Université d'El-Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
1-ère année master Mathématiques
Calcul différentiel

Série d'exercices n3

Exercice 1.
Soient $E = C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et

$$U = \{\varphi \in E / \varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]\}.$$

1. Montrer que U est un ouvert de E.
2. Soit $f : U \times U \to E$ l'application définie par

$$f(\varphi, \psi) = \varphi\psi - 1.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites à f, montrer que l'application

$$\theta : U \to U,\ \varphi \mapsto \frac{1}{\varphi}$$

est de classe C^1 sur U.

Exercice 2.
Soient $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $\varphi : E \to E,\ f \mapsto \sin \circ f$ une application.
1. Montrer que φ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $\varphi \in C^1(E)$.
3. On pose

$$F =]-\infty, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty[\quad \text{et} \quad U = \{f \in E / f(x) \notin F\, \forall x \in [0, 1]\}.$$

3.1. Montrer que U est un ensemble ouvert de E.
3.2. Montrer que $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 3.
Soient $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$F = C_0^1([0, 1], \mathbb{R}) = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$$

munis respectivement des normes $\|.\|_\infty$ et $\|f\|_1 = \|f'\|_\infty$, $f \in F$. Notons que $(F, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.
1. Considérons l'application

$$\varphi : F \to E,\ f \mapsto f' + ff'.$$

Montrer que $\varphi \in C^1(F, E)$ et calculer $D\varphi(f)$ pour tout $f \in F$.
2. Montrer que φ est un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert U_{0_F} de $0_F \in F$ dans $\varphi(U_{0_F})$.

Exercice 4.
Soient $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ munis respectivement des normes $\|f\|_E = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in E$ et $\|.\|_F \|.\|_\infty$, et $\varphi : E \to F \times \mathbb{R},\ f \mapsto (f' + f^3, f(0))$ une application.
1. Montrer que $\varphi \in C^1(E, F \times \mathbb{R})$ et calculer $D\varphi(0_E)$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in F$, $\|g\|_\infty < \varepsilon$, il existe une fonction $y \in E$ solution du problème $y' + y^3 = g$, $y(0) = 0$.

Exercice 1.

1. Montrons que

$$C_E U = \{\varphi \in E / \, \exists x \in [a,b] : \varphi(x) = 0\}$$

est un fermé de E. Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_E U$ une suite convergente vers $\varphi \in E$. Donc,

$$\lim_{j\to+\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_\infty = \lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_j(x) - \varphi(x)| = 0 \tag{1}$$

et

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists x_j \in [a,b] : \quad \varphi_j(x_j) = 0. \tag{2}$$

L'intervalle $[a,b]$ étant compact, il existe une sous-suite $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $x \in [a,b]$ tels que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{j_k} = x$$

et comme φ est continue,

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(x_{j_k}) = \varphi(x). \tag{3}$$

On a

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\varphi(x) - \varphi(x_{j_k}) + \varphi(x_{j_k}) - \varphi_{j_k}(x_{j_k}) + \varphi_{j_k}(x_{j_k})| \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_{j_k})| + |\varphi(x_{j_k}) - \varphi_{j_k}(x_{j_k})| + \underbrace{|\varphi_{j_k}(x_{j_k})|}_{=0\,(\text{d'après}(2))} . \end{aligned} \tag{4}$$

En utilisant (1), (3) et (4), on obtient

$$0 \leq |\varphi(x)| \leq \lim_{k\to+\infty} |\varphi(x) - \varphi(x_{j_k})| + \lim_{k\to+\infty} |\varphi(x_{j_k}) - \varphi_{j_k}(x_{j_k})| = 0.$$

Alors, $\varphi(x) = 0$, $\varphi \in C_E U$ et $C_E U$ est fermé. Donc, U est ouvert.

2. Soit $\varphi_0 \in U$. On a

- E est un espace de Banach,
- U est un ouvert de E (d'après la question 1),
- $(\varphi_0, \frac{1}{\varphi_0}) \in U \times U$ et $f(\varphi_0, \frac{1}{\varphi_0}) = 0$,
- $D_2 f(\varphi_0, \frac{1}{\varphi_0}) : E \to E$, $\psi \mapsto \varphi_0 \psi$ appartient à Iso(E) d'inverse

$$(D_2 f(\varphi_0, \frac{1}{\varphi_0}))^{-1} : E \to E, \, \psi \mapsto \frac{\psi}{\varphi_0}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert de φ_0, $U_{\varphi_0} \subset U$, un voisinage ouvert de $\frac{1}{\varphi_0}$, $V_{\frac{1}{\varphi_0}} \subset U$ et une application de classe C^1, $\rho : U_{\varphi_0} \to V_{\frac{1}{\varphi_0}}$ tels que

$$\forall \varphi \in U_{\varphi_0} : \quad \rho(\varphi) = \frac{1}{\varphi}.$$

Comme $\theta = \rho$ sur U_{φ_0} et φ_0 est arbitraire, on déduit que $\theta \in C^1(U)$.

Exercice 2.

1. Soit $f \in E$. En utilisant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction sin, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $\theta_x := \theta(x) \in]0,1[$ tel que

$$\sin(f(x) + h(x)) - \sin(f(x)) = h(x)\cos(f(x)) - \frac{h^2(x)}{2} \sin(f(x) + \theta(x)h(x)).$$

On choisit

$$\forall h \in E, \quad D\varphi(f)(h) = h \cos \circ f$$

et

$$o(h) = -\frac{h^2}{2} \sin \circ (f + \theta h).$$

Comme $D\varphi(f) \in \mathcal{L}(E)$ et $\lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0$, l'application φ est différentiable en $f \in E$ et sa différentielle est

$$\forall h \in E, \quad D\varphi(f)(h) = h \cos \circ f.$$

L'application φ est différentiable sur E puisque f est arbitraire.

2. Comme φ est différentiable sur E, il suffit de montrer que $D\varphi : E \to \mathcal{L}(E)$ est continue. Soient $u, v \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|h(\cos \circ v - \cos \circ v)\|_\infty \\
&\leq \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|h\|_\infty \| \cos \circ v - \cos \circ v\|_\infty \\
&\leq \| \cos \circ v - \cos \circ v\|_\infty,
\end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|v - v\|_\infty$$

puisque la fonction cos est 1-lipschitzienne. Cela signifie que $D\varphi$ est 1-lipschitzienne, donc, elle est continue. On conclut que $\varphi \in C^1(E)$.

3.

3.1. Montrons que $C_E U = \{f \in E / \exists x \in [0,1] : f(x) \in F\}$ est un ensemble fermé de E. Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_E U$ une suite admettant une limite $\varphi \in E$. Donc,

$$\lim_{j \to +\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_\infty = 0 \tag{5}$$

et

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists x_j \in [0,1] \text{ tel que } f_j(x_j) \in F.$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une sous-suite $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $x \in [0,1]$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} x_{j_k} = x. \tag{6}$$

On a

$$\begin{aligned}
|f_{j_k}(x_{j_k}) - f(x)| &= |f_{j_k}(x_{j_k}) - f(x_{j_k}) + f(x_{j_k}) - f(x)| \\
&\leq |f_{j_k}(x_{j_k}) - f(x_{j_k})| + |f(x_{j_k}) - f(x)|.
\end{aligned} \tag{7}$$

En utilisant (5), (6), (7) et la continuité de φ, il vient

$$0 \leq \lim_{k \to +\infty} |f_{j_k}(x_{j_k}) - f(x)| \leq \lim_{k \to +\infty} |f_{j_k}(x_{j_k}) - f(x_{j_k})| + \lim_{k \to +\infty} |f(x_{j_k}) - f(x)| = 0.$$

D'où, $\lim_{k \to +\infty} f_{j_k}(x_{j_k}) = f(x)$. Par conséquent, $f(x) \in F$ puisque $f_{j_k}(x_{j_k}) \in F$ et F est fermé. Donc, $f \in C_E U$ et U est ouvert.

3.2. On a

- E est un espace de Banach,

• U est un ensemble ouvert de E et $\varphi \in C^1(U)$ (d'après les questions 1, 2 et 3.1),
• φ est injective sur U,
• pour tout $f \in U$, l'application $D\varphi(f) : E \to E$, $h \mapsto h \cos \circ f$ appartient à Iso(E) et $(D\varphi(f))^{-1}$: $E \to E$, $k \mapsto \frac{k}{\cos \circ f}$.
D'après le théorème d'inversion globale $\varphi(U)$ est un ensemble ouvert de E et $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un difféomorphisme (de classe C^1).

Exercice 3.

1. Soit $f \in F$. Nous avons

$$\varphi(f+h) - \varphi(f) = h' + fh' + hf' + hh'.$$

On choisit

$$\forall h \in F, \quad D\varphi(f)(h) = h' + fh' + hf'$$

et

$$o(h) = hh'.$$

Remarquons que si $g \in F$,

$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt,$$

ce qui nous conduit à

$$\|g\|_\infty \leq \|g\|_1. \tag{8}$$

En utilisant (8), on peut vérifier que $D\varphi(f) \in \mathcal{L}(F,E)$ et $\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_1} = 0$. Donc, φ est différentiable en f et

$$\forall h \in F, \quad D\varphi(f)(h) = h' + fh' + hf'.$$

Montrons que $D\varphi : F \to \mathcal{L}(F,E)$ est de continue. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(F,E)} &= \sup_{\|u\|_1 \leq 1} \|h' + vh' + hv' - h' - uh' - hu'\|_\infty \\
&= \sup_{\|u\|_1 \leq 1} \|(v-u)h' + h(v-u)'\|_\infty \\
&\leq \sup_{\|u\|_1 \leq 1} \{\|(v-u)h'\|_\infty + \|h(v-u)'\|_\infty\} \\
&\leq \sup_{\|u\|_1 \leq 1} \{\|(v-u)h'\|_\infty + \|h(v-u)'\|_\infty\} \\
&\leq 2 \sup_{\|u\|_1 \leq 1} \{\|(v-u)\|_1 \|h\|_1\} \leq 2\|(v-u)\|_1,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $D\varphi$ est lipschitzienne de rapport 2. D'où la continuité de $D\varphi$. On conclut que $\varphi \in C^1(F,E)$.

2. On a
• $(F, \|.\|_1)$ et $((E, \|.\|_\infty)$ sont de Banach,
• $\varphi \in C^1(F,E)$,
• $D\varphi(0_F) : F \to E$, $h \mapsto h'$ appartient à Iso(F,E) d'inverse

$$(D\varphi(0_F))^{-1} : E \to F, \, k \mapsto l,$$

où

$$\forall x \in [0,1], \quad l(x) = \int_0^x k(t)dt.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert U_{0_F} de F contenant 0_F tel que φ : $U_{0_F} \to \varphi(U_{0_F})$ est un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 4.

1. Considérons $\varphi_1 : E \to F$, $f \mapsto f' + f^3$ et $\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Soit $f \in E$. On a

$$\varphi_1(f+h) - \varphi_1(f) = h' + 2f^2h + 2h^2f + h^3.$$

On choisit

$$\forall h \in E, \ \ D\varphi_1(f)(h) = h' + 2f^2h \quad \text{et} \quad o(f) = h^3 + 2h^2f.$$

Comme $D\varphi_1(f) : E \to F$ est linéaire et continue, et $\lim_{\|f\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$, l'application φ_1 est différentiable en f et sa différentielle est $D\varphi_1(f) : E \to F$, $h \mapsto h' + 2f^2h$. En outre, φ_2 est différentiable, de différentielle $D\varphi_2(f) = \varphi_2$ puisque $\varphi_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. On déduit que φ est différentiable sur E et

$$\forall f, h \in E, \quad D\varphi(f)(h) = (h' + 2f^2h, h(0)).$$

En particulier,

$$\forall h \in E, \quad D\varphi(0_E)(h) = (h', h(0)).$$

Montrons que $D\varphi : E \to \mathcal{L}(E, F \times \mathbb{R})$ est continue. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite admettant une limite $f \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\|D\varphi(f_j) - D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F\times\mathbb{R})} &= \sup_{\|u\|_E \le 1} \|(h' + 2f_j^2h, h(0)) - (h' + 2f^2h, h(0))\|_{F\times\mathbb{R}} \\
&= 2 \sup_{\|u\|_E \le 1} \|h(f_j^2 - f^2)\|_F \\
&\le 2\|(f_j - f)(f_j + f)\|_F \sup_{\|u\|_E \le 1} \|h\|_F \\
&\le 2\|f_j - f\|_F \|f_j + f\|_F.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{j\to+\infty} \|f_j - f\|_F = 0,$ la suite $(\|f_j + f\|_F)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc,

$$0 \le \lim_{j\to+\infty} \|D\varphi(f_j) - D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F\times\mathbb{R})} \le 2 \lim_{j\to+\infty} (\|f_j - f\|_F \|f_j + f\|_F) = 0.$$

ce qui montre que $\lim_{j\to+\infty} \|D\varphi(f_j) - D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F\times\mathbb{R})} = 0$ et $D\varphi$ est continue. On conclut que $\varphi \in C^1(E, F \times \mathbb{R})$.

2. D'abord, montrons que $D\varphi(0_E) \in Iso(E, F \times \mathbb{R})$. On a $D\varphi(0_E) \in \mathcal{L}(E, F \times \mathbb{R})$. En outre, si $h, k \in E$ tels que

$$h' = k', \tag{9}$$
$$h(0) = k(0) \tag{10}$$

on obtient $h = k$ en intégrant (9) de 0 à $x \in [0, 1]$ et utilisant (10). Ceci montre que $D\varphi(0_E)$ est injective. De plus, $D\varphi(0_E)$ est surjective puisque si $(g, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$, il existe $h \in E$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad h(x) = \lambda + \int_0^x g(t)dt$$

telle que $D\varphi(0_E)(h) = (g, \lambda)$. Donc, comme l'inverse de $D\varphi(0_E)$,

$$(D\varphi(0_E))^{-1} : F \times \mathbb{R} \to E, \ (g, \lambda) \mapsto h,$$

est continue, on déduit que $D\varphi(0_E) \in Iso(E, F \times \mathbb{R})$.
Maintenant, on a
- $(E, \|.\|_E)$ et $(F \times \mathbb{R}, \|(.,.)\|_{F\times\mathbb{R}} = \|.\|_F + |.|)$ sont de Banach,
- $\varphi \in C^1(E, F \times \mathbb{R})$,
- $D\varphi(0_E) \in Iso(E, F \times \mathbb{R})$ et $\varphi(0_E) = 0_{F\times\mathbb{R}}$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert U_{0_E} contenant 0_E et un ouvert $U_{0_{F\times\mathbb{R}}}$ contenant $0_{F\times\mathbb{R}}$ tels que φ se restreigne en une bijection de U_{0_E} dans $U_{0_{F\times\mathbb{R}}}$ dont la réciproque est de classe C^1. En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$g \in F,\ \|g\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow (g, 0) \in U_{0_{F\times\mathbb{R}}} \Rightarrow \exists y \in U_{0_E} :\ \varphi(y) = (g, 0).$$

Donc, y est une solution de $y' + y^3 = g$, $y(0) = 0$.