Département des mathématiques	Université d'Eloued	Module : Modélisation
1ère Master fondamental	Faculté des sciences exactes	2019/2020

Correction de Série des exercices 02

<u>Exercice</u>1:

Un solide déformable est soumis à des états de déformation dont la description lagrangienne est

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + t^2 X_2 \\ x_2 = X_2 + t^2 X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) les composants du vecteur position avant et après déformation dans un repère orthonormé.

1. Détermination de l'équation de la trajectoire de la particule initialement à $X = (1,2,1)$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t^2 \\ x_2 = 2 + t^2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 + \dfrac{1}{4}(x_1 - 1)^2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(x_2 = 2 + \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 \right) \wedge (x_3 = 1)$$

La trajectoire est le parabole dont l'équation $x_2 = 2 + \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2$ située dans un plan d'une équation $x_3 = 1$

2. les composantes de vitesse et d'accélération de la même particule lorsque $t = 2s$

$$\begin{cases} v_1(t) = 4t \\ v_2(t) = 2t \\ v_3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 8 \\ v_2 = 4 \\ v_3 = 0 \end{cases} \; / \; \begin{cases} a_1(t) = 4 \\ a_2(t) = 2 \\ a_3(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice</u>2:

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donné par $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$.

Détermination de la position finale de la particule telle que la position initiale à $(1,0,2)$.

Le vecteur de position initiale de la particule est $\overrightarrow{X} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$. Sa déplacement est $\vec{u} = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$ et comme $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$, Sa vecteur de position finale est $\vec{x} = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3$

<u>Exercice</u>3:

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description

$$v_1 = \frac{x_1}{t}, \; v_2 = \frac{x_2}{t}, \; v_3 = 0$$

1. Détermination sous forme paramétrique de la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant $t_0 > 0$.

Pour trouver la forme paramétrique de la trajectoire de la particule, nous devons résoudre le problème suivant (problème de Cauchy):

$$\frac{\partial x_i}{dt} = v_i \;\text{ avec }\; x_i(t_0) = x_i^0 \;\; (i \in \{1,2,3\})$$

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoudre facilement :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{t} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2}{t} \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dt}{t} \\ \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{dt}{t} \\ x_3 = x_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1 = \ln t + C_1 \\ \ln x_2 = \ln t + C_2 \\ x_3 = x_3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1^0}{t_0} t \\ x_2 = \dfrac{x_2^0}{t_0} t \\ x_3 = x_3^0 \end{cases}$$

La description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t_0 > 0$.

Vu qu'on impose $(X_1, X_2 X_3) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, la représentation lagrangienne du mouvement est alors :

$$x_1 = \frac{X_1}{t_0} t, \; x_2 = \frac{X_2}{t_0} t, \; x_3 = X_3$$

Exercice4:

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{cases} v_1 = a\,t \\ v_2 = b\,x_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

a, b et c étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

1. Détermination sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant $t = 0$.

Pour trouver la forme paramétrique de la trajectoire de la particule, nous devons résoudre le problème suivant (problème de Cauchy): $\dfrac{\partial x_i}{dt} = v_i$ avec $x_i(0) = x_i^0$ $(i \in \{1, 2, 3\})$

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoudre facilement:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a\,t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b\,x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} t^2 + x_1^0 \\ x_2 = \dfrac{ab}{6} t^3 + b\,x_1^0 t + x_2^0 \\ x_3 = c\,t + x_3^0 \end{cases}$$

Vu qu'on impose $(X_1, X_2, X_3) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, la représentation lagrangienne du mouvement est alors:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a\,t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b\,x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} t^2 + X_1 \\ x_2 = \dfrac{ab}{6} t^3 + b\,X_1 t + X_2 \\ x_3 = c\,t + X_3 \end{cases}$$

2. Calcule sous forme paramétrique les lignes de courant de l'écoulement à l'instant arbitraire t_0

Les lignes de courant sont l'enveloppe du champ de vitesse `a un instant déterminé. En d'autres mots il s'agit des courbes tangentes aux vecteurs vitesse à un temps t_0 fixé.

Pour calculer ces lignes de courant, on va photographier le champ de vitesse à l'instant donné t_0, et ensuite calculer les trajectoires pour ce champ de vitesse fictif égal au champ de vitesse réel au temps particulier t_0.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = at_0 \\ \dfrac{dx_2}{ds} = bx_1 \\ \dfrac{dx_3}{ds} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = at_0 s^2 + x_1^0 \\ x_2 = \dfrac{abt_0}{2} s^2 + bx_1^0 s + x_2^0, \quad \text{avec } x_i = x_i^0 \text{ pour s} = 0. \\ x_3 = cs + x_3^0 \end{cases}$$

3. Calcule du champ de vitesse en représentation lagrangienne, en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.

pour calculer l'expression lagrangienne du champ de vitesse $\vec{v}(X_i t)$, on dérive l'expression lagrangienne du vecteur position $\vec{x}$ par rapport au temps:

$$\begin{cases} v_1 = at + X_1 \\ v_2 = \dfrac{ab}{2} t^2 + bX_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

4. Calcule l'accélération des points matériels en représentation eulérienne.

L'accélération $\vec{a}(x_i t)$ d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression eulérienne du champ de vitesse : $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}(x_i,t)}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{v}(x_i,t))\vec{v}(x_i,t)$

Comme $\vec{v} = \begin{pmatrix} at \\ bx_1 \\ c \end{pmatrix}$ donc on a: $\overline{\overline{grad}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On trouve $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}(\vec{v})\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ abt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ abt \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = abt \\ a_3 = 0 \end{cases}$

5. Calcule l'accélération des points matériels en représentation lagrangienne.

L'accélération $\vec{a}(X_i t)$ d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression lagrangienne du champ de vitesse , on trouve directement

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = abt \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Comparaison des solutions obtenues en partant des résultats trouvés en 4 et 5.

Les résultats obtenus à partir des 2 représentations du champ d' accélération sont équivalents.

Remarque: de plus dans ce cas-ci l'expression de l'accélération ne dépend pas des coordonnées, c'est pourquoi on obtient exactement les mêmes expressions.

Exercice5:

On considère un mouvement défini dans la base $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne (ω est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1\cos(\omega t) - X_2\sin(\omega t) \\ x_2 = X_1\sin(\omega t) + X_2\cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calcul du tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, du tenseur des dilatations $\overline{\overline{C}}$, et du tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point X et à l'instant t.

Le terme général de la matrice du tenseur gradient dans la base B est $F_{ij}=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donc on a

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

Pour le tenseur des dilatations, on a $C_{ij}=F_{pi}F_{pj}$ en notation d'Einstein, donc :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t) & \cos(\omega t).\sin(\omega t)-\cos(\omega t).\sin(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t).\sin(\omega t)-\cos(\omega t).\sin(\omega t) & \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B = \overline{\overline{I}}$$

Enfin, on sait que $\overline{\overline{E}}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{C}}-I\right)$ et on a donc $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{0}}$

2. Le tenseur des déformations est nul, on est donc en présence d'un mouvement rigidifiant.

3. Pour un instant t donné, calcule de la dilatation en un point X et dans une direction $\overrightarrow{dX}$

Puisque $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{I}}$, on peut dire que toute direction est direction principale. La dilatation dans une direction quelconque $\overrightarrow{dX}$ vaut donc $\lambda(\overrightarrow{dX})=\sqrt{C_{ii}}=1$

4. Pour un instant t donné, calcule du glissement en un point X et pour deux directions orthogonales $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$.

Pour la même raison, le glissement entre deux directions orthogonales quelconques $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$ vaut:

$$\gamma(\overrightarrow{dX},\overrightarrow{dX'})=\frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}=0$$

5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène ρ_0 à l'instant $t_0=0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant t.

Le jacobien de la transformation est le déterminant de $\overline{\overline{F}}$. On a donc :

$$J=\det(\overline{\overline{F}})=\begin{vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)=1$$

Par conséquent la masse volumique du milieu est constante dans le temps et en tout point.

6. Calcule du champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et du champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées lagrangiennes.

6. Le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$, s'obtient par dérivation matérielle du champ de vecteurs exprimant les positions actuelles des particules : $\vec{V}(X,t) = \dfrac{\partial \vec{x}(X,t)}{\partial t}$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = \omega\left(-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)\right) \\ V_2 = \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = \omega\left(X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t)\right) \\ V_3 = \dfrac{\partial x_3}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

De même, le champ d'accélération s'obtient par $\vec{a}(X,t) = \dfrac{\partial \vec{V}(X,t)}{\partial t}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = \omega^2\left(-X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)\right) \\ a_2 = \dfrac{\partial V_2}{\partial t} = \omega^2\left(-X_1 \sin(\omega t) - X_2 \cos(\omega t)\right) \\ a_3 = \dfrac{\partial V_3}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Ces champs s'expriment en fonction de $\vec{X}$, et sont donc bien en coordonnées lagrangiennes.

7. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées eulériennes.

D'après l'énoncé, les coordonnées actuelles s'obtiennent à partir des coordonnées initiales par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

On isole en particulier les deux premières équations de ce système:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

On cherche à inverser ce système pour exprimer $\vec{X}$ en fonction de $\vec{x}$. On utilise la formule d'inversion d'une matrice 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donc:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}^T$$

Cette matrice est orthogonale, car son inverse est égale à sa transposée. Elle traduit donc une rotation. On en déduit:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) \\ X_2 = -x_1 \sin(\omega t) + x_2 \cos(\omega t) \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

Dans l'expression du champ de vitesse et du champ d'accélération calculés à la question précédente, on peut alors remplacer les coordonnées initiales $\vec{X}$ par leur expression en fonction des coordonnées actuelles $\vec{x}$. On obtient la formulation eulérienne suivante:

$$\begin{cases} V_1 = \omega\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\sin(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\cos(\omega t)\right) \\ V_2 = \omega\left((x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\cos(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\sin(\omega t)\right) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -\omega x_2 \\ V_2 = \omega x_1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \omega^2\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\cos(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\sin(\omega t)\right) \\ a_2 = \omega^2\left(-(x_1\cos(\omega t)+x_2\sin(\omega t))\sin(\omega t)-(-x_1\sin(\omega t)+x_2\cos(\omega t))\cos(\omega t)\right) \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\omega^2 x_1 \\ a_2 = \omega^2 x_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ce dernier résultat pouvait aussi s'obtenir en passant par la formule donnant directement l'accélération par $\vec{a}=\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\overline{\overline{grad}}(\vec{V})\vec{V}$, avec $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$ et:

$$\overline{\overline{grad}}(\vec{V})=\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(B)}$$

8. Calcule des tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(x,t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(x,t)$.

On calcule d'abord le tenseur gradient de vitesse $\overline{\overline{L}}=\overline{\overline{grad}}(\vec{V})$, avec la formule $(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}))_{ij}=\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j}$.

On remarque qu'il s'agit d'un gradient eulérien, donc les dérivations sont effectuées par rapport aux coordonnées actuelles

$$\overline{\overline{L}}=\overline{\overline{grad}}(\vec{V})=\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(B)}$$

Ce tenseur est antisymétrique, on peut donc directement écrire $\overline{\overline{D}}=\overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\Omega}}=\overline{\overline{L}}$. Ces résultats peuvent être retrouvés par le calcul avec les formules:

$$\overline{\overline{D}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}}+\overline{\overline{L}}^T\right) \text{ et } \overline{\overline{\Omega}}=\frac{1}{2}\left(\overline{\overline{L}}-\overline{\overline{L}}^T\right)$$

<u>Exercice</u>6:

On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}}=10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}_{(\vec{E_i})}$$

1. Calcule du vecteur déformation pure dans la direction $\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{E_1}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{E_3}\right)$. Conclusion?

$$\vec{v}_d=\overline{\overline{\varepsilon(M)}}\vec{a}=\frac{10^{-4}}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 4 & 2\\ -3\sqrt{3} & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{10^{-4}}{2}\begin{pmatrix}-8\\0\\-8\sqrt{3}\end{pmatrix}=-4\times10^{-4}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=-4\times10^{-4}\vec{a}$$

2. Calcule des déformations principales et des directions principales de déformations.

Les déformations principales ε sont les valeurs propres du tenseur de déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ donc on a:

$$\begin{vmatrix}1-\varepsilon & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 4-\varepsilon & 2\\ -3\sqrt{3} & 2 & -5-\varepsilon\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow d_3-d_2\varepsilon+d_1\varepsilon^2-\varepsilon^3=0...(I) \text{ où } d_1=tr(\varepsilon),\ d_2=\frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}-\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) \text{ et } d_3=\det(\varepsilon)$$

$$d_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=0$$

$$d_2=\frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}-\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji})=(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33})-(\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}+\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}+\varepsilon_{23}\varepsilon_{32})=(-21-43)10^{-8}=-64\times10^{-8}$$

$$d_3=\det(\varepsilon)=\left(\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}-(-2\sqrt{3})\begin{vmatrix}-2\sqrt{3} & 2\\ -3\sqrt{3} & -5\end{vmatrix}+(-3\sqrt{3})\begin{vmatrix}-2\sqrt{3} & 4\\ -3\sqrt{3} & 2\end{vmatrix}\right)10^{-4}=(-24+96-72)10^{-4}=0$$

$$(I)\Leftrightarrow\varepsilon^3-d_1\varepsilon^2+d_2\varepsilon-d_3=0\Leftrightarrow\varepsilon^3-64\times10^{-8}\varepsilon=0\Rightarrow\varepsilon_1=8\times10^{-4},\ \varepsilon_2=0,\ \varepsilon_3=-8\times10^{-4}\ (\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3)$$

3. Représentation sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformations pure D_k en M dans les directions $\vec{E}_1,\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$.

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_1})=\overline{\overline{\varepsilon}}\overrightarrow{E_1}=10^{-4}\begin{pmatrix}1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 4 & 2\\ -3\sqrt{3} & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=10^{-4}\begin{pmatrix}1\\-2\sqrt{3}\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_2})=\overline{\overline{\varepsilon}}\overrightarrow{E_2}=10^{-4}\begin{pmatrix}1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 4 & 2\\ -3\sqrt{3} & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=10^{-4}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_3})=\overline{\overline{\varepsilon}}\overrightarrow{E_3}=10^{-4}\begin{pmatrix}1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 4 & 2\\ -3\sqrt{3} & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=10^{-4}\begin{pmatrix}-3\sqrt{3}\\2\\-5\end{pmatrix}$$

Chacun de ces vecteurs peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle, afin d'être représentés dans le plan de Mohr. Par exemple, pour le vecteur déformation pure en M dans la direction $\overrightarrow{E_1}$, on peut écrire:

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_1})=D_{n1}\overrightarrow{E_1}+D_{t1}\overrightarrow{T_1}$$

Dans cette équation très générale, $\overrightarrow{T_1}$ est un vecteur unitaire appartenant au plan YOZ, et D_{n1} et D_{t1} sont respectivement la composante normale et la composante tangentielle du vecteur contrainte.

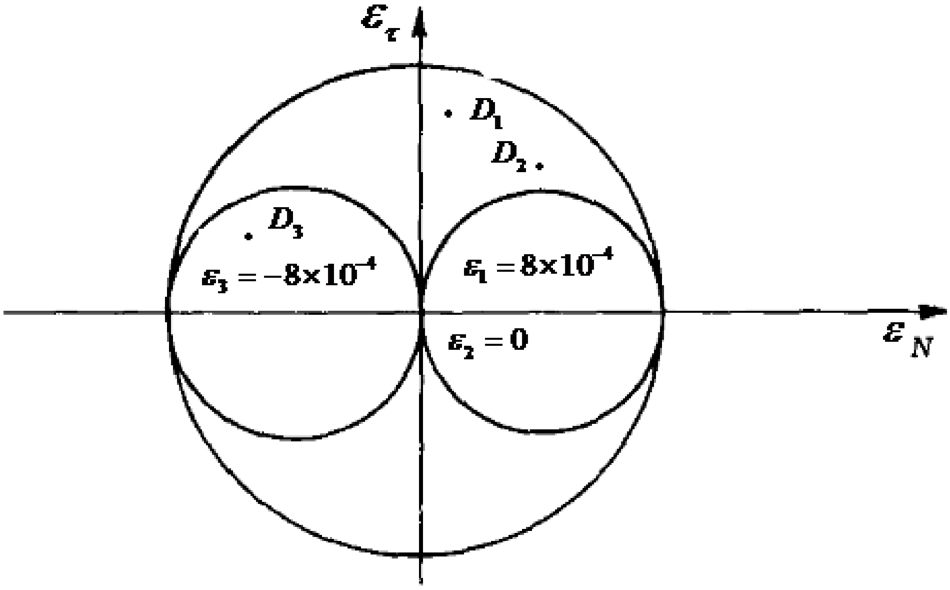
On a

$$D_{n1}=\vec{D}(\overrightarrow{E_1}).\overrightarrow{E_1}=10^{-4} \text{ et } D_{t1}=\sqrt{\|\vec{D}(\overrightarrow{E_1})\|^2-D_{n1}^2}=\sqrt{40\times10^{-8}-10^{-8}}=\sqrt{39}10^{-4}\Rightarrow\vec{D}(\overrightarrow{E_1})=10^{-4}\overrightarrow{E_1}+\sqrt{39}10^{-4}\overrightarrow{T_1}$$

En appliquant la même opération à $\vec{D}(\overrightarrow{E_2})$ et $\vec{D}(\overrightarrow{E_3})$, on trouve

$$\vec{D}(\overrightarrow{E_2})=D_{n2}\overrightarrow{E_2}+D_{t2}\overrightarrow{T_2}=4\times10^{-4}\overrightarrow{E_2}+4\times10^{-4}\overrightarrow{T_2} \quad\text{et}\quad \vec{D}(\overrightarrow{E_3})=D_{n3}\overrightarrow{E_3}+D_{t3}\overrightarrow{T_3}=-5\times10^{-4}\overrightarrow{E_3}+\sqrt{6}\times10^{-4}\overrightarrow{T_3}$$

Avec ces résultats, on peut tout à fait placer sur le plan de Mohr les points correspondant à chacun de ces trois vecteurs contraintes. Il s'agira des points de (D_{n1}, D_{t1}), (D_{n2}, D_{t2}) et (D_{n3}, D_{t3}) où $(D_{n1}, D_{t1}) \simeq 10^{-4}(1, 6.25)$, $(D_{n2}, D_{t2}) = 10^{-4}(4.4)$ et $(D_{n3}, D_{t3}) \simeq 10^{-4}(-5, 2.45)$



4. Le tenseur déviateur des déformations est donné par $\overline{\overline{D}}_\varepsilon = \overline{\overline{\varepsilon}} - \frac{tr(\overline{\overline{\varepsilon}})}{3}\overline{\overline{I}}_3$ et comme $tr(\varepsilon) = 0$

donc $\overline{\overline{D}}_\varepsilon = \overline{\overline{\varepsilon}}$

Exercice7:

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par:

$u_1 = x_2 x_3$, $u_2 = x_1 x_3$, $u_3 = x_1 x_2$

1. Détermination du tenseur de déformations au point $M(x_1, x_2, x_3)$.

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \ \varepsilon_{12} \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}(x_3 + x_3) = x_3 \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \ \varepsilon_{13} \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(x_2 + x_2) = x_2 \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \ \varepsilon_{23} \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = x_1 \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On considère les points $D_0(1,-1,0)$ et $C_0(1,1,0)$, détermination de la dilatation en D_0 dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{D_0C_0}$.

La dilatation est donnée par l'expression suivante $\lambda(D_0, \vec{q}) = q^T \overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) q + 1$ où $\vec{q} = \frac{\overrightarrow{D_0C_0}}{\| \overrightarrow{D_0C_0} \|} \Rightarrow \vec{q} = \vec{e}_2$

$$\lambda(D_0, \vec{q}) = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

3. Détermination des déformations et des directions principales des déformations au point D_0.

On a $\overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Les déformations ε sont les valeurs propres du tenseur de déformations $\overset{=}{\varepsilon}$ donc on a:

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & -\varepsilon & 1 \\ -1 & 1 & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\varepsilon(-\varepsilon^2-1)-1(-\varepsilon)=0 \Rightarrow -\varepsilon(\varepsilon^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1=\sqrt{2} \\ \varepsilon_2=0 \quad (\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3) \\ \varepsilon_3=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Soit $u_i^{(k)}$ où $k\in\{1,2,3\}$ les composantes de l'unité normale dans la direction principale associée à ε_k

$\overset{=}{\varepsilon} u^{(k)} = \varepsilon_k u^{(k)} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} u_i^{(k)} = \varepsilon_k u_j^{(k)}$.....(1)

Pour $\varepsilon_1 = 1$ et d'après (1) on trouve

$$\varepsilon_{ij} u_i^{(1)} = \varepsilon_k u_j^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_3^{(1)} = \sqrt{2}u_1^{(1)} \\ u_3^{(1)} = \sqrt{2}u_2^{(1)} \\ -u_1^{(1)}+u_2^{(1)} = \sqrt{2}u_3^{(1)} \end{cases} \Rightarrow (u_1^{(1)} = -u_2^{(1)}) \wedge (u_3^{(1)} = -\sqrt{2}u_1^{(1)})$$

et comme $\| u^{(1)} \|^2 = u_i^{(1)} u_i^{(1)} = 1$ on a $u_1^{(1)} = \pm\frac{1}{2}, u_2^{(1)} = \mp\frac{1}{2}, u_3^{(1)} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour $\varepsilon_2 = 0$ et d'après (1) on trouve $u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_3^{(2)} = 0$

Pour $\varepsilon_3 = -\sqrt{2}$ et d'après (1) on trouve $u_1^{(3)} = \pm\frac{1}{2}, u_2^{(3)} = \mp\frac{1}{2}, u_3^{(3)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

On choisit le repère principale $B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right), \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

on trouve

$$\left[\varepsilon_{ij}(D_0)\right]_B = B^T \varepsilon_{ij}(D_0) B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. On suppose que le milieu est continu et élastique, détermination dans le repère principale du tenseur des contraintes en D_0.

Pour le milieu continu élastique, le tenseur des contraintes est donné par:

$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ où $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \sqrt{2}+0-\sqrt{2} = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2\mu\varepsilon_1 = 2\sqrt{2}\mu \\ \sigma_2 = 2\mu\varepsilon_2 = 0 \\ \sigma_3 = 2\mu\varepsilon_3 = -2\sqrt{2}\mu \end{cases} \Rightarrow \overset{=}{\sigma}(D_0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2}\mu \end{pmatrix}$$