

I - تعريفات

1- تعريف المصفوفة: ليكن  $K$  حقلًا تبديليًا ( $\mathbb{R}$  أو  $\mathbb{C}$ ).  $n, p$  من  $\mathbb{N}^*$ .  
نسمى مصفوفة  $A$  ذات سلكيات في  $K$  من النمط  $(n \times p)$ ، الجبرول التالي

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq j \leq p$$

• السلكيات التي لها نفس الدليل الأول تُسمى السطر رقم  $i$

• السلكيات التي لها نفس الدليل الثاني تُسمى العمود رقم  $j$

• نرمز لمجموعة المصفوفات من النمط  $n \times p$  سلكيات في  $K$  بالرمز  $M_{n \times p}(K)$

مثال:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3i & -2 \\ 4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

$A$  مصفوفة تنتمي إلى  $M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$

$$a_{23} = -10, \quad a_{21} = 4, \quad a_{12} = 3i$$

2. المصفوفة المعروفة من النمط  $n \times p$ :

هي المصفوفة  $(a_{ij})$  من  $M_{n \times p}(K)$  حيث كل السلكيات  $a_{ij}$  معروفة.

ويرمز لها بالرمز:  $O_{n \times p}(K)$

3. تساوي مصفوفتين:

لتكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين من  $M_{n \times p}(K)$ ،  $A = (a_{ij})$ ،  $B = (b_{ij})$

$$A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p: a_{ij} = b_{ij}$$

## 4 - متقول مصفوفة:

ليكن المصفوفة  $A = (a_{ij})$  من  $M_{n \times p}(K)$  متقول المصفوفة  $A$  هي المصفوفة التي يرمز لها بالرمز  $A^t$  والتي تنتمي إلى  $M_{p \times n}(K)$  الناتجة بتغيير أسطر  $A$  إلى أعمدة.

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a_{ji}).$$

$$1 \leq i \leq n.$$

$$1 \leq j \leq p.$$

$$1 \leq j \leq p.$$

$$1 \leq i \leq n.$$

## 5 - أنواع المصفوفات:

المصفوفة المربعة هي مصفوفة  $A$  من  $M_{n \times p}(K)$  حيث  $n = p$ .

يُرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بالرمز  $M_n(K)$ .

$$A = (a_{ij}) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة  $A$  من  $M_n(K)$  هي السطريات  $a_{ii}$  حيث  $1 \leq i \leq n$ .

المصفوفة المثلثية العلوية هي مصفوفة  $A$  مربعة من  $M_n(K)$  حيث

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : (j < i \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

المصفوفة المثلثية السفلية هي مصفوفة  $A$  مربعة من  $M_n(K)$  حيث

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : (j > i \Rightarrow a_{ij} = 0).$$

المصفوفة القطرية هي مصفوفة  $A$  مربعة من  $M_n(K)$  حيث

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : (j \neq i \Rightarrow a_{ij} = 0).$$

المصفوفة الحيارية هي مصفوفة قطرية حيث كل عنصر  $a_{ii}$  من القطر الرئيسي

يساوي 1 ويرمز لها بالرمز  $I_n$ .

أمثلة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

مربعة

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

مُثلثية علوية

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

مُثلثية سفلية

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

قطرية

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

حيادية

### II - العمليات على المصفوفات؟

#### 1 - جمع المصفوفات:

$A = (a_{ij})$ ;  $B = (b_{ij})$ ,  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$  مصفوفتان من نفس المجموعة  
مجموع المصفوفتين  $A$  و  $B$  هو المصفوفة  $C$  من نفس النمط  $(n \times p)$ .

$$C = A + B = (c_{ij}) ; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ مثال}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

#### 2 - ضرب مصفوفة في سكالر:

لتكن  $A$  مصفوفة من  $M_{n \times p}(\mathbb{K})$  و  $\alpha$  من  $\mathbb{K}$ . نفي المصفوفة  $\alpha A$ .

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}; -2A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -10 \end{pmatrix}, \text{ مثال}$$

خواص: ليكن  $A, B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$  و  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . لدينا الخواص التالية:

- $A + B = B + A$ .
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O_{n \times p} = A$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .
- $1_K \cdot A = A$

### 3- الجداء المصفوفي:

ليكن المصفوفتان:  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ;  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$   
ضرب المصفوفتين  $A$  و  $B$  هو المصفوفة  $C \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$

$$A \times B = C = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix} \quad \text{حيث}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{مثال}$$

الجداء  $C = A \times B$  معرف لأن:  $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

$$C = (c_{ij}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ شتم الى اللجوء}$$

$$c_{11} = 3(0) + 1(2) + 0(3) = 2$$

$$c_{12} = 3(-2) + 1(4) + 0(1) = -2$$

$$c_{21} = 2(0) + 5(2) + 4(3) = 22$$

$$c_{22} = 2(-2) + 5(4) + 4(1) = 20$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{مثال:}$$

عثر  $A \times B$  و  $B \times A$ .

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظات: من المثال السابق نلاحظ:

• الجداء المصفوفي ليس تبديليا:  $A \times B \neq B \times A$

• قد يكون الجداء  $A \times B = 0$  من غير أن يكون  $A=0$  أو  $B=0$ .

خواص الجداء المصفوفي:

$$\bullet A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

$$\bullet A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

$$(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A).$$

$$\bullet \alpha (A \times B) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$$

$$\bullet A \times I_n = A, \quad I_m \times A = A; \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}).$$

4 - قوة مصفوفة:

ليكن  $A$  مصفوفة مربعة من  $M_n(\mathbb{K})$  و  $p$  عدد طبيعي.

$$A^2 = A \times A, \quad A^1 = A, \quad \text{ولدينا } A^0 = I_n$$

$$A^p = A \times A \times \dots \times A \quad (p \text{ مرة})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تطبيق: ليكن المصفوفة التالية

$$A^4, A^3, A^2$$

1- اكتب

2- استنتج  $A^n$  من أجل  $n \in \mathbb{N}$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{الحل 1}$$

مما سبق نستنتج أنه

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

ويمكن أن نبين هذا على صحتها بالتراجع .

ملاحظة : في أجل  $A, B$  من  $M_n(K)$ .

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^3 \neq A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

### III - المحددات : Determinants

① تعريف : لنكن المصفوفة المربعة  $A$  من  $M_n(K)$

محدد المصفوفة  $A$  ( التي نرمز له بالرمز  $\det(A)$  أو  $|A|$  ) هو السكلمي من  $K$

المعرف كما يلي :

• إذا كان :  $n=1$  فإن  $A = (a_{11})$  فإن  $\det(A) = a_{11}$

• إذا كان :  $n > 1$  فإن :  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \dots (*)$

حيث  $\Delta_{ij}$  هو المحدد للمصفوفة من  $M_{n-1}(K)$  الناتجة عن  $A$

بتزيع السطر  $i$  والعمود  $j$

ملاحظة : يمكن حساب المحدد للمصفوفة  $A$  بتثبيت أي سطر نختاره

وفق العلاقة (\*), ويمكن حسابه بتثبيت أي عمود نختاره .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

مثال 1: (حساب المحدد من أجل  $n=2$ )

لنستخدم العلاقة (\*) ونثبت السطر الأول

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \Delta_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \Delta_{12} \\ &= a_{11} \det(a_{22}) + (-1) a_{12} \det(a_{21}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

مثال 2: احسب محدد المصفوفة B حيث :  
لنستخدم العلاقة (\*) ونثبت العمود الأول.

$$\det(B) = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2(3 - 4) + 1(0 - 2)$$

$$= 0 - 2(-1) + 1(-2) = 0$$

2- نتائج :

- إذا كانت المصفوفة مثلثية أو قطرية فإن محددها يساوي حاصل عناصر القطر الرئيسي.
- إذا انعدم سطر أو عمود في المصفوفة المربعة فإن محددها معدوم.
- إذا تناسب عناصر سطرين (أو عمودين) فإن المحدد معدوم.

أمثلة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

A مثلثية علوية ومنه محددها :  $\det A = 1(-3)(2) = -6$

B قطرية ومنه محددها :  $\det B = 2(1)(-1) = -2$

السطر الأول ل C معدوم ومنه :  $\det C = 0$

العمود 1 والعمود 3 ل D متساويان :  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

ومنه معدم المصفوفة ل D :  $\det D = 0$

3. خواص:  $A, B \in M_n(K)$  ,  $\lambda \in K$ .

$$\det(A+B) = \det A + \det B.$$

$$\det(A^t) = \det A.$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

4. قاعدة ساروس  $Sarrus$  لحساب محدد مصفوفة من  $M_3(K)$

لتكن المصفوفة المربعة  $A \in M_3(K)$  :  $A = (a_{ij})$ .

تعتمد هذه القاعدة على إختصار كتابة السطرين الأولين في الأسفل أو العمودين الأولين على يمين المصفوفة وسباب المحرر يكون كالآتي

$$\begin{array}{ccccc} & + & + & + & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال : احسب بطريقتين محدد المصفوفة  $A$  حسب:

$$\det A = 1(3)(1) + 0(4)(0) + 2(2)(1) - 0(3)(1) - 0(2)(1) - 2(4)(1) = -1$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 8 + 4 - 0 = -1$$

IV - مقلوب مصفوفة مربعة

① تعريف : لتكن المصفوفة  $A \in M_n(K)$  , نقول إن  $A$  قابلة للعكس أو عكوسة

إذا وجدت مصفوفة وحيدة  $B \in M_n(K)$  تحقق :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

نرمز لمقلوب المصفوفة  $A$  بالرمز  $A^{-1}$ .

مثال 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

لاحظ أن:  $A^{-1} = B$  ومنه  $A \times B = B \times A = I_2$

ترميز: نرمز لمجموعة المصفوفات في  $M_n(K)$  بالرمز  $GL_n(K)$

نظرية: (وجود مقلوب مصفوفة)

لتكن المصفوفة  $A$  في  $M_n(K)$ .

$A$  قابلة للعكس إذا وفقط إذا كان  $\det A \neq 0$

$$\text{مثال 2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A$  قابلة للعكس لأن  $\det A = -2 \neq 0$

بينما  $B$  ليس قابل للعكس لأن  $\det B = 0$

2- تعين مقلوب مصفوفة مربعة

لتكن المصفوفة  $A$  في  $M_n(K)$  حيث  $\det A \neq 0$

مقلوب المصفوفة  $A$  هو  $A^{-1}$  ويعين بهذا القانون:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C_{ij})$$

$$(C_{ij}) = (\text{adj}(A))^t; \quad \text{adj}(A) = (S_{ij}); \quad S_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji}$$

$\Delta_{ji}$  هو محدد المصفوفة في الرتبة  $(n-1)$  الناتجة عن حذف السطر  $j$  والعمود  $i$

$$\det A \neq 0$$

$$\text{sup } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مثال 1:

• لا بد أولاً من تعيين  $(\delta_{ij})$

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (1) \cdot d = d.$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \Delta_{12} = (-1) \cdot c = -c.$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = (-1) \cdot b = -b.$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = (1) \cdot a = a.$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A) = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (C_{ij}) = (\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (C_{ij}) \quad \text{أخيراً مقلوب A هو}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{تطبيق عدد مقلوب المصفوفة}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{هنا:}$$

مثال 2: لنكن المصفوفة A من  $M_3(\mathbb{R})$  التالية،

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

عين مقلوب المصفوفة A

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 8 + 6 - 0 - (-4) - 0 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} (\text{adj}(A))^t.$$

$$\delta_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1) = -1$$

$$\delta_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2. \Rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(3) = 3.$$

$$\delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2.$$

$$C = (\text{adj}(A))^t$$

$$\delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4.$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(4) = -4.$$

$$\delta_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4$$

أخيراً

$$\delta_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-10) = 10.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C.$$

$$\delta_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(12) = 12.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1,5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3- خواص: لنكن  $A$  و  $B$  مصفوفتين في  $M_n(K)$  وفي  $GL_n(K)$

$$1) (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$2) (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$3) \forall p \in \mathbb{N}: A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{p \text{ مرة}}.$$

البرهان على الخاصية 2:

$$\begin{aligned} (A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) &= A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1} \quad \text{لدينا} \\ &= A \times I_n \times A^{-1} \\ &= A \times A^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

ومنه يتقارب  $A \times B$  هو  $B^{-1} \times A^{-1}$  وهو المطلوب.

تطبيق:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

احسب  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ ,  $(A \times B)^{-1}$ , و  $A^{-3}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \text{لنكن للمصفوفة المربعة } A \text{ التالية}$$

$$(1) \quad \text{تأكد أن } A^2 - A = 2I_3 \text{ واستنتج } A^{-1}$$

(2) عيّن من جديد  $A^{-1}$  مستخدماً القانون.

الحل : (1) من أجل مصفوفة  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  فإن معكولها هو

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{انظر ص 10})$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ومن}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^2 = A \times A. \quad \textcircled{P} \quad \textcircled{2}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

استنتاج  $A^{-1}$ : لدينا،  $A^2 - A = 2I_3$ .

$$\Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(A)(A - I_3) = I_3.$$

$$\Rightarrow A \cdot \left[\frac{1}{2}(A - I_3)\right] = I_3$$

نستنتج من التعريف ص 8) أن  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$