \geq 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, v \in X+Y,\ \|\lambda v\|_{X+Y} = |\lambda| \|v\|_{X+Y}$?

لدينا

$$\begin{aligned}\|\lambda v\|_{X+Y} &= \inf_{v=x+y} (||\lambda x||_X + ||\lambda y||_Y); \\ &= \inf_{v=x+y} (|\lambda|||x||_X + |\lambda|||y||_Y); \\ &= \inf_{v=x+y} (|\lambda|(||x||_X + ||y||_Y)); \\ &= |\lambda| \inf_{v=x+y} (||x||_X + ||y||_Y); \\ &= |\lambda| \|v\|_{X+Y}.\end{aligned}$$

- $\forall (u = x' + y',\ v = x + y) \in (X+Y,\ X+Y)\ \ \|u+v\|_{X+Y} \leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}$?

نضع $z = x + x'$ و $z' = y + y'$

لدينا

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{X+Y} &= \inf_{v+u=z+z'} (||z||_X + |z'||_Y); \\ &\leq \inf_{v+u=z+z'} (((||x||_X + ||x'||_X) + (||y||_Y + ||y'||_Y); \\ &\leq \inf_{v+u=z+z'} (((||x||_X + ||y||_Y) + (||x'||_X + ||y'||_Y); \\ &\leq \inf_{v=x+y} (||x||_X + ||y||_Y) + inf_{u=x'+y'} (||x'||_X + ||y'||_Y); \\ &\leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}.\end{aligned}$$

إذن التطبيق $\|.\|_{X+Y}$ نظيم.

عموما، التطبيق التالي

$$\|v\|_{X+Y} = \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + t\|y\|_Y) \ \ \forall t > 0$$

نظيم.

التمرين الثاني:

(١). بإستعمال المتباينة المثلثية للنيظيم، نحصل على

$$|f(2^ky)-2^kf(y)| \leq |f(2^ky)-2f(2^{k-1}y)|+2|f(2^{k-1}y)-f(2^{k-2}y)|+...+2^{k-1}|f(2y)-2f(y)|$$
$$\leq (1+2+2^2+...+2^{k-1})a = a(2^k-1) \leq 2^ka.$$

(٢). ليكن $n \geq 0$ و $k \geq 0$. نضع $y=2^nx$ في المتباينة السابقة ونقسم الناتج على 2^n+k، نحصل على

$$|\frac{f(2^{n+k}x)}{2^{n+k}}-\frac{f(2^nx)}{2^n}| \leq \frac{a}{2^n}$$

وهذا يعني أن المتتالية المعرفة ب $x_n=\frac{f(2^nx}{2^n}$ هي متتالية كوشية.

التمرين الثالث:

الهدف من هذا التمرين إثبات متراجحتي هولدر وميكوفسكي في فضاء ذو بعد منته

التمرين الثالث:

(١). واضح أن

$$|x_n-x_l| \leq \|x_n-x_l\| \leq \varepsilon$$

(٢). المتباينة السابقة تبين أن المتتالية $(x_n(k))$ متتالية كوشية في $\mathbb{R}$، إذن هي متتالية متقاربة نحو $x \in \mathbb{R}$.

(٣). لأن $x_{N(\varepsilon)}(k) \in \ell^1$، إذن السلسلة $\sum_k x_{N(\varepsilon)}(k \geq 0)$ متقارب، وحسب تعريف النهاية، يوجد $K \in \mathbb{N}$ بحيث $\sum_{k \geq K} x_{N(\varepsilon)}(k) \leq \varepsilon$.

(٤). من أجل $n \geq N(\varepsilon)$ ثابت، لدينا

$$\sum_{k \geq K}^{L}|x_n(k)| \leq \sum_{k \geq K}^{L}|x_n-x_{N(\varepsilon)}(k)|+\sum_{k \geq K}^{L}x_{N(\varepsilon)}(k)$$
$$\leq \|x_n-x_{N(\varepsilon)}(k)\|+\varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

نمر الى النهاية عندما $n \to \infty$، نحصل على $\sum_{k \geq K}^{L}|x(k)| \leq 2\varepsilon$.

(٥). السلسلة ذات الحد العام التالي $|x(k)|$ هي سلسلة ذات حدود موجبة، وحسب السؤال 4، متتالية المجموع الجزئي محدودة من الأعلى، إذن المتتالية متقاربة بمعنى، $x \in \ell^1$.
بالمناسبة، اذا كان $L \to \infty$، فإنه من أجل كل $n \geq N(\varepsilon)$ لدينا

$$\|x_n(k)-x(k)\| \leq \sum_{k=1}^{K-1}|x_n(k)-x(k)|+\sum_{k \geq K}x_n(k)+\sum_{k \geq K}x(k),$$

المجموع الأول منته ومستقل عن n، إذن يوجد N_1 بحيث من أجل كل $n \geq N_1$ لدينا

$$\sum_{k=1}^{K-1}|x_n(k)-x(k)| \leq \varepsilon.$$

لذلك ، من أجل كل $n \geq \max(N_1, N(\varepsilon))$، لدينا

$$\|x_n(k)-x(k)\| \leq 5\varepsilon.$$

ومنه، x_n متقاربة نحو x و ℓ^1 فضاء تام.

التمرين الخامس: سؤال من الدرس، تجد البرهان على هذه الخاصية في المرجع المرفق أسفله(النظرية 4، الصفحة 23).

التمرين السادس: ليكن (T_n) متتالية كوشية في $\mathcal{L}$، إذن لدينا

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in, \forall n, m \geq n_0, \|T_n x - T_m x\|_F \leq \|x\| \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}} \to 0,$$

ومنه $(T_n x)$ متتالية كوشية في F، حيث أنه فضاء تام، إذن $T_n x \to y$.

لنثبت الآن أن T مؤثر خطي ومحدود وأنه نهاية المتتالية (T_n).

بالفعل، من أجل x_1 و x_2، لدينا

$$T(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \lim_{n\to\infty} T_n(x_1)$$
$$= Tx_1 + Tx_2$$
$$T(\alpha x_1) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) = \alpha x_1$$
$$|\|T_n\|_{\mathcal{L}} - \|T_m\|_{\mathcal{L}}| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}} \to 0$$

إذن $\|T_n\|_{\mathcal{L}}$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}$، إذن هي محدودة، بمعنى

$$\exists M > 0, \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \|T_n x\|_F \leq M\|x\|$$

عند المرور للنهاية نتحصل على

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|.$$

من أجل كل $\varepsilon > 0$ وكل $x \in E$، بحيث $\|x\| \leq 1$، لدينا

$$\|T_{n+p}x - T_p x\|_F \leq \varepsilon$$

من أجل كل $p \to \infty$، لدينا

$$\|T_n x - Tx\| \to 0$$
$$\Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x - Tx\|_F = \|T_n - T\|_{\mathcal{L}} \to 0.$$

التمرين السابع: يمكن برهانه بسهوله. **التمرين الثامن:**

$(\alpha_n) \subset \ell^\infty$، إذن من أجل كل $M > 0$، لدينا $\sup_{n\geq 0} |\alpha_n| \leq M$.

$$\|Tx_n\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

إذن

$$\|Tx_n\|_{\ell^2} \leq M\|x_n\|_{\ell^2}^2.$$

ومنه $\|T\|_{\ell^2} \leq M$

التمرين التاسع:

(١).

$$\|Tf(x)\| = |Tf(x)| \leq 3|f(x)| + 2|f(x+4)| \leq 5\|f\|_\infty$$

إذن $\|T\| \leq 5$. **إذا أخذنا الدالة التالية** $C_b(\mathbb{R})$ **بنظيم يساوي ١، على سبيل المثال:**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$|Tf(0)| = 5 \Rightarrow \|Tf\|_\infty = 5,$$

إذن

$$5 = \frac{\|Tf(0)\|_\infty}{\|f(0)\|_\infty} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\|Tf(x)\|}{\|x\|} = \|T\|$$

ومنه $\|T\| = 5$.

(٢). بما أن $\|x_n\|_\infty = \sup |x_n| \geq |x_n|$، **فإن** $\|x_n\|_\infty \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{2^n} \geq |F(x_n)|$. **إذن** F **تطبيق مستمر و** $\|F\| \leq 1$.

نعرف المتتالية التالية:

$$y_n = \begin{cases} 1, & n \leq n_0 \\ 0, & n > n_0 \end{cases}$$

واضح أن $\|y_n\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |y_n| = 1$، **إذن** $F(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \Rightarrow \frac{|F(y_n)|}{\|y_n\|_\infty} = 1 \leq \sup_{x_n\in\mathcal{C}_0} \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|_\infty} = \|F\|_{\mathcal{L}}$.

ومنه، $\|F\|_{\mathcal{L}} = 1$.

حل السلسلة رقم 02

التمرين الأول:

(١). من أجل $(a_i) \in \ell^2$**، لدينا**

$$\begin{aligned}\|T_n x\|_{\mathbb{C}} &= |\sum_{i=1}^{n} |a_i x i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i x i| \\ &\leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \|x\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

ومنه $T_n‘ \in (\ell^2)^*$.

ليكن

$$z_i = \begin{cases} a_i, & i \leq n \\ 0, & i > 0 \end{cases}$$

إذن$\|T_n z_i\| = |\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$

$$\begin{aligned}\frac{\|T_n z_i\|}{\|z_i\|} &= (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|T_n\|_{\mathcal{L}}.\end{aligned}$$

(٢). $\|T_x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{\infty} |a_i x i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x i|$.

$$\begin{aligned}&\leq (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M' \|x\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

إذن $T \in (\ell^2)^*$.

لنفس السبب يمكن إيجاد أن $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$|T_n x - T x| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i| = R_n \to 0.$$

التمرين الثاني:

(١). لنثبت أن T_n **محدودة، لدينا**

$$\|T_x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{n} |a_i x i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x i| < \infty,$$

إذن

$$\sup_n \|T x\|_{\mathbb{C}} < \infty.$$

(٢). لدينا $\|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$، وحسب نظرية بناخ ستينهاوس، لدينا

$$\sup_{n\geq 1} \|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

التمرين الثالث

(١). $(1) \Rightarrow (2)$. نفرض أن A_n متقاربة نحو A في $\mathcal{L}(E,F)$. ليكن $M \subset E$ جزء محدود، نرمز ب (بمعنى $\exists B > 0, \forall x \in M, \|x\| \leqslant B$). إذن

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{B} \\
\Rightarrow \quad &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|}{B} \\
\Rightarrow \quad &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in M \quad \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

وهذا بالضبط التقارب بانتظام ل A_n نحو A على M.

(٢). $(2) \Rightarrow (1)$. من تعريف نظيم مؤثر لدينا $\|A_n - A\| = \sup_{|x|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$ نأخذ كجزء محدود سطح كرة الوحدة: $M = S(0,1) = \{x \in E | \|x\| = 1\}$. إذن

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in S(0,1) \in \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \\
\Rightarrow \quad &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|A_n - A\| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

ومنه $\|A_n - A\|$ تتقارب نحو 0.

التمرين الرابع

(١). ليكن $T_n x = (x_n, x_{n+1}, 0, ...)$، إذن

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\ell^1} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} |x_i| \\
&= \lim_{n\to\infty} R_{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

ومنه T_n متقاربة ببساطة نحو 0.

(٢). لدينا $\|T_n\|_{\ell^1} = 1$، والتي تثبت أن المتتالية غير متقاربة بإنتظام.

التمرين الخامس:

(١). من أجل $x \in E$، $y = Tx \in F$، لدينا

$$\|x\|_E = \|T^{-1}y\|_F \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|Tx\|_F.$$

إذن $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(F,E)} \|x\|_E$.

(٢). ليكن $(y_n) = (Tx_n)$ متتالية متقاربة نحو y. سنثبت أن $y \in R(T)$، بالفعل المتتالية (Tx_n) متتالية متقاربة إذن هي متتالية كوشية، بمعنى

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, \|T(x_n - x_m)\|_F = \|Tx_n - Tx_m\|_F \leq \varepsilon.$$

بإستعمال السؤال السابق، نحصل على

$$\|x_n - x_m\|_E \leq \|T^{-1}\| \|T(x_n - x_m)\|_F \leq \varepsilon,$$

والتي تبين أن (x_n) متتالية كوشية في E والذي هو فضاء تام، إذن هي متقاربة نحو x، بما أن T مستمر فإن $y_n = Tx_n \to y = Tx \in R(T)$.

التمرين السادس:

(١). واضح أن I خطي وتقابلي، ولنثبت الإستمرارية ،لدينا

$$\|x\|_1 = \|Ix\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |x| \int_0^1 dt = \|x\|_\infty$$

ومنه $\|I\|_{\mathcal{L}} \leq 1$.

ليكن $x(t) = 1$، إذن لدينا

$$\frac{\|Ix\|_1}{\|x\|_\infty} = 1 \leq \|I\|_{\mathcal{L}}.$$

(٢). من أجل $x_n = t^n$، لدينا $\|x\|_\infty = 1$ و $\|x\|_1 = \frac{1}{n+1}$. اذا كان I^{-1} إذن يوجد $C > 0$ بحيث $\frac{C}{n+1} \geq= \|x\|_\infty \|I^{-1}x\|_\infty$، والذي يثبت وجود C بحيث $C > n + 1$، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، وهذا غير ممكن.

(٣). لأن X فضاء بناخي، اذا كان Y فضاء بناخي أيضايمكن تطبيق نظرية التشاكل لبناخ. إذن Y ليس فضاء تام.