وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة لخضر - الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

مدخل الى نظرية المؤثرات

دروس وتمارين

السعيد بلول

$2019 - 2020$

الفهـــــــــــــرس

١ المؤثرات الخطية والمحدودة 3
١.١ فضاءات بناخ 3
١.١.١ الفضاءات الشعاعية النظيمية 3
٢.١.١ التقارب والاستمراية في فضاء شعاعي نظيمي 4
٣.١.١ الفضاء الشعاعي النظيمي التام 4
٢.١ فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة 5
١.٢.١ نظيم المؤثر 7
٣.١ تمديد مؤثر بالاستمراية 8
٤.١ التقارب في فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة 9
١.٤.١ التقارب البسيط 10
٢.٤.١ التقارب بإنتظام 11
٣.٤.١ التقارب الضعيف 11
٥.١ نظرية بناخ ستينهاوس *Banach Steinhaus* 11
٦.١ نظرية البيان المغلق 12
٧.١ معكوس مؤثر 13
٨.١ تمارين 15

٢ نظرية هان بناخ وتطبيقاتها 17
١.٢ الشكل التحليلي لنظرية هان بناخ 17
١.١.٢ نظرية هان بناخ الحقيقة 17
٢.١.٢ نظرية هان بناخ المركبة 20
٢.٢ الشكل الهندسي لنظرية هان بناخ 22
٣.٢ تمارين 22

المقدمة

في هذا العمل ، نقدم بعض عناصر نظرية المؤثرات من تعاريف ومفاهيم ونظريات. هذا العمل مخصص بشكل أساسي لطلاب السنة الثالثة ليسانس، وكذلك أي شخص مهتم بالتحليل الدالي. ينقسم هذا العمل إلى أربعة فصول مع تمارين في نهاية كل فصل:

الفصل الأول: المؤثرات الخطية والمحدودة.

الفصل الثاني: نظرية هان باناخ وتطبيقاتها.

الفصل الثالث: المؤثرات الخطية المحدودة بفضاء هيلبرت.

الفصل الرابع: المؤثرات الخطية المتراصة.

في الفصل الأول، سنقدم بعض التعاريف التي تخص المؤثر الخطي ونظيم مؤثر ومعكوس مؤثر مع ذكر بعض النظريات الأساسية في هذا النطاق كنظرية بناخ ستينهاوس ونظرية البيان المغلق ونظرية التطبيق المفتوح.

الفصل الثاني محجوزا لنظرية هان بناخ بشكليها التحليلي والهندسي مع ذكر بعض من نتائجها. أما الفصل الثالث سنذكر فيه بعض خواص الفضاءات الهلبرتية من تعاريف ونظريات وبعض الأمثلة وسنعرف عليه فيما بعد المؤثرات الخطية والمستمرة ونظرة بسيطة على نظرية الطيف بالنسبة للمؤثرات.

في الفصل الأخير سنعرج على المؤثرات المتراصة بذكر خواصها وأمثلة عليها.

الفصل ١

المؤثرات الخطية والمحدودة

١.١ فضاءات بناخ

١.١.١ الفضاءات الشعاعية النظيمية

تعريف ١.١.١ ليكن E فضاء شعاعي على حقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$). نسمي نظيم على E **كل تطبيق** $N : X$ نحو $\mathbb{R}_+$يحقق الخواص التالية:

(١). $\forall\, x \in E$، $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$؛

(٢). $\forall\, x \in E$ و $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$، $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$؛

(٣). $\forall\, x, y \in E$، $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

نسمي الثنائي (E, N) فضاء شعاعي نظيمي.

مثال ١.١.١ (١). النظيمات الأساسية في $\mathbb{R}^n$

أ) $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$،

ب) $N_2(x) = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$،

ج) $N_3(x) = \max_{1\leq i\leq n} x_i|$.

(٢). النظيم المعرف على $\ell^p(\mathbb{C})$(فضاء المتتاليات).

لتكن

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

حيث $p \in [0, \infty[$.

التطبيق:

$$x \mapsto \|x\|_{\ell^p} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

يعرف نظيم على $\ell^p(\mathbb{C})$.

٢.١.١ التقارب والاستمرارية في فضاء شعاعي نظيمي

تعريف ٢.١.١ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و (x_n) متتالية في E. نقول عن (x_n) أنها

(١). متتالية كوشية إذا وفقط إذا كان $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$، بمعنى،

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

(٢). متقاربة نحو x إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$، بمعنى،

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

مثال ٢.١.١ $x_n = \frac{1}{n}$

تعريف ٣.١.١ نقول عن الدالة f المعرفة على E أنها مستمرة عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x - x_0\| < \alpha \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

٣.١.١ الفضاء الشعاعي النظيمي التام

تعريف ٤.١.١ ليكن E فضاء متري.
نقول عن E أنه فضاء تام إذا وفقط إذا كان كل متتالية كوشية على E متقاربة.

تعريف ٥.١.١ نقول عن فضاء نظيمي E أنه بناخي إذا كانت كل متتالية كوشية منه متقاربة، أي أنه تام كفضاء متري مزود بالمسافة المرفقة بالنظيم.

مثال ٣.١.١ (١). ١ $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{C}^n$ مزود بأحد النظيمات التالية:

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ و $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ هي فضاءات بناخية، من أجل كل $p \in \mathbb{N}^*$.

(٢). لتكن

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

فضاء المتتاليات في $\mathbb{C}$ المزود بالنظيم التالي $\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{n} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ يعرف فضاء بناخي.

$$\ell^\infty(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, |x| \leq M\}$$

فضاء المتتاليات المحدودة على $\mathbb{C}$ المزود بالنظيم التالي

$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0}|x_n|$ هو فضاء بناخي.

قضية ١.١.١ ليكن $(E_1, \|\|\|_1), (E_2, \|\|\|_2)$ فضاءان بناخيان على حقل $\mathbb{K}$، إذن فضاء الجداء E_1E_2 المزود بالنظيم الآتي $\|x\|_{E_1E_2} = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ و $\|x\|_{E_1E_2} = \|x\|_1 + \|x\|_2$ فضاء بناخي.

البرهان. لتكن (x_n, y_n) متتالية كوشية في E_1E_2، إذن من أجل $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث $n, m > n_0$لدينا

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{E_1E_2} = \max\{\|x_n - x_m\|_{E_1}, \|y_n - y_m\|_{E_2}\}$$

والذي يستلزم أن (x_n) و (y_n) متتاليتي كوشي في E_1 و E_2 (على التوالي)، إذن هما متقاربتين نحو x, y (على التوالي)، ومنه

$$\|x_n, y_n) - (x, y)\|_{E_1E_2} = \max\{\|x_n - x\|_{E_1}, \|y_n - y\|_{E_2}\} < \max\{\varepsilon, \varepsilon\}$$

ومنه نستنتج أن، (x_n, y_n) متقاربة نحو (x, y). ■

٢.١ فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة

تعريف ١.٢.١ ليكن E و F فضائين شعاعين نظميين على حقل $\mathbb{K}$. نقول عن مؤثر من E نحو F أنه خطي إذا وفقط إذا كان

(١). من أجل $x, y \in E$، $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

(٢). من أجل $\alpha \in \mathbb{C}$، $x \in E$، $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

- نقول عن T أنه جمعي إذا كان من أجل $x, y \in E$ يحقق $T(x + y) = T(x) + T(y)$.
- نقول عن T أنه متجانس إذا حقق من أجل $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in E$: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.
- ويكون T نفس متجانس إذا حقق من أجل كل $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in E$: $T(\alpha x) \leq \alpha T(x)$.

مثال ١.٢.١ ليكن التطبيق $T : C([a, b]) \to \mathbb{R}$، المعرف بـ: $Tx(t) = \int_0^b x(t)dt$.
واضح أن T خطي.

نرمز ب $L(E, F)$ لفضاء التطبيقات الخطية والمحدودة من E نحو F.

تعريف ٢.٢.١ ليكن T مؤثر خطي على E، نقول أن T محدود (أو مستمر) إذا وفقط إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \text{ من أجل } x \in E$$

.

نظرية ١.٢.١ T مستمر إذا وفقط إذا كان T محدود.

البرهان. نفرض أن T مستمر لكن غير محدود. إذن من أجل كل $M > 0$ يوجد x_M بحيث

$$\|Tx_M\| > M\|x_M\|$$

بالخصوص، من أجل $n \in \mathbb{N}$ توجد متتالية (x_n) في E بحيث

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

نضع $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$، واضح أن $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ لأن T مستمر، نحصل على $\infty \to \|Tx_n\|$، ومنه

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \to 0.$$

لكن

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \geq \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

وهذا تناقض.

بالمقال ، إذا كان T محدود، ولتكن (x_n) متتالية في E متقاربة نحو x. إذن،

$$\|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to \infty$$

والذي يبين أن $Tx_n \to Tx$. ومنه، T مستمر. ■ نرمز ب $\mathcal{L}(E,F)$ لفضاء المؤثرات الخطية والمحدودة (المستمرة) من E نحو F.

نظرية ٢.٢.١ من أجل كل مؤثر الخطي $T \in L(E,F)$، المميزات الثلاث التالية متكافئة:

(١). T محدود.

(٢). T مستمر على E.

(٣). T مستمر عند النقطة 0 من E.

البرهان. $(1) \Rightarrow (2)$

ليكن x_0 شعاع كيفي من H و (x_n) متتالية في H. بما أن

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\|x_n - x_0\|,$$

إذن $Tx_n \to Tx_0$ عندما $x_n \to x_0$، ومنه استمرارية S.

الاستلزام التالي $(3) \Leftarrow (2)$ واضح .

$(3) \Rightarrow (1)$

ليكن T مؤثر خطي على E، مستمر عند النقطة $x_0 \in E$، نفرض العكس، (التطبيق غير محدود). إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، يوجد شعاع غير محدود $x_n \in H$ يحقق$\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$. إذا فرضنا أن $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$، نجد أن $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

و $y_n \to 0$، إذن $y_n + x_0 \to x_0$، لكن

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

ومنه T غير مستمر x_0 ومن هنا التناقض، وبالتالي T محدود. ■

نظرية ٣.٢.١ إذا كان T مؤثر جمعي ومستمر على فضاء شعاعي نظيمي فأنه متجانس.

البرهان.

(١). من أجل $n \in \mathbb{N}$، لدينا

$$T(nx) = T(\sum_{1}^{n} x) = nTx.$$

(٢). من أجل $n = 0$،لدينا

$$T(x+0) = Tx = Tx + T0 \to T0 = 0.$$

(٣). من أجل $n \in \mathbb{Q}$، لدينا

$$T(\frac{m}{n}x) = mT(\frac{x}{n}$$

نضع $y = \frac{x}{n}$، إذن

$$Tx = T(ny) = nTy \to T(\frac{x}{n} = \frac{1}{n}Tx$$
$$\to T(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}Tx.$$

(٤). ليكن λ غير ناطق، إذن توجد متتالية $(\lambda_n \subset \mathbb{Q})$ تحقق $\lambda_n \to \lambda$، لأن **Q** كثيف في $\mathbb{R}$. ومنه

$$T(x\lambda_n) \to T(x\lambda),$$

من ناحية أخرى لدينا

$$T(x\lambda_n) = \lambda_n Tx \to \lambda Tx$$

وبالتالي $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

■

١.٢.١ نظيم المؤثر

تعريف ٢.٢.١ ليكن E, F فضائين شعاعين نظيمين $T \in \mathcal{L}(E,F)$. نسمي نظيم T أصغر عدد موجب ممكن c الذي يحقق: $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.بمعنى

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \inf\{M > 0, \|Tx\|_F \leq \|x\|_E\}.$$

قضية ١.٢.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E,F)$. إذن لدينا

(١). $\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E$

(٢). $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E, \|Tx_\varepsilon\|_F \geq (\|T\|_{\mathcal{L}} - \varepsilon)\|x\|_E$

(٣). $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F$ ،$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|}$

البرهان.

(١). إذا كان $\|T\| = M_0$، فإنه لدينا $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M_0$، ومنه

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

(٢). ليكن $M_0 = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$، ذن حسب تعريف الحد الأعلى لدينا، من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $x_\varepsilon \in E$، بحيث

$$\frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \geq M_0 - \varepsilon$$
$$\to \|Tx_\varepsilon\| \geq (M_0 - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

(٣). إذا كان $\|x\| \leq 1$،ونستعمل الخاصية (١) نتحصل على

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$$

$$\Longrightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{٢.١.١}$$

نضع $y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$، إذن لدينا

$$\|Ty_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Tx_\varepsilon\| \geq \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|T\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

$$\to \|Ty_\varepsilon\| \geq \|T\| - \varepsilon$$

$$\to \|T\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \tag{٢.١.٢}$$

وبالتالي، من (١.٢.١) و (٢.٢.١)، نصل الى النتيجة المطلوبة.

■

مثال ٢.٢.١ لدينا $T : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ معرفة ب $Tx(t) = \int_a^b x(t)dt$.

$$\|Tx\| \leq (b-a)\|x\|$$

$$\Longrightarrow \|T\| \leq (b-a).$$

لتكن x_0 دالة من $C([a,b])$ معرفة من أجل كل $t \in (a,b]$ ب $x_0(t) = 2$، إذن لدينا

$$\|Tx_0\| = 2(b-a) \Longrightarrow \frac{\|Tx_0\|}{x_0} = (b-a) \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

ومنه $\|T\| = b-a$.

٣.١ تمديد مؤثر بالاستمراية

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و $T : D \subset E \to E$، بحيث D فضاء شعاعي جزئي من E. نقول أن T محدود على D إذا وجد $M > 0$، بحيث من أجل كل $x \in D$، لدينا $\|Tx\|M\|x\|$.

أصغر عدد ممكن $M > 0$ الذي يحقق المتباينة السابقة يدعى نظيم T، ونرمز له ب $\|T\|_D$.

نظرية ١.٣.١ ليكن Eفضاء بناخي ، D فضاء جزئي من E بحيث $\overline{D} = E$ و $T : D \subset E \to E$. إذن T يملك تمديد في E من أجل كل عناصره.

البرهان. نعرف المؤثر التالي $\tilde{T}$ على E ب:

$$Tx = \begin{cases} \tilde{T}x = Tx, & \forall x \in D, \\ \|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D \end{cases}$$

ليكن $x \in E$، بما أن D كثيف في E، فإنه يوجد متتالية $(x_n) \subset D$، بحيث $x_n \to x$. إذن هي متتالية كوشية ، بمعنى، $\|x_n - x_m\| \to 0$، عندما $n, m \to 0$، بمعنى،

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

وبالتالي من أجل $n, m > n_0$، لدينا

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|_D \|x_n - x_m\| \to 0$$

والذي يستلزم أن (Tx_n) متتالية كوشية في E الذي هو فضاء تام، ومنه (Tx_n) متقاربة في E.
وبالتالي ، $Tx_n \to \tilde{T}x$. لذا، إذا كان $x \in E/D$، فإن صورة x بالمؤثر T هي نهاية متتالية من D.
ندرس الآن وحدانية $\tilde{T}$
إذا كانت (y_n) متتالية في D متقاربة نحو x. فإنه لدينا

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - x\|$$

$$\to \|Tx_n - Ty_n\| = \|T(x_n - y_n)\| \leq M\|x_n - y_n\| \to 0.$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \tilde{T}x$.
$\tilde{T}$ خطية
من أجل $x_1, x_2 \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$، لدينا

$$\tilde{T}(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \tilde{T}x_1 + \tilde{T}x_2$$

$$\tilde{T}(\alpha x_1) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n^{(1)}) = \alpha \tilde{T}x.$$

$\tilde{T}$ محدود

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}x\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}\| \leq \|T\|_D$$

من جهة أخرى،

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x\in E} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in D} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} = \|T\|_D$$

إذن $\|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D$. ■

٤.١ التقارب في فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة

قضية ١.٤.١ ليكن E، F و $T \in \mathcal{L}(E, F)$. الفضاء $\mathcal{L}(E, F)$ فضاء شعاعي نظيمي.

البرهان. واضح أن $\mathcal{L}(E,F)$ فضاء شعاعي.

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = 0 \leftrightarrow \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow T = 0$$

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{L}} = \alpha \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \alpha \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

$$\|S+T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x\in E} \frac{\|(S+T)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in E} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} + \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

إذن $\|.\|_{\mathcal{L}}$ نظيم على $\mathcal{L}(E,F)$. ■

١.٤.١ التقارب البسيط

ليكن E، F و $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$. نقول عن المتتالية (T_n) أنها متقاربة ببساطة نحو T إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x \in E, T_n x \to Tx$ ونرمز لها ب $T_n \xrightarrow{s} T$.

ونكتب $T_n \to T \Leftrightarrow \forall x \in E, T_n x \to Tx$.

من ناحية أخرى

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \|Tx_n - Tx\|_F < \varepsilon.$$

مثال ١.٤.١

$$T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$$

أثبت أن $T_n \to I_{\ell^2}$?.

بداية، نبين أن $T_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

بالفعل من أجل كل $x \in \ell^2$، لدينا

$$\|T_n x\| = (\sum_{k=1=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\sum_{k=1=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{\ell^2}$$

$$\to \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq 1$$

من أجل $z = (1,0,0,...)$ لدينا $T_n z = z$، إذن $\|T_n z\| = 1 \leq \sup x \in \ell^2 \|T_n x\| = \|T_n\|$.

من أجل كل $x \in \ell^2$، لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - I_{\ell^2} x\| = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=n+1=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (R_n)^{\frac{1}{2}} = 0$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} T_n = I_{\ell^2}$.

٢.٤.١ التقارب بإنتظام

ليكن E، F و $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$. نقول أن المتتالية (T_n) متقاربة بإنتظام نحو T إذا وفقط إذا كان من أجل $x \in E, \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x - Tx\|_F = 0$. ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}} = 0$. ونرمز له ب $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

٣.٤.١ التقارب الضعيف

تعريف ١.٤.١ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي على حقل $\mathbb{K}$. نسمي ثنوي E ونرمز له بـ E^* فضاء الأشكال الخطية والمستمرة من E نحو $\mathbb{K}$.

الثنوي الجبري محتوى تماما في الثنوي الطبولوجي.

نقول عن متتالية (x_n) من E أنها متقاربة تقارب ضعيف نحو x إذا وفقط إذا كان $f \in E^*$ fx_n تتقارب نحو fx.

متتالية من المؤثرات (T_n) متقاربة تقارب ضعيف نحو T إذا وفقط إذا كان

$$f(T_n x) \to f(Tx), \quad \forall x \in E, \forall f \in E^*.$$

ونرمز ب $T_n \xrightarrow{w} T$.

نظرية ١.٤.١ إذا كانت (T_n) متتالية من المؤثرات من E في F. إذن لدينا

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{s} T$$

$$\xrightarrow{s} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} T.$$

البرهان. من أجل $x \in E$، لدينا

$$\|T_n x - T_x\|_F = \|(T_n - T)\| \leq \|T_n - T\| \|x\|_E \to 0$$

من أجل $x \in E$ و $f \in F^*$، لدينا

$$|f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n x - Tx)| \leq |f| \|T_n x - Tx\| \to 0.$$

■

٥.١ نظرية بناخ ستينهاوس *Banach Steinhaus*

تعريف ١.٥.١ نقول عن المتتالية $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ أنها محدودة بانتظام اذا كانت محدودة من أجل النظيم $\|.\|_{\mathcal{L}}$. بمعنى

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

وهو مكافئ لي

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

تكون (T_n) محدودة (محدودة نقطيا)إذا وفقط إذا كان من أجل كل $x \in E$، بالنظيم متقاربة $\|.\|_F$. بمعنى

$$\forall x \in E, \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n x\|_F \leq M.$$

مثال ١.٥.١ **(١)**. $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$.

رأينا مسبقا أن $\|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq 1$. **إذن** (T_n) **ست محدود بالنظام.**

(٢). $T_n : \ell^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, T_n x = n x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

$$\|T_n x\| \leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq (n+1) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$
$$= (n+1)\|x\|$$
$$\to \|T_n\| \leq (n+1).$$

لبكن $z = (1, 0, 0, ...)$، **واضح أن** $z \in \ell^1$ **ت** $\|z\| = 1$ **ت** $\|T_n z\| = (n+1)$.) **ومنه** $\|T_n\| = (n+1) \to \infty$، **وبالتالي الحد لبس بالنظام.**

نظرية ١.٥.١ **لبكن** E **فضاء بناخي و** F **فضاء شعاعي نظيمي و** $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$. **إذا كانت المتتالية** (Tn) **محدودة نقطيا إذن فهي محدود بالنظام. بمعنى**

$$\forall x \in E, \sup_{n \geq 0} \|T_n x\|_F < \infty \to \sup_{n \geq 0} \|T_n\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

٦.١ نظرية البيان المغلق

تعريف ١.٦.١ **لبكن** E **و** F **فضائين بناخيين ولبكن** $T : D \subset E \to F$. **نسمي بيان ل** T **كل فضاء جزئي من** EF **معرف ب**

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in D\}.$$

قضية ١.٦.١ **لبكن** E, F **فضائين بناخيين و** $T \in \mathcal{L}(E, F)$. **إذن** G **مغلق.**

البرهان. **ليكن** $(x_n, y_n) \to (x, y)$، **إذن** $x_n \to x$، **باستعمال الاستمراية نجد** T $Tx_n \to Tx$، **لكن** $y_n = Tx_n \to y$، **ومنه** $y = Tx$ **و** G **مغلق.** ■

نظرية ١.٦.١ **لبكن** E, F **فضائين بناخيين و** $T \in L(E, F)$. **إذا كان** G **مغلق فإن** T **مستمر.**

البرهان. **لأن** G **مغلق إذن هو تام وبالتالي فضاء بناخي.**
ليكن $P_E : G \to E, P_E(x, Tx) = x$ **الإسقاط على** E. P_E **تطبيق خطي ومستمر ، لأن**

$$\|P_E(x, Tx)\| = \|x\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x, Tx)\|_G.$$

بنفس الطريقة نعرف الإسقاط على F.

$$P_F : G \to E, P_F(x, Tx) = Tx,$$

الإسقاط على F. P_F خطي و مستمر لأن

$$\|P_F(x, Tx)\| = \|Tx\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x, Tx)\|_G.$$

إذن $T = P_E \circ P_F \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

نظرية ٢.٦.١ (التشاكل لبناخ)
ليكن E, F فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E, F)$. إذا كان T تقابلي فإنه يوجد مؤثر خطي ومستمر T^{-1} من F نحو E.

نظرية ٣.٦.١ (نظرية التطبيق المفتوح) ليكن E, F فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E, F)$. إذا كان T تقابلي فإن T مفتوح.

٧.١ معكوس مؤثر

قضية ١.٧.١ إذا كان $T \in \mathcal{L}(E, F)$ و $S \in \mathcal{L}(F, H)$، فإن $T \in \mathcal{L}(E, H)$ ت $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

البرهان. من أجل كل $x, y \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$، لدينا

$$ST(\alpha x + y) = S(T(\alpha x + y)) = S(\alpha Tx + Ty)$$

$$= \alpha STx + STy.$$

إذن ST خطي. و من أجل كل $x \in E$، لدينا

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\|$$

$$\leq \|S\|\|T\|\|x\|$$

و منه $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ ■

تعريف ١.٧.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E, F)$، حيث E و F فضائين شعاعيين نظيميين. نقول أن T يقبل تطبيق عكسي إذا وفقط إذا وجد $S \in \mathcal{L}(F, E)$، بحيث $\forall x \in E, STx = x$ ت $\forall y \in F, TSy = y$. ونرمز لمعكوس T ب T^{-1}.

نظرية ١.٧.١ ليكن E فضاء بناخي و$T \in \mathcal{L}(E)$. إذا كان $\|T\| \leq 1$، فإن $(I - T)$ يقبل تطبيق عكسي و $(I - T)^{-1}$ محدود ولدينا أيضا

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + ...$$

البرهان. لدينا $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{k} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|T\|^n$.

$$\|T\| \leq 1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(E).$$

$$\|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| = \|\sum_{n=0}^{k} \|T^n - \sum_{n=1}^{k} T^n - I\|$$
$$= \|I - T^{k+1} - I\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$$

نمر للنهاية فنتحصل على

$$\lim_{k\to\infty} \|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T\|^{k+1} = 0$$

$$\to (I-T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I \to (I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

■

نظرية ٢.٧.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E,F)$، إذا كان T يقبل تطبيق عكسي فإن T^{-1} وحيد. أيضا، إذا كان $S \in \mathcal{L}(,F,H)$ يقبل تطبيق عكسي، فإن ST يقبل تطبيق عكسي ولدينا $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

البرهان. إذا كان U ت V معكوسي ل T، إذن لدينا

$$U = UI = U(TV) = (UT)V$$

$$= IV = V.$$

إذا كان T و S يقبلان تطبيقان عكسيان، إذن لدينا

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1} = I$$

$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I.$$

■

تعريف ٢.٧.١ نقول عن مؤثر أنه يقبل معكوس يميني (يساري) إذا وجد S_1 (S_2) بحيث $TS_1 = I$ $(S_2T = I)$.

نظرية ٣.٧.١ ليكن E, F فضائين بناخيين و T مؤثر خطي ومحدود. الدعاوي الثلاث التالية متكافئة:

(١). T يقبل تطبيق عكسي يميني.

(٢). F متباين و$Im(T) = R(T)$ مغلق.

(٣). يوجد $c > 0$، بحيث من أجل كل $x \in E,$ لدينا

$$\|Tx\| \geq c\|x\|.$$

البرهان.

(١). نفرض أن $T \in \mathcal{L}(E)$ يقبل معكوس من اليسار، إذن من أجل كل $x_1, x_2 \in E$، لدينا

$$Tx_1 = Tx_2 \to T^{-1}Tx_1 = T^{-1}Tx_1$$

$$\to x_1 = x_2.$$

ليكن (x_n) متتالية في E، بحيث $x_n \to x$، إذن $(Tx_n) \in R(T)$ بما أن $T \in \mathcal{L}(E)$، تصبح $Tx_n \to Tx$ وهذا يستلزم أن $Tx \in R(T)$.

(٢). بما أن E و F فضائين بناخيين، إذن المؤثر $\tilde{T} : E \to T(E)$ تقابلي، ومنه باستعمال نظرية التشاكل لبناخ يوجد T^{-1} مستمر من $T(E)$ نحو E، بمعنى

$$\exists c > 0, \|x\| \geq c\|Tx\|.$$

(٣). T متباين لأنه إذا كان $Tx = 0 \to x = 0$ فإن $KerT = \{0\}$. أيضا، $R(T)$ مغلق، مما يبين أن T تقابلي. وبالتالي تقبل معكوس T^{-1}.

■

٨.١ تمارين

التمرين الأول: لتكن $(a_i), (x_i)$ متتاليتين من $\ell^2(\mathbb{C})$، ونعرف المؤثر T_n من $\ell^2(\mathbb{C})$ نحو $\mathbb{C}$، بحيث

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

1) لدينا $n \in \mathbb{N}^*$ أثبت أنه من أجل كل $T_n \in (\ell^2)^*$

2) بين أن $\|T_n\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

3) لتكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$، بحيث $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$

- برهن أن $T \in (\ell^2)^*$ وأن $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
- برهن أن (T_n) تتقارب ببساطة نحو T في $(\ell^2)^*$.

التمرين الثاني: لتكن (a_i) متتالية عناصر عقدية، $(x_i) \in \ell^2$، بحيث تكون السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ متقاربة في $\mathbb{C}$ و $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ بحيث $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

1) أثبت أن (T_n) محدودة.

2) باستعمال نظرية بناخ- ستينهاوس *Banach Steinhaus*، أثبت أن $a_i \in \ell^2(\mathbb{C})$.

التمرين الثالث: ليكن E و F فضائين نظيمين و $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F)$. أثبت التكافؤ بين:

1) $A_n \to A$ في $\mathcal{L}(E,F)$

2) من أجل كل جزء محدود $M \subset E$، المتتالية $A_n x$ متقاربة بانتظام نحو Ax حيث $x \in M$.

التمرين الرابع: ليكن $T_n : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$، بحيث $T_n x = (x_n, x_{n+1}, 0, 0, ..., 0, ...)$.

1) أحسب $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\ell^1}$.

2) أثبت أن T_n متقاربة ببساطة نحو T يطلب تعينه.

3) هل المتتالية متقاربة بانتظام؟

التمرين الخامس: ليكن E و F فضائين شعاعين نظيمين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) أثبت أنه اذا كان T قابل للقلب و $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ فإنه من أجل كل $x \in E$ لدينا $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{-1} \|x\|_E$.

2) برهن أنه اذا كان E فضاء بناخي بحيث $\|T\| \geq \|x\|$، فإن $R(T) = Im(T)$ مغلق.

التمرين السادس: ليكن $E = C([0,1])$ فضاء التوابع العقدية المستمرة. نعتبر الفضائين النظيمين التاليين $X = (E, \|.\|_\infty)$ و $Y = (E, \|.\|_1)$ حيث $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$. نرمز ب I للتطبيق المطابق ل X في Y.

1) أثبت أن I تقابل ومستمر ثم أحسب نظيمه.

2) أثبت أن I^{-1} ليس مستمر (مساعدة: استعمل المتتالية $(x_n) = t^n$).

3) استنتج أن Y ليس فضاء تام.

الفصل ٢

نظرية هان بناخ وتطبيقاتها

١.٢ الشكل التحليلي لنظرية هان بناخ

تعريف ١.١.٢ نسمي نصف نظيم على مجموعة E كل تطبيق $p : E \to \mathbb{R}_+$ الذي يحقق الخواص التالية:

(١). $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \geq 0$؛

(٢). من أجل كل $x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$؛

كل نظيم على E هو نصف نظيم.

شمه ١.١.٢ كل مجموعة غير خالية ومرتبة ترتيبا جزئيا تحتوي عنصر أعظميا.

١.١.٢ نظرية هان بناخ الحقيقة

نظرية ١.١.٢ (نظرية هان بناخ الحقيقة)
ليكن E فضاء شعاعي حقيقي و ، G فضاء جزئي من E، p نصف نظيم على E و $f \in G^*$، بحيث

$$\forall x \in G, f(x) \leq p(x).$$

إذن يوجد $\tilde{f} \in E^*$ حيث

$$\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x);$$

$$\forall x \in E, \tilde{f}(x) \leq p(x).$$

البرهان. نفرض أن $G \neq E$، إذن يوجد $x \in E/G$، من أجل $x_0 \in G$ نعرف G_1الفضاء الجزئي من E كالآتي:

$$G1 = \{tx + x_0, x0 \in G, t \in \mathbb{R}\}.$$

سنثبت الآن وجود تمديد f_1 ل f على G_1.
من أجل $t \in G_1$، نضع

$$f_1(y) = f_1(tx + x_0) = tf_1(x) + f_1(x_0) = tc + f(x_0),$$

بحيث $f_1(x)=c$ ثابت يتم اختياره كالتالي

$$f_1(tx+x_0)=p(tx+x_0), \tag{١.٢.١}$$

$\forall y\in G_1, f_1(y)\leq P(y)$. بالتعريف، f_1 خطي ويحقق

$$\forall x\in G, f_1(x)=f(x),$$

نبين المتباينة (١.١.٢)، في حالة $t>0$.
لدينا المتباينة (١.١.٢) مكافئة ل

$$f_1(x+\frac{x_0}{t})\leq p(x+\frac{x_0}{t}),$$

لأن f_1 خطي و $\frac{x_0}{t}\in G$، ومنه المتباينة السابقة مكافئة للمتباينة التالية

$$c+f(\frac{x_0}{t})\leq p(x+\frac{x_0}{t}),$$

بمعنى،

$$p(x+\frac{x_0}{t})-f(\frac{x_0}{t})\geq c. \tag{١.٢.٢}$$

ضِ $t<0$، المتباينة)١.١.٢(مكافئة ل

$$f_1(x+\frac{x_0}{t})\leq p(x+\frac{x_0}{t}),$$

وهذا يبرهن المتباينة التالية:

$$-p(-x-\frac{x_0}{t})-f(\frac{x_0}{t})\leq c. \tag{١.٢.٣}$$

ومنه، للوصول إلى النتيجة المرجوة، يكفي إظهار وجود c الذي يتحقق (٢.١.٢)و (٣.١.٢). من أجل $x', x''\in G$، لدينا

$$f(x'')-f(x')\leq p(x''-x')=p\big((x''+x')-(x'+x)\big)\leq p(x''+x)+p(-x'-x),$$

بمعنى

$$-f(x'')+p(x''+x)\geq -f(x')+p(x'+x).$$

نضع

$$c'=\sup_{x'\in G}(-f(x')-p(x'-x)),\quad c''=\sup_{x''\in G}(-f(x'')-p(x''+x)),$$

c' و c'' موجودين و $(c'\leq c'')$، أيضا f_1 معرفة ب $f_1(tx+x_0)=tc+f(x_0)$ هي شكل خطي على G_1' وفي نفس الوقت تمديد ل f على G_1' يحقق

$$f_1(tx+x_0)\leq p(tx+x_0),$$

إذن $\forall y\in G_1, f_1(y)\leq p(y)$.
الآن لإثبات النظرية لدينا الحالتان التاليتان:

(١). هناك مجموعة عدودة تولد مساحة E، بمعنى $E=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$،
إذن يوجد تمديد f_1 ل f على G_1 و f_2 لَ f_1 على G_2...الخ. بالتراجع نصل الى أن f_n تمديد ل f على G_n وتحقق

$$\forall y\in G_n, f_n(y)\leq p(y),$$

لأن $E=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$، إذن يوجد تمديد f^* ل f على E يحقق

$$\forall x\in E, f^*(x)\leq p(x).$$

(٢). في الحالة العامة، نشير بى A_{G_n} لمجموعة كل التمديدات الممكنةَ تُس g ل f والتي تحقق:

$$\forall x\in E, g(x)\leq p(x).$$

نعرف على A_{G_n} العلاقة $\prec$، من أجل كل $f_1,f_2\in A_{G_n}$ رَ

$$f_1\prec f_2 \Leftrightarrow \begin{cases} G_1\subset G_2,\\ \forall x\in G, f_1(x)=f_2(x)\end{cases}$$

العلاقة $\prec$ علاقة ترتيب جزئي.
ليكن $(f_i)_{i\in I}$ مجموعة مرتبة من A_{G_n}، واضح أن f' معرفة على $G'=\cup_{i\in I}G_i$ و G_i مجموعة تعريف f_i والتي تحقق

$$\forall x\in G_i, f'(x)=f_i(x), i\in I$$

تنتمي الى A_{G_n} وهي عنصر أعظمي ل (f_i). بإستعمال توطئة $Zorn$ المجموعة $(f_i)'$ تملك عنصر أعظمي f^* في A_{G_n}.
سنبين أن f'هو الامتداد المرغوب في النظرية، لذلك يكفي إظهار أن f^* مُعرّف على E إجمالي عدد صحيح.
بالتناقض، نفرض أن f^* غير معرّف على E بالكامل، إذًن يوجد امتداد لـ f^* وهذا يناقض أن f^* هو العنصر الأعظمي.

وبالتالي، يوجد شكل خطي f^* معرف على E ويحقق:

$$\begin{cases} \forall x\in G, f^*(x)=f(x),\\ \forall x\in E, f^*(x)\leq p(x)\end{cases}$$

■

نظرية ٢.١.٢ ليكن E فضاء شعاعي حقيقي و G فضاء شعاعي جزئي من E و f شكل خطي على G. إذن، f يملك تمديد $\tilde{f}$ على E مع $\|\tilde{f}\|_{E^*}=\|f\|_{G^*}$.

البرهان. فقط نأخذ $p(x)=\|f\|_G\|x\|$ ونطبق نظرية هان بناخ نصل الى النتيجة المطلوبة.■

نتيجة ١.١.٢ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ، من أجل كل $x\neq 0$ من E يوجد $f\in E^*$، بحيث $f(x)=\|x\|$ ث $\|f\|=1$.

البرهان. نأخذ $G = \mathbb{K}x$ و $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$.
إذن ليكن $G = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$. نعرف الشكل الخطي $f(x) = f(tx_0) = t\|x_0\|$. واضح أن $f(x_0) = \|x_0\|$ و

$$\|f(x)\| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$$

$$\to \|f\|_G = 1.$$

■

نتيجة ٢.١.٢ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ومن أجل كل $x \in E$ و $f \in E^*$، لدينا

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |fx| = \max_{\|f\| \leq 1} |fx|.$$

البرهان. لدينا

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |fx| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|.$$

علاوة على ذلك ، فإنه يوجد f_0 يحقق $f_0(x) = \|x\|$ ت $\|f_0\| = 1$. نضع $f = \frac{1}{\|x\|} f_0(x)$، فنتحصل على

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |fx| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \frac{f_0(x)}{\|x\|} \leq 1$$

$$\to \|f\|.$$

■

نتيجة ٣.١.٢ من أجل $f \in E^*$ نكون $f(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

البرهان. إذا كان $x = 0$، واضح أن $f(x) = 0$.
إذا كان $f(x) = 0$ فإنه من أجل $f \in \overline{B}(0,1) \subset E^*$، لدينا

$$\|f(x)\| = 0 \to \sup \|f(x)\| = \|x\| = 0.$$

■

٢.١.٢ نظرية هان بناخ المركبة

نظرية ٣.١.٢ ليكن E فضاء شعاعي على حقل
$\mathbb{C}$ و G فضاء جزئي من E و p دالة معرفة على E تحقق الشروط التالية:

(١). $\forall x \in E, p(x) \geq 0$؛

(٢). $\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$؛

(٣). $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

إذا كان f شكل خطي على G، بحيث من أجل كل $x \in G$ و$f(x) \leq p(x)$، يوجد شكل خطي مركب $\tilde{f}$ يحقق $\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x)$ بـ $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

البرهان. وفقاً للفرضية لدينا:

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

حيث g و h شكلان خطيان حقيقيان. من ناحية أخرى من أجل كل $x \in G$، لدينا

$$f(x) = g(ix) + ih(x) = ig(x) - h(x)$$
$$= if(x)$$

ومنه، من أجل $x \in G$، لدينا $h(x) = -g(ix)$.
حسب نظرية هان بناخ الحقيقية يود تمديد
$\tilde{g}$ لـ g على E يحقق

$$\forall x \in G, \tilde{g}(x) \leq p(x)$$
$$\Rightarrow -\tilde{g}(x) = \tilde{g}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$
$$\Rightarrow |\tilde{g}(x)| \leq p(x)$$

نعرف $\tilde{f}$ كالتالي

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{ig}$$

لكن

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{g}(ix) - i\tilde{g}(-x)$$
$$= \tilde{g}(ix) + i\tilde{g}(x) = i\tilde{f}(x).$$

إذن، $\tilde{f}$ شكل خطي عقدي. من أجل كل $x \in G$، لدينا

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = g(x) - ig(ix)$$
$$= g(x) + ih(x) = f(x).$$

ومنه $\tilde{f}$ هو امتداد لـ f. الآن، نثبت أن

$$\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x).$$

بالفعل، نستعمل الشكل الأسي لعدد مركب، فنجد

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = re^{-i\theta}$$
$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = r = e^{i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(xe^{i\theta}).$$

القيمة الأخيرة إيجابية حقيقية ، ولدينا أيضاً

$$\tilde{f}(xe^{i\theta}) = \tilde{g}(xe^{i\theta}) - i\tilde{f}(xe^{i\theta})$$
$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(xe^{i\theta}) = |\tilde{g}(xe^{i\theta})|$$
$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = |\tilde{g}(xe^{i\theta})| \leq p(xe^{i\theta} = e^{i\theta}p(x).$$

وبالتالي، $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. ■

٢.٢ الشكل الهندسي لنظرية هان بناخ

نظرية ١.٢.٢ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي. وليكن C و G جزئين منفصلين وغير خاليين من E بحيث C تكون محدبة ومغلقة و

G محدبة ومتراصة. إذن، يوجد شكل خطي ومستمر $\varphi \in E^*$ بحيث:

$$\sup_{x \in C} Re\varphi(x) < \inf_{y \in G} Re\varphi(y).$$

٣.٢ تمارين

التمرين الأول: ليكن E و F فضائين شعاعيين و $T : E \to F$ خطي.

أثبت أن T مستمر إذا وفقط إذا كان من أجل كل $f \in F^*,$ لدينا $f \circ T \in E^*$.

التمرين الثاني: ليكن E فضاء شعاعي نظيمي، Fفضاء جزئي مغلق من E و $x_0 \in E/F$.

أثبت أنه يوجد $\varphi \in E^*$، بحيث $\|\varphi\| = 1$ ومن أجل كل $x \in F, \varphi(x) = 0$.

التمرين الثالث: ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و F ُن فضاء شعاعي جزئي من E.

(١). أثبت أن $\overline{F} = \cap\{\ker f, f \in E^*, F \subset \ker f\}$.

(٢). استنتج أن F كثيف في E إذا وفقط إذا كان من أجل كل شكل خطي ومستمر من E الذي ينعدم على F ينعدم على Eو $\overline{F} = E \Leftrightarrow F^{\perp}$.

التمرين الرابع:

ليكن F،E فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E, F)$. نذكر أنه يوجد $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$، يسمى مرافق T، بحيث $T^*\psi(x) = \psi(Tx)$، من أجل كل $\psi \in F^*$ ت $x \in E$.

(١). أثبت أن TE كثيف في F إذا وفقط إذا كان T^* متباين.

(٢). أثبت أنه إذا كان T غامر، فإنه يوجد $c > 0$، بحيث $\|T^*\psi\| \geq \|\psi\|, \forall\psi \in F^*$.

التمرين الخامس: أثبت أنه يوجد $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ بحيث يوجد $(x_n) \subset \ell^\infty$، يحقق

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n \leq \varphi(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n.$$