

1. عموميات:

1. تعريف المعادلة التفاضلية: نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة n حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$ كل مساواة من الشكل:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \dots \dots \dots (*)$$

حيث F علاقة جبرية تربط بين متغير حر x و دالة مجهولة y ومشتقاتها حتى الرتبة n .

• أمثلة:

$$1- xy' - y = 0 \text{ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.}$$

$$2- y'' - y + x^2 + 1 = 0 \text{ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.}$$

$$3- \frac{y'''}{x+y} = 0 \text{ معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة.} \dots \dots \dots \text{ إلخ.}$$

2. تعريف حل معادلة تفاضلية: نسمي حلاً أو جذراً للمعادلة (*) في مجال حقيقي I كل دالة φ قابلة للاشتقاق

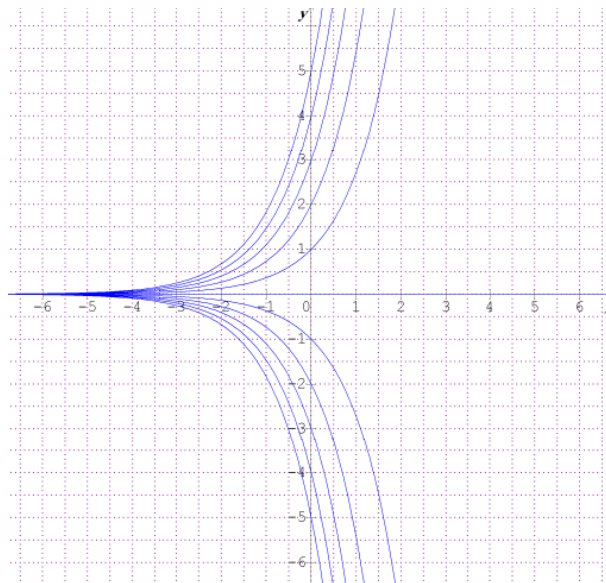
n مرة على I وتحقق (*) أي أن:

$$F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0 \dots \dots \dots (**)$$

ويُسمى بيان الدالة φ بالمنحنى التكاملي للمعادلة (*), وعملية البحث على كل حلول معادلة تفاضلية تسمى حل معادلة تفاضلية أو **مكاملة** معادلة تفاضلية.

مثال:

الدوال $\varphi(x) = ce^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$ هي حل أو تكامل المعادلة $y' - y = 0$.



المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$

3. تعريف المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى كل مساواة من الشكل:

$$F(x, y, y') = 0$$

حيث F علاقة جبرية تربط بين متغير حر x ودالة مجهولة y ودالتها المشتقة y'

في الغالب تصاغ المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على الشكل الصريح التالي:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \dots \dots \dots (1)$$

حيث f دالة معطاة للمتغيرين x و y .

ملاحظتان:

• إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a, b]$ ومتعلقة فقط ب x

فإن تكامل أو حل المعادلة (1) هو الدوال الأصلية ل f .

من أجل $x, x_0 \in [a, b]$ بمكاملة طرفي $y' = f(x)$ من x_0 إلى x نجد $\int_{x_0}^x y' = \int_{x_0}^x f(t) dt$ وبالتالي حل المعادلة

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

يُعطى بالعلاقة:

• إذا كان حل المعادلة (1) يأخذ القيمة y_0 عند النقطة x_0 من المجال I فإن هذا الحل وحيداً، وتسمى القيمة

$$y(x_0) = y_0$$

بالشرط الابتدائي.

مثال: $y = e^x$ هو الحل الوحيد للمعادلة $y' - y = 0$ الذي يحقق $y(0) = 1$.

4. تعريف:

نسمي حلاً عاماً للمعادلة (1) كل دالة $y(x) = \varphi(x, C)$ متعلقة بثابت اختياري C وتحقق الشرطين التاليين:

$$(1) \quad y \text{ تحقق المعادلة (1).}$$

(2) مهما يكن الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ يوجد حل $y(x) = \varphi(x, C_0)$ يحقق هذا الشرط.

$$(أي يوجد $C_0 \in \mathbb{R}$ حيث $y_0 = y(x_0) = \varphi(x_0, C_0)$).$$

ونسمي حلاً خاصاً ل (1) كل دالة $y(x) = \varphi(x, C_0)$ مُستنتجة من الحل العام $y(x) = \varphi(x, C)$.

التفسير الهندسي للحل العام والحل الخاص:

هندسياً الحل العام لمعادلة تفاضلية يُعبّر على المنحنى التكاملي لها، و الحل الخاص يُعبّر على المنحنى المارّ من النقطة

$$(x_0, y_0)$$

ملاحظة: نشير إلى أنه لا توجد طرق عامة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، في الفقرة القادمة سنتهم بعض الطرق الخاصة لحل بعض الأنماط منها.

II . بعض أنماط المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

1 . المعادلات التفاضلية ذات متغيرين منفصلين:

تعريف: نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين كل معادلة تكتب على الشكل:

$$g(y)y' = f(x) \dots \dots \dots (1)$$

حيث f و g دالتان مستمرتان على مجالين I و J على الترتيب.

ملاحظة: عملياً المعادلة التفاضلية (1) تصاغ على الشكل $g(y)dy = f(x)dx$ (لأن $y' = \frac{dy}{dx}$).

حل معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين:

للحصول على الحل العام لمعادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين نقوم بمكاملة طرفيها:

$$g(y)dy = f(x)dx \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

إذا كانت F أصلية لـ f على I و G أصلية لـ g على J فإن الحل العام لـ (1) معطى بالدستور:

$$G(y) = F(x) + C$$

ملاحظة: نحاول التعبير على y بدلالة x (الشكل الصريح للحل) فإن لم نستطع كتبنا x بدلالة y فإن تعذر ذلك

تركنا الحل على شكله الضمني أي: $G(y) - F(x) - C = 0$.

أمثلة:

$$(1) \text{ كامل المعادلة التفاضلية: } y' = \frac{x^2}{y^2}$$

نفصل المتغيرين فنجد:

$$y' = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = x^2 dx$$

و بمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

وعليه:

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C} \quad \left(C = \frac{K}{3} \in \mathbb{R} \right)$$

$$(2) \text{ كامل المعادلة التفاضلية: } y' = \frac{x+1}{y-1}$$

نفصل المتغيرين لنجد:

$$(y-1)dy = (x+1)dx$$

و بمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{2}y^2 - y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

ليبقى الحل على شكله الضمني:

$$\frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}x^2 - x + C = 0 \quad (C \in \mathbb{R})$$

(3) حل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

لنبحث على الحل العام للمعادلة المرفقة بالمسألة

$$y' = (1+y^2)x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+y^2)x \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = xdx \Rightarrow \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

ومنه الحل العام للمعادلة هو:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \quad C \in \mathbb{R}$$

بتعويض الشرط الابتدائي في الحل العام نجد

$$y(0) = \tan(C) = 1 \quad \text{و بالتالي يمكن أخذ قيمة } C = \frac{\pi}{4}$$

و عليه حل المسألة (أو الحل الخاص للمعادلة) هو:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى:

تعريف: نقول أن الدالة $f(x, y)$ ذات المتغيرين x و y أنها متجانسة من الرتبة $n \in \mathbb{N}$ إذا حققت الشرط التالي:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in D_f$$

حالة خاصة: إذا كان $n = 0$ قلنا أن الدالة f متجانسة من الرتبة صفر أي أن:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in D_f \wedge x \neq 0$$

مثال: الدالة $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ متجانسة من الرتبة صفر لأن:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

أو يمكن إثبات ذلك اعتماداً على المساواة الثانية، من أجل $(x, y) \neq (0, 0)$ لدينا:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{1 \cdot \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

تعريف: نسمي معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y' = f(x, y) \dots \dots \dots (*)$$

حيث f دالة متجانسة من الرتبة صفر.

طريقة حل المعادلة المتجانسة:

عموماً نحل هذه المعادلة على المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ بتغيير المتغير $z = \frac{y}{x}$

بأن المعادلة (*) تكافئ $y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ بوضع $z = \frac{y}{x}$ وبالتالي: $y = x \cdot z$ وبالتعويض نجد:

$$(xz)' = f(1, z)$$

$$\Leftrightarrow z + xz' = f(1, z)$$

$$\Leftrightarrow x \frac{dz}{dx} = f(1, z) - z$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

ومنه حل (*) يؤول إلى حل

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x} \dots \dots \dots (**)$$

وهي معادلة ذات متغيرين منفصلين.

ملاحظة:

إذا قبلت المعادلة الجبرية $f(1, z) - z = 0$ للمجهول z جذوراً حقيقية $(z_k)_{1 \leq k \leq r}$ فإن المستقيمات $y = z_k x$ حيث

$k = 1, 2, \dots, r$ هي حلول شاذة لـ (*) تُضاف إلى الحل العام الناتج عن مكاملة (**).

أمثلة:

1) حل المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y' - y^2 + xy = 0 \dots\dots\dots (*) \text{ حيث } x \neq 0$$

بحساب بسيط يمكن كتابة (*) على الشكل التالي:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \dots\dots\dots (**)$$

الطرف الثاني لـ (**) دالة للمتغير $\frac{y}{x}$ فهي متجانسة، بوضع $z = \frac{y}{x}$ ثم بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$z + xz' = z^2 - z$$

وعليه:

$$\frac{dz}{z^2 - 2z} = \frac{dx}{x}$$

بمكاملة الطرفين ينتج:

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2z} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\int \frac{dz}{z-2} - \int \frac{dz}{z} \right) = \int \frac{dx}{x}$$

و بالتالي:

$$\ln \left| \frac{z-2}{z} \right| = \ln|x| + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

أي أن:

$$\sqrt{\left| \frac{z-2}{z} \right|} = Cx, \quad C = \pm e^K \in \mathbb{R}$$

بالتعويض عن z نجد الحل العام للمعادلة (*) على الشكل الضمني:

$$\sqrt{\left| \frac{y-2x}{y} \right|} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}^*$$

وبما أن المعادلة $z^2 - 2z = 0$ تقبل جذريين حقيقيين هما: $z_1 = 0$ و $z_2 = 2$ فإن المستقيمين: $y = 0$ و $y = 2x$ هما حلين

شاذين لـ (*)، وعليه مجموعة حلول (*) هي:

$$\left\{ y = 0, y = 2x, \sqrt{\left| \frac{y-2x}{y} \right|} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}^* \right\}$$

2) كامل على المجال $]0, +\infty[$ المعادلة التفاضلية:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \dots\dots\dots (*)$$

نلاحظ أن (*) تكتب على الشكل:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$$

فهي معادلة متجانسة (لأن الدالة $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ متجانسة من الرتبة صفر)، نضع $z = \frac{y}{x}$ أي أن: $y = xz$ بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$z + xz' = \frac{\sqrt{x^2 + (xz)^2} + xz}{x} = \sqrt{1 + z^2} + z$$

أي أن:

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

بفصل المتغيرين نجد:

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

بكاملة الطرفين ينتج:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) &= \ln|x| + K \quad (K \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow z + \sqrt{1 + z^2} &= Cx \quad (C = \pm e^K) \end{aligned}$$

لنحاول إيجاد z بدلالة x :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + z^2} &= Cx - z \\ \Rightarrow 1 + z^2 &= (Cx - z)^2 = C^2x^2 + z^2 - 2Czx \end{aligned}$$

أي أن:

$$1 = C^2x^2 - 2Czx$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} 2Czx &= C^2x^2 - 1 \\ \Rightarrow z &= \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} \end{aligned}$$

بالرجوع إلى y ($y = xz$) نجد الحل العام للمعادلة (*):

$$y(x) = x \left(\frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} \right) = \frac{1}{2}Cx - \frac{1}{2C} \quad C \in \mathbb{R}^*$$

أما الحلول الشاذة غير موجودة لأن المعادلة $\sqrt{1 + z^2} = 0$ لا تملك جذورا حقيقية.

3. المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

تعريف:

نسَمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x) \dots \dots \dots (E)$$

حيث p و q دالتان مستمرتان .

إذا كانت q معدومة قلنا أنَّ المعادلة:

$$y' + p(x)y = 0 \dots \dots \dots (EH)$$

متجانسة (بدون طرف ثان) مرفقة بالمعادلة (E)

ملاحظة: مصطلح التجانس في المعادلات الخطية يعني به المعادلة بدون طرف ثان .

أمثلة:

$$ch(x)y' + \frac{x}{2}y = 0 \quad , \quad xy' + 2y = x^2 \quad , \quad y' + y = x^2 + 2x - 1$$

نظرية:

الفرق بين حلين للمعادلة (E) هو حل للمعادلة (EH)

برهان: ليكن y_1, y_2 حلين للمعادلة (E) أي أنَّ:

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 = q(x) \\ y_2' + p(x)y_2 = q(x) \end{cases}$$

بالطرح طرفاً لطرف نجد:

$$(y_1' - y_2') + p(x)(y_1 - y_2) = 0$$

خطية الاشتقاق تعطي المطلوب:

$$(y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = 0$$

نتيجة: الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على الشكل: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

حيث y_h هو حل عام للمعادلة المتجانسة (EH) و y_p حل خاص للمعادلة (E) .

• حساب y_h : المعادلة المتجانسة (EH) ذات متغيرين منفصلين و عليه:

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

و بمكاملة الطرفين نجد:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + K \quad K \in \mathbb{R}$$

و بالتالي:

$$y(x) = \pm e^{(-\int p(x)dx + K)} = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C = \pm e^{+K}$$

$$y_h(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{و منه الحل العام للمتجانسة:}$$

• حساب y_p : لنستعمل طريقة تغيير الثابت للاغرنج -Lagrange-

تعتمد هذه الطريقة على جعل الثابت الاختياري C الموجود في $y_h(x)$ دالة للمتغير x ثم البحث على الحل

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad \text{الخاص للمعادلة (E) على الشكل:}$$

بالتعويض في (E) نجد:

$$y_p' + p(x)y_p = q(x) \Rightarrow \left(C(x)e^{-\int p(x)dx} \right)' + p(x) \left(C(x)e^{-\int p(x)dx} \right) = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

و عليه:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ثم بالمكاملة نجد:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}$$

و بالتعويض عن $C(x)$ في عبارة y_p نجد المطلوب:

$$y_p(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} \right) e^{-\int p(x)dx}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E):

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} \right) e^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = e^{\frac{1}{x}} \dots\dots\dots (*)$$

المعادلة المتجانسة المرفقة ب(*) هي:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

بمكاملتها نجد:

$$y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$

و بالتالي:

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{x} + K \quad K \in \mathbb{R}$$

ومن الحل العام للمتجانسة هو: $y_h(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$ $C = \pm e^K \in \mathbb{R}$

لنبحث على حل خاص لـ (*) على الشكل: $y_p(x) = C(x)e^{\frac{1}{x}}$ بالاشتقاق والتعويض في (*) نجد:

$$y_p' + \frac{1}{x^2}y_p = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \left(C(x)e^{\frac{1}{x}}\right)' + \frac{1}{x^2}\left(C(x)e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

وعليه الحل العام لـ (*) هو:

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

مبدأ الفصل: لإيجاد حل خاص للمعادلة: $y' + p(x)y = q_1(x) + q_2(x) + \dots + q_k(x)$

يكفي جمع الحلول الخاصة للمعادلات: $y' + p(x)y = q_i(x) \quad 1 \leq i \leq k$

طريقة أخرى لحل المعادلة الخطية من الرتبة الأولى:

يمكن البحث على الحل العام للمعادلة الخطية $y' + p(x)y = q(x)$ على الشكل $y(x) = u(x)v(x)$

وذلك بالاشتقاق والتعويض:

$$(u(x)v(x))' + p(x)u(x)v(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow v(x)(u'(x) + p(x)u(x)) + u(x)v'(x) = q(x)$$

والمعادلة الأخيرة مكافئة للجملة التالية:

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u(x) = 0 \dots\dots\dots(1) \\ v'(x)u(x) = q(x) \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

محل (1) بفصل المتغيرات نجد:

$$u(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R}$$

ثم بالتعويض عليه في (2) ثم المكاملة نجد:

$$v(x) = \left(\frac{1}{C} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx\right) + K \quad K \in \mathbb{R}$$

ومن الحل العام لـ (E) هو: $y(x) = \left(e^{-\int p(x)dx}\right) \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + A\right) \quad A = CK \in \mathbb{R}$

4. معادلة برنولي Bernoulli:

تعريف: المعادلة التفاضلية:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\} \dots\dots\dots(1)$$

غير خطية تسمى معادلة برنولي.

ملاحظة: إذا كان $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ فإن المعادلة (1) هي معادلة خطية.

• حل معادلة برنولي:

لمكاملة معادلة برنولي نقوم بالتبديل: $z = y^{1-\alpha}$ فنحصل على معادلة خطية.نلاحظ أنه إذا كان $\alpha > 0$ فإن الدالة المدومة $y = 0$ هي حل واضح للمعادلة (1).نقرص أن: $y \neq 0$ بقسمة طرفي (1) على y^α نجد:

$$y' y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \dots\dots\dots(2)$$

وبوضع: $z = y^{1-\alpha}$ فإن: $z' = (1-\alpha)y' y^{-\alpha}$ المعادلة (2) تعطي:

$$z' + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x) \dots\dots\dots(3)$$

وهي معادلة خطية للمجهول z بمكاملتها نحصل على y حل معادلة برنولي.

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية:

$$y' - y = x^2 y^2 \dots\dots\dots(*)$$

(*) معادلة برنولي $\alpha = 2$ نلاحظ أن $y = 0$ حل واضح لـ (*), نفرض أن $y \neq 0$ وبوضع $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$ فإن: $z' = -y' y^{-2}$ وبقسمة (*) على y^2 نجد:

$$y' y^{-2} - y^{-1} = x^2$$

و بالتعويض نحصل على المعادلة الخطية:

$$z' + z = -x^2 \dots\dots\dots(**)$$

المعادلة المتجانسة المرفقة بـ (**) هي: $z' + z = 0$ حلها العام: $z_h = Ce^{-x}$ $C \in \mathbb{R}$ وبواسطة طريقة تغيير الثابت نحصل على الحل العام لـ (**): $z = -x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}$ $C \in \mathbb{R}$ وباختيار مناسب للثابت C نجعل $z \neq 0$ ومنه الحل العام للمعادلة (*) هو:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

مثال 2: لنكامل المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{2}{3}xy - \frac{x}{y^2} \dots\dots\dots (*)$$

(*) تكافئ المعادلة $y' - \frac{2}{3}xy = -xy^{-2}$ فهي معادلة برنولي مع $\alpha = -2$ نضع: $z = y^{1-(-2)} = y^3$

فتحصل على المعادلة الخطية:

$$z' - 2xz = -3x \dots\dots\dots (**)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بها هو: $z_h = Ce^{x^2}$ $C \in \mathbb{R}$

و باستخدام طريقة تغيير الثابت نجد حل خاص ل (**): $z_p = \left(\int -3xe^{-x^2} \right) e^{x^2} = \frac{3}{2}$ ومنه الحل العام ل (***) هو

$$z = \frac{3}{2} + Ce^{x^2} \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{و عليه الحل العام ل (*) هو:} \quad y = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + Ce^{x^2}} \quad C \in \mathbb{R}$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة :

. III

تعريف:

• نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة كل معادلة من الشكل:

$$y'' + py' + qy = f(x) \dots\dots\dots (E)$$

حيث p و q عددان حقيقيان، و f دالة مستمرة على مجال I من \mathbb{R} .

• المعادلة التفاضلية:

$$y'' + py' + qy = 0 \dots\dots\dots (EH)$$

تسمى المعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثان) المرفقة بـ (E).

• المعادلة الجبرية (ذات المجهول r):

$$r^2 + pr + q = 0 \dots\dots\dots (EC)$$

تسمى المعادلة المميزة المرفقة بـ (E).

أمثلة:

$$y'' - y' = \ln(x) \quad , \quad y'' + 3y = -1 \quad , \quad y'' = y \quad , \quad y'' + y' - y = x^2$$

حل المعادلة (E):

نعني بمحل أو مكاملة المعادلة (E) إيجاد دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين على المجال I وتحقق (E).

نظرية:

الفرق بين حلين كئمتين للمعادلة (E) هو حل للمعادلة المتجانسة (EH).

برهان: ليكن y_1, y_2 حلين للمعادلة (E) أي أن:

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = f(x) \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = f(x) \end{cases}$$

بالطرح طرفاً لطرف نجد:

$$(y_1'' - y_2'') + p(y_1' - y_2') + q(y_1 - y_2) = 0$$

خطية الاشتقاق تعطي:

$$(y_1 - y_2)'' + p(y_1 - y_2)' + q(y_1 - y_2) = 0$$

أي أن $y_1 - y_2$ حل للمعادلة المتجانسة (EH) وهو المطلوب.

نتيجة:

الحل العام للمعادلة (E) هو مجموع الحل العام للمعادلة المتجانسة (EH) و حل خاص لـ (E)

$$y = y_h + y_p \quad \text{أي أن:}$$

حيث: y_h الحل العام للمتجانسة (EH) و y_p حل خاص للمعادلة (E)

أ- حل المعادلة المتجانسة (EH):

يمكن التأكد بسهولة بأن مجموع حلين لـ (EH) هو حل لـ (EH)، و ضرب سلمية حقيقية في حل لـ (EH)

هو حل كذلك لـ (EH)، أي أن مجموعة حلول المعادلة الخطية المتجانسة (EH) هي فضاء شعاعي جزئي S

على \mathbb{R} من فضاء الدوال المستمرة على المجال I بالنسبة لجمع الدوال و ضرب دالة في سلمية حقيقية.

والهدف الآن هو معرفة الحل العام للمعادلة المتجانسة انطلاقاً من معرفة أساس لهذا الفضاء الشعاعي، أي نعين

عائلة مولدة لـ S و مستقلة خطياً.

تذكير: نقول عن حلين y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (EH) أنهما مستقلان خطياً على I إذا لم يكونا متناسبين أي أن:

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$$

قضبة:

الحلان y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (EH) مستقلين خطياً على I إذا فقط إذا كان المحدد $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

غير معدوم على المجال I .

برهان: نستعمل العكس التقيض

(\Leftarrow) نفرض أن: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ هذا يؤدي إلى أن: $\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0$ أي أن:

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$ معناه أن الدالة $\frac{y_2}{y_1}$ ثابتة على المجال I أي أنه: $\frac{y_1}{y_2} = C$ $\exists C \in \mathbb{R}$ ومنه y_1 و y_2 مرتبتين خطياً.

(\Rightarrow) نفرض أن الحلين y_1 و y_2 مرتبتين خطياً أي: $y_1 = C y_2$ $\exists C \in \mathbb{R}$ وبالتالي:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C y_2 & y_2 \\ C y_2' & y_2' \end{vmatrix} = C y_2 y_2' - C y_1' y_2 = 0$$

ومنه المطلوب.

نظرية: الحل العام للمعادلة (EH) يُكتب على شكل مزج خطي لحلين y_1 و y_2 مستقلين خطياً لها.

أي أن الحل العام لـ (EH): $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

برهان: ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين خطياً لـ (EH)

أولاً: بمأن مجموعة حلول (EH) لها بنية فضاء شعاعي على \mathbb{R} فإن كل مزج خطي لـ y_1 و y_2 هو حل لـ (EH).

ثانياً: لنبرهن أن المسألة: (*) $\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$ تقبل حلاً وحيداً في شكل مزج خطي لـ y_1 و y_2

أي نبحت على ثابتين حقيقيين C_1 و C_2 وحيدين حيث: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ حل لـ (*)

بالتعويض في الشرطين الابتدائيين نجد: $\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \alpha \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = \beta \end{cases}$ وهي جملة خطية لكرامر (Cramer)

محددها غير معدوم (لأن y_1 و y_2 حلين مستقلين خطياً لـ (EH) فإن $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & y_2 \\ \beta & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\alpha y_2' - \beta y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \\ C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \alpha \\ y_1' & \beta \end{vmatrix}}{W} = \frac{\beta y_1 - \alpha y_1'}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \end{array} \right. \quad \text{وهو المطلوب.} \quad \text{فهي تقبل حلاً وحيداً:}$$

قضية: الدالة e^{rx} حل للمعادلة المتجانسة (EH) إذا فقط إذا كان r حل للمعادلة المميزة (EC).

برهان:

$$\begin{aligned} (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + q(e^{rx}) &= 0 \Leftrightarrow \text{حل للمعادلة (EH)} \\ r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + q e^{rx} &= 0 \Leftrightarrow \\ (r^2 + p r + q) e^{rx} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

وبما أن المقدار e^{rx} لا يتعدم فإن: $r^2 + p r + q = 0$ وهو المطلوب.

وأخيراً تقدم الخلاصة التالية التي تعطي الحل العام للمعادلة المتجانسة (EH)

خلاصة: نميز ثلاث حالات حسب إشارة مميز المعادلة المميزة: $\Delta = p^2 - 4q$

• **إذا كان:** $\Delta > 0$ المعادلة المميزة (EC) تقبل جذرين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 وبالتالي $y_1 = e^{r_1 x}$ و

$y_2 = e^{r_2 x}$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة المتجانسة (EH) و عليه الحل العام لها هو:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{حيث } C_1 \text{ و } C_2 \text{ ثابتان حقيقيان اختياريان.}$$

• **إذا كان:** $\Delta = 0$ المعادلة المميزة (EC) تقبل جذراً مضاعفاً r_0 وبالتالي $y_1 = e^{r_0 x}$ و $y_2 = x e^{r_0 x}$ حلين

مستقلين خطياً للمعادلة المتجانسة (EH) و عليه الحل العام لها هو:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

• **إذا كان:** $\Delta < 0$ المعادلة المميزة (EC) تقبل جذرين مركبين مترافقين $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$

ولدينا $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ و $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ حلين مستقلين خطياً

للمعادلة المتجانسة و عليه الحل العام لها هو: $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

أمثلة:

لنحل المعادلات التالية:

$$y'' + y' - 2y = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$y'' + y' + y = 0 \dots\dots\dots(3)$$

• المعادلة المميزة المرفقة ب (1) هي: $r^2 + r - 2 = 0$ مميّزها $\Delta = 9 > 0$ و $r_1 = -2$ و $r_2 = 1$ و عليه الحل العام

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ل (1) هو:}$$

• المعادلة المميزة المرفقة ب (2) هي: $r^2 - 2r + 1 = 0$ مميّزها $\Delta = 0$ حلها المضاعف $r_0 = 1$ و عليه الحل العام

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ل (2) هو:}$$

• المعادلة المميزة المرفقة ب (3) هي: $r^2 + r + 1 = 0$ مميّزها $\Delta = -3 < 0$ حلها المركبين المترافقين هما

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و عليه الحل العام ل (3) هو:}$$

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

ب- البحث على حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (E)

تعتبر عملية البحث على حل خاص للمعادلة (E) العائق الأكبر لحل هذا النمط من المعادلات، نستعرض الطريقة

الفعالة و المهمة كما في المعادلات الخطية من الرتبة الأولى و هي طريقة تغيير الثابتين الواردين في الحل العام للمعادلة

المتجانسة.

ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين خطياً لـ (EH) و بالتالي الحل العام للمتجانسة (EH) يُكتب على الشكل :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \text{حيث } C_1 \text{ و } C_2 \text{ ثابتان حقيقيان اختياريان.}$$

لنبحث على حل خاص للمعادلة (E) من الشكل: $y_p(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

حيث C_1 و C_2 دالتين للمتغير الحقيقي x .

بالاشتقاق نجد:

$$y'_p(x) = C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 + C_1(x) y'_1 + C_2(x) y'_2$$

نختار C_1 و C_2 حيث:

$$C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

و عليه y'_p يصبح:

$$y'_p(x) = C_1(x) y'_1 + C_2(x) y'_2$$

بالاشتقاق مرة ثانية نجد:

$$y''_p(x) = C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 + C_1(x) y''_1 + C_2(x) y''_2$$

بالتعويض في المعادلة (E) نحصل على:

$$(C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 + C_1(x) y''_1 + C_2(x) y''_2) + p(C_1(x) y'_1 + C_2(x) y'_2) + q(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2) = f(x)$$

و بالتالي:

$$C_1 \left(\underbrace{y''_1 + p y'_1 + q y_1}_{=0} \right) + C_2 \left(\underbrace{y''_2 + p y'_2 + q y_2}_{=0} \right) + C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = f(x)$$

و بما أن y_1 و y_2 حلين للمعادلة المتجانسة فإن:

$$C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = f(x) \dots \dots \dots (2)$$

بدمج المعادلتين (1) و (2) نحصل على جملة خطية لكرامر للمجهولين C'_1 و C'_2 :

$$\begin{cases} C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0 \\ C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = f(x) \end{cases}$$

حلها الوحيد:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \\ C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \end{cases}$$

بالمكاملة نجد الدالتين C_1 و C_2 و بتعويض قيمتهما في العلاقة $y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

نحصل على الحل الخاص المنشود لـ (E).