

جامعة الشهيد محمد لخضر بالوادي

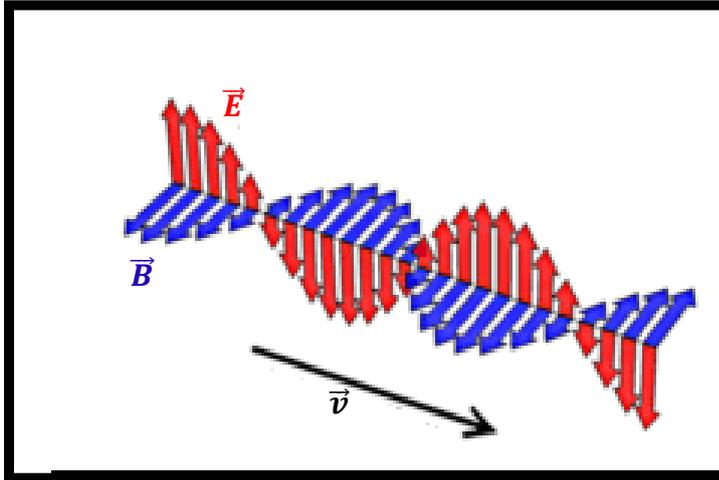


كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

محاضرات و تمارين في الفيزياء 4

إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية



موجهة لطلبة السنة الثانية فيزياء ل.م.د

من إعداد الأستاذة : مفتاح نسيمة

meftahnassima@yahoo.fr

2017/2016

جدول الرموز

الرمز	الوحدة	المقدار الفيزيائي
\vec{E}	V/m	الحقل الكهربائي
\vec{B}	$Tesla$	الحقل المغناطيسي
V	V	الكمون السلمي
\vec{A}	Wb/m أو $T.m$	الكمون الشعاعي
\vec{D}	C/m^2	شعاع الإزاحة الكهربائية
\vec{H}	A/m	شعاع الشدة المغناطيسية
c	m/s	سرعة انتشار الضوء في الفراغ
ϵ_0	F/m	السماحية الكهربائية للفراغ
ϵ	F/m	السماحية الكهربائية المطلقة
μ_0	H/m	النفاذية المغناطيسية للفراغ
μ	H/m	النفاذية المغناطيسية المطلقة
ρ	C/m^3	الكثافة الحجمية للشحنة
σ	C/m^2	الكثافة السطحية للشحنة
\vec{J}	A/m^2	شعاع الكثافة الحجمية للتيار الكهربائي
\vec{J}_D	A/m^2	شعاع الكثافة الحجمية لتيار الإنزياح
\vec{J}_T	A/m^2	شعاع الكثافة الحجمية للتيار الكلي
\vec{J}_e	A/m^2	كثافة التيار الناتج عن حركة الشحنات الحرة
\vec{J}_P	A/m^2	كثافة التيار التمعنط
\vec{P}	C/m^2	شعاع الإستقطاب
\vec{p}	$C.m$	عزم ثنائي القطب

الفهرس

الفصل I : مدخل رياضي

5.....1-I- علاقات التحليل الشعاعي

الفصل II : معادلات ماكسويل

10.....1-II- تذكير بالمفاهيم الأساسية

10.....1-II-1- الكهرباء الساكنة

13.....1-II-2- المغناطيسية الساكنة

15.....2-II- معادلات ماكسويل

15.....1-II-2- معادلات ماكسويل في الفراغ

20.....2-II-2- معادلات ماكسويل في الأوساط المادية

24.....2-II-3- الشروط الحدية

الفصل III : إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية

27.....1-III- الأمواج المستوية في وسط لانهازي

27.....1-III-1- الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية في الفراغ

36.....1-III-2- إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية في العوازل

38.....1-III-3- إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية في النواقل

43.....2-III- الإنعكاس و الإنكسار

43.....1-III-2- قانونا الإنعكاس و الإنكسار لسنل ديكرت

44.....2-III-2- معادلات فرينل

48.....2-III-3- زواوية بروستر

48.....2-III-4- الإنعكاس الكلي على السطح الفاصل بين وسطين عازلين

- 50.....III-2-5- الإنعكاس و الانكسار على وسط جيد الناقلية
- 52.....III-3- تمرين: الأمواج الموجهة

الفصل IV: إشعاع الأمواج الكهرومغناطيسية

- 53.....IV-1- الكمون الكهرومغناطيسي المتأخر
- 53.....IV-2- إشعاع ثنائي القطب المهتز
- 54.....IV-1-2- حساب الكمون الكهرومغناطيسي المشع
- 55.....IV-2-2- حساب الحقل الكهرومغناطيسي المشع
- 56.....IV-3-2- حساب الإستطاعة الكهرومغناطيسية المشعة
- 57.....IV-4-2- إشعاع هوائي مستقيم
- 57.....IV-5-2- إشعاع هوائي- نصف موجة
- 59.....ملحق
- 61.....المراجع

الفصل I: مدخل رياضي

I-1- علاقات التحليل الشعاعي

حتى نتمكن من معالجة المسائل الكهربائية و المغناطيسية فلا بد من استخدام تحليل الأشعة، وذلك بغرض توضيح الأفكار الفيزيائية المتضمنة في المعادلات الرياضية. من المفيد جدا الإلمام بأهم هذه العمليات.

I-1-1- شعاع التدرج :

لتكن الدالة السلمية $f(y,x,z)$. رياضيا يعرف تغير الدالة f في مجال متناه في الصغر كما يلي:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1-I)$$

وفقا لخصائص الجداء السلمي بإمكاننا تحليل العبارة (1-I) كما يلي :

$$df = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\overrightarrow{grad}f} \cdot \underbrace{(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z)}_{\vec{dr}} \quad (2-I)$$

$$\Rightarrow df = \overrightarrow{grad}f \cdot \vec{dr} \quad (3-I)$$

يدعى الشعاع $\overrightarrow{grad}f$ شعاع تدرج الدالة f ، ويعبر عنه رياضيا بالرمز $\vec{\nabla}f$.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{الرمز } \vec{\nabla} \text{ يدعى مؤثر نابلا:}$$

في نظام الإحداثيات الكارتيزية مؤثر تدرج الدالة f يكتب على الشكل التالي:

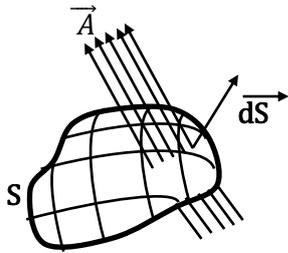
$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \right) \quad (4-I)$$

◀ تدرج دالة سلمية هو شعاع اتجاهه هو اتجاه التزايد الأعظمي لهذه الدالة، و طولته تساوي معدل هذا التزايد بالنسبة لتغير المسافة.

I-1-2- تدفق حقل شعاعي:

يعرف تدفق الحقل الشعاعي \vec{A} عبر السطح S بالعلاقة الرياضية :

$$\phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (5-I)$$



I-1-3- تفرق حقل شعاعي:

يعرف تفرق حقل شعاعي $\vec{A}(x,y,z)$ رياضيا على أنه الكثافة الحجمية لتدفق هذا الحقل.

تفرق الحقل الشعاعي في الإحداثيات الكارتيزية ب :

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (6-I)$$

حيث A_x, A_y, A_z هي مركبات الحقل الشعاعي \vec{A} .

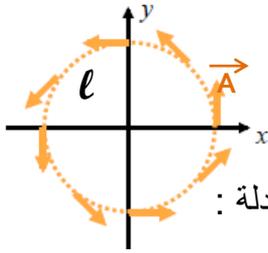
I-4-1- نظرية التفريق :

ليكن السطح المغلق S الذي يحد الحجم V. تدفق الحقل الشعاعي \vec{A} عبر السطح S يساوي التكامل الثلاثي لتفريق هذا الحقل الشعاعي خلال الحجم V؛ أي أن:

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \, dV \quad (7-I)$$

I-5-1- تجول حقل شعاعي :

يعرف تجول حقل شعاعي على طول المنحني ℓ المحيط بالسطح S بـ :



$$C = \int_{\ell} \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (8-I)$$

يكون الحقل الشعاعي \vec{A} حقلًا محافظًا (يشتق من كمون سلمي) إذا حقق المعادلة :

$$C = \oint_{\ell} \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (9-I)$$

I-6-1- دوران حقل شعاعي:

يعرف دوران الحقل الشعاعي \vec{A} في الإحداثيات الكارتيزية بـ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (10-I)$$

I-7-1- نظرية ستوكس:

تنص هذه النظرية على أن تجول الحقل الشعاعي حول مسار مغلق ℓ يساوي تدفق شعاع دوران هذا الحقل عبر أي سطح S محدد بالمسار ℓ :

$$\oint_{\ell} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (11-I)$$

حيث l هو المحيط الذي يحد السطح S .

I-1-8- مؤثر لابلاس السلمي:

ليكن $f(x,y,z)$ حقلاً سلمياً. يعرف لابلاس الحقل السلمي f في الإحداثيات الكارتيزية لهذه الدالة كما يلي:

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (12 - I)$$

بينما يعرف لابلاس حقل شعاع $\vec{A}(x,y,z)$:-

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z \quad (13 - I)$$

حيث A_x, A_y, A_z هي مركبات الحقل الشعاعي \vec{A} .

نذكر بثلاث خواص أساسية سنستعملها كثيراً أثناء دراستنا للظواهر الكهرومغناطيسية.

$$1/ \text{تفرق دوران حقل شعاعي دوما معدوم: } \text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$$

$$2/ \text{دوران تدرج حقل سلمى دوما معدوم: } \text{rot}(\text{grad} f) = 0$$

$$3/ \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

I-1-9- مؤثر التدرج في الإحداثيات الأسطوانية و الكروية:

ا- في الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad} f} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

ب- في الإحداثيات الكروية $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$:

$$\overrightarrow{\text{grad} f} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

I-1-10- مؤثر التفرق في الإحداثيات الأسطوانية و الكروية:

ا- في الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ب- في الإحداثيات الكروية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi)$$

I-11-1- مؤثر الدوران في الإحداثيات الأسطوانية و الكروية :

أ- في الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

ب- في الإحداثيات الكروية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

I-12-1- مؤثر لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية و الكروية :

أ- في الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ب- في الإحداثيات الكروية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

تمريبات

تمرين 1:

- ليكن الشعاعان $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j}$
- 1/ أحسب الجداء $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ و $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ ثم قارن بينهما؟ ماذا نستنتج؟
- 2/ أحسب الجداء $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ و $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ ثم قارن بينهما؟ ماذا نستنتج؟

تمرين 2:

ليكن الشعاع \vec{A} والذي تعطى عبارته في المعلم الكارتيبي بـ :

$$\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}_z$$

أكتب عبارة هذا الشعاع في الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

تمرين 3:

في المعلم الكارتيبي نعتبر النقطتين: $P(x_1, y_1, z_1)$ و $M(x, y, z)$.

1/ أحسب $r = \|\vec{PM}\|$ و $\vec{r} = \vec{PM}$

2/ أحسب $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$ بجوار النقطة M.

3/ أحسب $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$ بجوار النقطة M.

4/ أحسب $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$ بجوار النقطة M.

تمرين 4: أثبت صحة العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = 0$$

$$div(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = 0$$

$$div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

$$\overrightarrow{grad}(f \cdot g) = f \cdot \overrightarrow{grad}(g) + g \cdot \overrightarrow{grad}(f)$$

$$\overrightarrow{rot}(f \vec{A}) = (\overrightarrow{grad} f) \times \vec{A} + f \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

$$div(f \vec{A}) = f div \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{grad} f$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

تمرين 5:

لنعتبر الدالة السلمية: $\varphi = \varphi_0 - \frac{\alpha}{6} r^2$ حيث α و φ_0 ثوابت .

1/ أحسب تدرج الدالة φ ثم أحسب تفرق تدرج هذه الدالة.

2/ أحسب تدفق تدرج الدالة φ عبر سطح كرة نصف قطرها R و مركزها O(0,0).

3/ تحقق من نظرية التفرق.

الفصل II: معادلات ماكسويل

II-1-1- تذكير بالمفاهيم الأساسية

الهدف من هذه الفقرة هو التذكير باختصار بأهم المفاهيم و الخصائص الأساسية التي يعتمد عليها علم الكهرباء و المغناطيسية، و اللذين تبنى عليهما النظرية الكهرومغناطيسية.

II-1-1-1- الكهرباء الساكنة:

و هو علم يختص بدراسة الظواهر الناتجة عن الشحنات الكهربائية التي في حالة سكون. في البداية سنذكر بمعادلة انحفاظ الشحنة الكهربائية، و التي تعتبر مسلمة من مسلمات علم الكهرباء.

II-1-1-1-1- معادلة الاستمرارية:

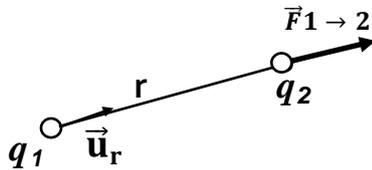
من بين مبادئ الإنحفاظ التي تعتمد عليها الفيزياء نذكر مبدأ انحفاظ الشحنة الكهربائية. فمن خلال التجربة توصل العلماء إلى أن الشحنة الكهربائية لا تخلق و لا تفتنى في نظام مغلق، أي أن كمية الشحنة الكلية داخل هذا النظام هي مقدار محفوظ. رياضياً يمكن ترجمة هذه الخاصية على النحو التالي :

$$\text{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-II)$$

حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية للشحنة الكهربائية و \vec{J} تمثل الكثافة الحجمية للتيار. بمعنى أن مقدار تناقص كمية الشحنة خلال وحدة زمن داخل سطح ما يساوي بالضبط مقدار الشحنة الخارجة عبر هذا السطح خلال وحدة زمن (مقدار كثافة التيار).

II-1-1-2- قانون كولوم:

إذا وجدت في الفراغ شحنتان كهربائيتان q_1 و q_2 تفصلهما مسافة r فإنه وفقاً لقانون كولوم تؤثر إحدى الشحنتين على الأخرى بقوة كهربائية، تكتب القوة التي تؤثر بها q_1 على q_2 على الشكل التالي:



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (2-II)$$

\vec{u}_r هو شعاع وحدة الشعاع المتجه من الشحنة q_1 إلى الشحنة q_2 .

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ وهي تمثل السماحية الكهربائية للفراغ.

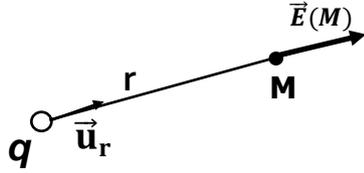
II-1-1-3- الحقل الكهربائي:

كون الشحنة النقطية q_1 أثرت على q_2 بقوة كهربائية أي أن q_1 غيرت من الخصائص الفيزيائية للفضاء المحيط حول الشحنة q_2 . وبهذا يمكننا من وصف هذا التغيير بأن كل شحنة كهربائية تولد

حولها ما يسمى **بالحقل الكهربائي**. يعرف رياضياً بـ:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{q_2} \quad (3 - II)$$

إذن كل شحنة نقطية q موجودة في الفراغ تولد حولها وفي نقطة M تبعد عنها مسافة r حقلاً كهربائياً يعرف رياضياً بـ:



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (4 - II)$$

في حالة التوزيع المستمر الخيطي للشحنة ($dq = \lambda dl$) نكتب عبارة الحقل الكهربائي على النحو:

$$\vec{E}(M) = \int_l \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (5 - II)$$

λ تمثل الكثافة الخيطية للشحنة و dl يمثل الطول العنصري للتيار.

وفي حالة التوزيع السطحي للشحنة تعوض λdl بـ σds حيث σ تمثل الكثافة السطحية للشحنة، ويعوض التكامل الخيطي بتكامل سطحي.

في حالة التوزيع الحجمي للشحنة تعوض λdl بـ ρdv حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية للشحنة، ويعوض التكامل الخيطي بتكامل حجمي.

4-1-1-II- خصائص الحقل الكهربائي:

أ- الكمون السلمي:

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \text{حساب بسيط لدوران الحقل الكهربائي يعطي:}$$

ونعلم من الفصل السابق أن دوران تدرج أي دالة هو مقدار معدوم، إذن يمكن أن نستنتج أن:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (6 - II)$$

نقول أن الحقل الكهربائي يشتق من كمون سلمي φ .

تشتق عبارة الكمون السلمي الناشئ عن شحنة نقطية باعتبار الكمون معدوماً في المالا نهائية كما يلي:

$$\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7 - II)$$

إذن الشحنات الكهربائية في الفراغ تولد حولها حقولاً كهربائية، كما تولد كمونات كهربائية.

وحدة الحقل الكهربائي هي V/m و وحدة الكمون الكهربائي هي V .

في حالة التوزيع الحجمي للشحنة نكتب عبارة الكمون السلمي كما يلي:

$$\varphi(M) = \iiint_v \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8 - II)$$

لا بد أن نثوه أن للحقل الكهربائي تجولاً محفوظاً.

بما أن $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ وباستعمال نظرية ستوكس نجد أن:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (9 - II)$$

ب- نظرية غوص:

تسمح هذه النظرية بتسهيل حساب الحقل الكهربائي الناتج عن توزيعات مختلفة للشحنة وذات تناظر. تنص هذه النظرية على أن تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق يساوي المجموع الجبري للشحنة المتواجدة داخل الحجم المحدود بهذا السطح المغلق على السماحية الكهربائية للفراغ.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} \quad (10 - II)$$

حيث Q_i تمثل الشحنات الواقعة فقط داخل السطح S .

باستعمال نظرية التفرق بإمكاننا التوصل للصيغة التفاضلية لنظرية غوص:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11 - II)$$

حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية للشحنة.

ج- معادلة بواسون و لابلاس:

بالتأثير على طرفي المعادلة: $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$ بمؤثر نابلا نتحصل على:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (-\overrightarrow{\nabla} \phi) = \Delta\phi$$

ومن خلال معادلة غوص نتوصل إلى ما يدعى معادلة بواسون:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12 - II)$$

في حالة إنعدام الشحنة نجد معادلة لابلاس:

$$\Delta\phi = 0 \quad (13 - II)$$

د- الطاقة الكهروستاتيكية (الكهربائية):

الطاقة الكهروستاتيكية W لشحنة كهربائية نقطية q موجودة في النقطة M في منطقة يسودها حقل \vec{E} كهربائي تعرف على أنها العمل المبذول لنقل هذه الشحنة من المالانهاية الى هذه النقطة M ، أي أن

$$W = qV(M) \quad (14 - II) \quad \text{تعرف بـ } W$$

في حالة مجموعة من الشحنات تأخذ الطاقة الكهروستاتيكية الكلية للنظام الشكل:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (15 - II)$$

و في حالة التوزيع المستمر الحجمي للشحنة تأخذ الشكل:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv \quad (16 - II)$$

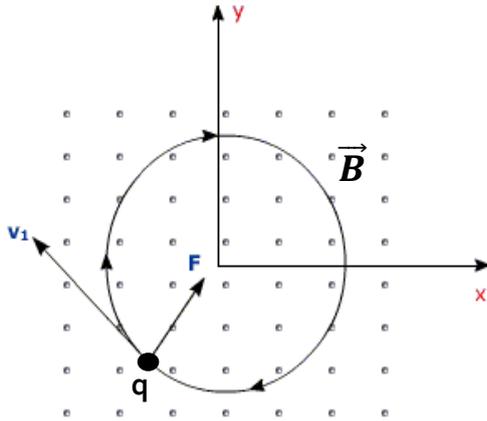
2-1-II- المغناطيسية الساكنة:

1-2-1-II- مفهوم الحقل المغناطيسي :

بينت التجربة أن الحقل المغناطيسي ينشأ بجوار شحنات كهربائية في حالة حركة.

في معلم غاليلي تخضع شحنة كهربائية q متحركة بالسرعة \vec{v} في منطقة يسودها حقل مغناطيسي \vec{B} وحقل كهربائي \vec{E} إلى قوة تدعى بقوة لورنتز. هذه القوة مكونة من مركبتين، جزء يشكل القوة الكهربائية و الجزء الآخر يتعلق بسرعة الشحنة ويدعى بالقوة المغناطيسية. تكتب قوة لورنتز على الشكل التالي:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (17 - II)$$

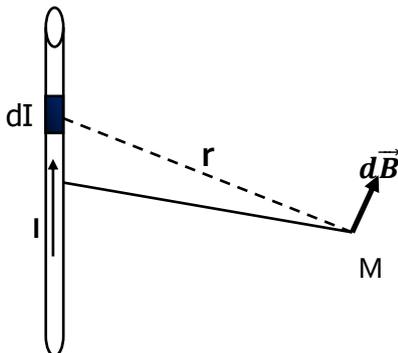


\vec{E} يمثل الحقل الكهربائي و \vec{B} يمثل الحقل المغناطيسي. و يقاس الحقل المغناطيسي بوحدة تيسلا (Tesla).

2-2-1-II- قانون بيو و سافارت:

وهي علاقة تجريبية توضح عبارة الحقل المغناطيسي الناتج عن شعاع كثافة التيار \vec{J} في نقطة M تبعد مسافة r عن كثافة التيار. وتنص على أن:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} dv \times \vec{r}}{r^3} \quad (18 - II)$$



\vec{J} تمثل شعاع كثافة التيار العابر للحجم dv . و الذي يمثل مصدر الحقل المغناطيسي.

μ_0 النفاذية المغناطيسية للفراغ حيث $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$.

أيضا يمكن تحويل كثافة التيار الحجمية إلى شدة التيار I .

عن طريق العلاقة الرابطة بينهما: $\vec{j} dv = I d\vec{l}$

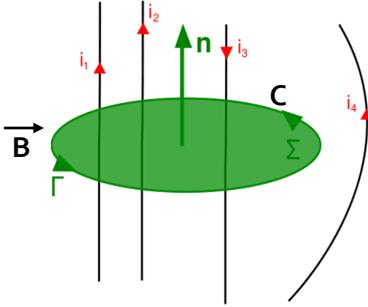
بالتالي تكتب عبارة الحقل المغناطيسي كما يلي:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iiint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (19 - II)$$

II-1-2-3- خصائص الحقل المغناطيسي:

أ- نظرية أمبير:

يربط قانون أمبير بين تجول الحقل المغناطيسي على طول منحنى مغلق و مصدر هذا الحقل و المتمثل في التيار الكهربائي.



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I \quad (20 - II)$$

حيث I هو التيار الكهربائي العابر للسطح المحدد بالمسار المغلق C . كما أن العبارة التفاضلية لقانون أمبير تكتب على الشكل:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (21 - II)$$

ب- تدفق الحقل المغناطيسي:

عند حساب تدفق الحقل المغناطيسي عبر سطح مغلق S فإن النتيجة تساوي الصفر. تترجم هذه النتيجة خاصية انحفاظ تدفق الحقل المغناطيسي. رياضيا نلخص هذه الخاصية بـ:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (22 - II)$$

ج- الكمون المغناطيسي:

بما أن $\text{div } \vec{B} = 0$ ومن جهة أخرى نعلم أيضا أن تفرق دوران أي حقل شعاعي هو مقدار معدوم،

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0 \quad \text{فإن:}$$

إذاً من خلال هاتين العلاقتين يمكننا كتابة شعاع الحقل المغناطيسي على الشكل التالي:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (23 - II)$$

يسمى الشعاع \vec{A} الكمون المغناطيسي الشعاعي، إذاً الحقل المغناطيسي يشتق من كمون شعاعي. من أجل توزيع خيطي للتيار ذي شدة I يمكن إثبات أن الكمون الشعاعي قد يأخذ الشكل التالي:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l}}{r} \quad (24 - II)$$

من خلال العلاقة التي تربط بين الكمون الشعاعي و الحقل المغناطيسي نجد أن الكمون الشعاعي يحقق المعادلة:

$$\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (25 - II)$$

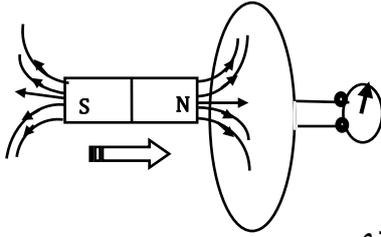
II-2- معادلات ماكسويل:

تمثل معادلات ماكسويل أساس النظرية الكهرومغناطيسية. وهي أربع معادلات تصف العلاقات المتبادلة بين كل من الحقول الكهربائية والحقول المغناطيسية في الأنظمة المتغيرة، وعلاقة هذه الحقول بالشحنات الكهربائية والتيار الكهربائي. نذكر أن الأنظمة المتغيرة مع الزمن تتميز بكون الحقول فيها تتعلق بالزمن.

II-2-1- معادلات ماكسويل في الفراغ:

II-2-1-1- ظاهرة التحريض المغناطيسي:

في 1831م اكتشف مايكل فارادي و جوزيف هنري أنه ينتج عن حقل مغناطيسي متغير مع الزمن حقل كهربائي متغير مع الزمن، وسميت هذه الظاهرة بظاهرة التحريض (الحث) المغناطيسي. يمكن توضيح هذه الظاهرة بواسطة تجربة فارادي، فعند وجود سلك ناقل على شكل حلقة موصول بجهاز جلفانومتر بجوار مغناطيس ساكن و في نفس المستوى لا نلاحظ تياراً كهربائياً في الحلقة. عند تحريك المغناطيس نحو و خارج الحلقة نلاحظ انحراف مؤشر الجلفانومتر، دلالة على وجود تيار كهربائي متحرض داخل الحلقة، حيث تتناقص شدة التيار أو تزايد وفقاً لتقريب أو إبعاد



المغناطيس عن الحلقة. هذا التيار ينشأ نتيجة تكون قوة محرّكة كهربائية ($e. m. f$) داخل الحلقة.

وجد أن القوة المحركة الكهربائية ترتبط مع معدل التغير

الزمني للتدفق المغناطيسي الذي يمر عبر هذه الحلقة، إذ نص فارادي على أن:

$$e. m. f = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (26 - II)$$

الإشارة (-) تدل على أن القوة المحركة الكهربائية ($e. m. f$) تعمل بشكل يعاكس معدل تغير التدفق الذي أدى لإنتاجها، وهذا ما يسمى بقانون لنز.

أيضا ترتبط القوة المحركة الكهربائية بالحقل الكهربائي المتحرض الناتج عن التيار المتحرض في كل نقطة من الدارة بالعلاقة:

$$e.m.f = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (27 - II)$$

$$e.m.f = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} : \quad \text{وبالتالي}$$

حيث السطح S محاط بالمسار C. إذن العبارة التفاضلية لقانون فارادي تكتب كما يلي:

$$\boxed{\vec{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (28 - II)$$

يبدو جليا أن الحقل المغناطيسي المتغير مع الزمن يولد حوله حقلًا كهربائيًا.

II-2-1-2- تيار الإزاحة الكهربائية:

ينشأ هذا التيار عن معدل تغير كثافة التدفق الكهربائي مع الزمن. في الأنظمة الغير متغيرة مع الزمن معادلة أمبير تنص على أن:

$$\vec{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (29 - II)$$

\vec{J} يمثل الكثافة الحجمية للتيار الكهربائي.

كذلك معادلة استمرارية الشحنة تأخذ الشكل:

$$div \vec{J} = 0 \quad (30 - II)$$

بينما في الأنظمة المتغيرة مع الزمن معادلة استمرارية الشحنة تكون على الشكل:

$$div \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (31 - II)$$

لو نحسب تفرق شعاع كثافة التيار من معادلة أمبير نجد:

$$\vec{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow div(\vec{rot} \vec{B}) = \mu_0 div \vec{J}$$

$$div(\vec{rot} \vec{B}) = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$div \vec{J} = 0 \quad \text{أي:}$$

إذاً هناك تناقض بين معادلة الاستمرارية التي هي معادلة محققة دوماً و معادلة أمبير التي هي معادلة تجريبية. لرفع هذا التناقض اقترح ماكسويل تعديل معادلة أمبير كما يلي: لدينا من معادلة غاوس:

$$\rho = \epsilon_0 div \vec{E} \quad (32 - II)$$

وبتعويض المعادلة (32 - II) في معادلة استمرارية الشحنة نحصل على:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{J} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = -\operatorname{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \vec{J}_{tot} = 0 \end{aligned} \quad (33 - II)$$

حيث اقترح ماكسويل تسمية الحد $\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ بشعاع الكثافة الحجمية للتيار الكلي، وبالتالي أصبحت معادلة الاستمرارية و معادلة أمبير متفتحتين في نفس النتيجة، أي أن في الأنظمة الغير مستقرة $\operatorname{div} \vec{J}_{tot} = 0$.

حيث اصطلح على تسمية الحد $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ بكثافة تيار الإنزياح \vec{J}_d ، وهو تيار ناتج عن تغيرات الحقل الكهربائي مع الزمن، وأصبحت معادلة أمبير تسمى بمعادلة أمبير المعممة.

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d)} \quad (34 - II)$$

إذا تغير الحقل الكهربائي مع الزمن يولد أيضا حوله حقلاً مغناطيسياً متحرضاً.

على ضوء ما سبق نلخص معادلات ماكسويل في أربع معادلات:

3-1-2-II - معادلة ماكسويل- فارادي:

تعتبر هذه المعادلة عن ظاهرة التحريض الكهرومغناطيسي. تصرح هذه المعادلة بأن الحقول الكهربائية تنشأ أيضا عن تغيرات الحقل المغناطيسي مع الزمن، فضلا على أنها تنشأ عن الشحنات الكهربائية. الصيغة الرياضية لهذه المعادلة تتلخص في:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (35 - II)$$

4-1-2-II - معادلة انحفاظ تدفق الحقل المغناطيسي:

تلخص أن خطوط الحقل المغناطيسي تشكل عروات مغلقة أي ليس لها منابع و لا مصبات. الصيغة الرياضية لهذه المعادلة تتلخص في:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (36 - II)$$

II-2-1-5- معادلة ماكسويل-غاوس:

تعتبر على أن الشحنات الكهربائية تشكل منابع أو مصبات للحقل الكهربائي. الصيغة الرياضية لهذه المعادلة تتلخص في:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (37 - II)$$

II-2-1-6- معادلة ماكسويل-أمبير:

تنص هذه المعادلة على أن الحقل المغناطيسي ينشأ أيضا عن تغيرات الحقل الكهربائي مع الزمن، فضلا على انه ينشأ عن تيارات التوصيل. الصيغة الرياضية لهذه المعادلة تتلخص في:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (38 - II)$$

◀ إن نلخص الصيغ التفاضلية لمعادلات ماكسويل العامة:

في وجود الكثافة الحجمية للشحنة و التيار يحقق الحقل الكهرومغناطيسي (\vec{E}, \vec{B}) المعادلات:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad - 1$$

$$\text{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad - 2$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad - 3$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad - 4$$

تبين هذه المعادلات أن وجود حقل كهربائي متغير مع الزمن في نقطة ما من الفضاء يدل على وجود حقل مغناطيسي متغير مع الزمن و العكس صحيح أيضا.

المعادلتان 1 و 2 تبيينان بنية (\vec{E}, \vec{B}) بينما المعادلتان 3 و 4 توضحان علاقة الحقلين بمصدريهما أي كثافة الشحنة و كثافة التيار.

◀ الصيغ التكاملية لمعادلات ماكسويل في الفراغ:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \iint_S (\vec{B} \cdot d\vec{s}) \quad - 1$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad - 2$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad - 3$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \right] \quad - 4$$

II-2-1-7- الكمون الشعاعي و الكمون السلمي (V, \vec{A}) :

بما أن $div \vec{B} = 0$ دوما محققة، أي أن الحقل المغناطيسي يشتق من كمون شعاعي، فإنه

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) \quad \text{يمكن كتابة معادلة فارادي على الشكل}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

أي أن المقدار الذي بين قوسين هو تدرج دالة سلمية: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} \phi$ و تكتب:

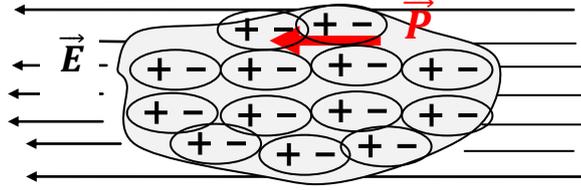
$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (39 - II)$$

نقول أن الحقل الكهربائي في الأنظمة المتغيرة مع الزمن يشتق من كمونين: كمون سلمية ϕ و أيضا كمون شعاعي \vec{A} .

II-2-2- معادلات ماكسويل في الأوساط المادية

II-2-2-1- الإستقطاب العيني:

عند تسليط حقل كهربائي \vec{E} على وسط مادي عازل فإن هذا الوسط سوف **يستقطب**؛ أي أن كل ذراته تصبح على شكل ثنائيات أقطاب كهربائية متجهة كلها في اتجاه هذا الحقل الكهربائي، وبالتالي هذه الثنائيات ستولد حقلاً كهربائياً جديداً ناتجاً عن الاستقطاب.



الشكل 1: شكل تخطيطي يوضح استقطاب المادة تحت تأثير حقل كهربائي خارجي.

يعرف شعاع الاستقطاب \vec{P} على أنه المجموع الشعاعي للزوم الكهربائية لوحدة الحجم. في الأوساط الخطية المتجانسة و المتماثلة المناحي يكون شعاع الإستقطاب متناسباً مع الحقل الكهربائي الإجمالي (الكلي)، وتكتب العلاقة بينهما على الشكل التالي:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (44 - II)$$

χ_e : تدعى التأثيرية الكهربائية، أو قابلية التكهرب للوسط، وهي عدد موجب يعبر عن مدى استجابة الوسط للحقول الكهربائية. ونتيجة للإستقطاب فإن الوسط يكافئ كثافة حجمية للشحنة و كثافة سطحية للشحنة، تعرفان بالشحنات المقيدة أو المستقطبة:

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P} \quad (45 - II)$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (46 - II)$$

\vec{n} يمثل شعاع الوحدة الناظمي على السطح.

علماً أن الكثافة الحجمية للشحنة الكلية ρ للجملة هي مجموع الكثافة الحجمية للشحنة الحرة ρ_l (الغير مستقطبة) و الكثافة الحجمية للشحنة المستقطبة ρ_p ، وبالتالي فإن نظرية غوص في الأوساط المادية تصبح كما يلي:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l - \text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (47 - II)$$

حيث \vec{E} يمثل الحقل الكهربائي الإجمالي الناتج عن الشحنات الحرة و الشحنات المقيدة.

$$(47 - II) \Rightarrow \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (48 - II)$$

العبرة التي بين قوسين يرمز لها بالشعاع \vec{D} ويدعى هذا الشعاع بشعاع الإزاحة الكهربائية:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (49 - II)$$

و بالتالي الصيغة التفاضلية لمعادلة غوص في الأوساط العازلة تكتب على الشكل:

$$\text{div} \vec{D} = \rho_l \quad (50 - II)$$

و الصيغة التكاملية تأخذ الشكل التالي:

$$\oiint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_l \quad (51 - II)$$

أي أن تدفق شعاع الإزاحة الكهربائية عبر سطح مغلق يساوي فقط مجموع الشحنات الحرة المحتواة بداخله.

في الأوساط الخطية و المتماثلة المناحي و المتجانسة، لدينا:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (52 - II)$$

تعرف السماحية الكهربائية النسبية للوسط العازل بـ: $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

ϵ_r هي عدد بدون وحدة. السماحية الكهربائية النسبية في الفراغ تساوي 1 وأكبر من الواحد في الأوساط المادية.

تعرف بالسماحية الكهربائية للفراغ $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2 / N.m^2$

و بالتالي المعادلة (52 - II) تصبح تكتب على الشكل:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (53 - II)$$

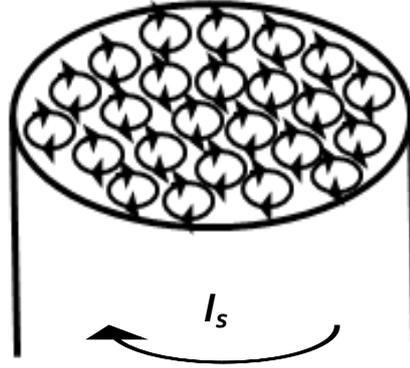
إذا \vec{D} و \vec{E} هما مقداران متناسبان.

المقدار $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ يدعى السماحية الكهربائية للوسط.

II-2-2-2- شعاع التمغظ:

تتكون المادة من ذرات متكونة أساسا من أنوية (شحنات موجبة) تحوم حولها إلكترونات (شحنات سالبة) في مسارات دائرية. هذه الأخيرة تشكل تيارات ذرية مغلقة، تمثل ثنائيات أقطاب مغناطيسية

ذات عزوم مغناطيسية \vec{M} . هذه العزوم تتوزع بشكل عشوائي، حيث مجموع هذه العزوم يكون معدوماً.



كما في حالة الإستقطاب عند تطبيق حقل مغناطيسي خارجي على وسط مادي فإن هذا الوسط **سيتمغظ**؛ أي يصبح على شكل مجموعة من المغناط الصغيرة ذات العزوم المغناطيسية المتجهة في اتجاه واحد تحت تأثير الحقل المغناطيسي الخارجي. هذه العزوم المغناطيسية تساهم في توليد حقل مغناطيسي جديد.

يعرف شعاع التمغظ \vec{M} بأنه مجموع العزوم المغناطيسية في وحدة الحجم.

نتيجة للتمغظ فإن الوسط المادي الممغظ يصبح مكافئاً لكثافة حجمية لتيار التمغظ يعرف بـ:

$$\vec{J}_p = \overrightarrow{rot} \vec{M} \quad (54 - II)$$

كثافة سطحية لتيار التمغظ و يعرف بـ:

$$\vec{\lambda}_p = \vec{M} \times \vec{n} \quad (55 - II)$$

حيث \vec{n} يمثل شعاع الوحدة الناظمي على السطح. إذاً معادلة أمبير في الأوساط المادية تأخذ الشكل

التالي:

$$\oint_{(c)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_s \mu_0 (\vec{J}_\ell + \vec{J}_p + \vec{J}_d) \cdot d\vec{S} \quad (56 - II)$$

\vec{J}_ℓ تمثل كثافة التيار الناتج عن حركة الشحنات الحرة و \vec{J}_p تمثل كثافة التيار الناتج عن التمغظ و

\vec{J}_d تمثل كثافة التيار الناتج عن الإستقطاب.

$$\overrightarrow{rot} \vec{M} = \vec{J}_p \Rightarrow \iint_s \overrightarrow{rot} \vec{M} \cdot d\vec{S} = \iint_s \vec{J}_p \cdot d\vec{S} \quad \text{و بما أنه:}$$

$$\Rightarrow \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J}_p \cdot d\vec{S}$$

إذن المعادلة (56 – II) تصبح من الشكل :

$$\oint_c \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J}_\ell + \vec{J}_d) \cdot d\vec{S} \quad (57 - II)$$

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_\ell + \vec{J}_d \quad \text{وباستعمال نظرية ستوكس نجد أن :}$$

و بإدخال مفهوم شعاع الشدة المغناطيسية \vec{H} تصبح المعادلة الأخيرة من الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{rot} \vec{H} = \vec{J}_\ell + \frac{d\vec{D}}{dt}} \quad (58 - II)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{حيث:}$$

أي أن دوران شعاع الشدة المغناطيسية في الأوساط المادية يساوي كثافة التيار الناتج عن حركة الشحنة الحرة و التيارات الناتجة عن الاستقطاب.

ومنه معادلة أمبير في الأوساط المادية تكتب على الشكل التالي:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J}_\ell + \vec{J}_d) \cdot d\vec{S} \quad (59 - II)$$

في الأوساط الخطية و المتماثلة المناحي و المتجانسة يرتبط شعاع التمغنط بشعاع الشدة المغناطيسية وفق العلاقة التالية:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (60 - II)$$

χ_m تمثل التأثرية المغناطيسية للوسط. الحقل المغناطيسي الكلي إذاً يكتب كما يلي:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (61 - II)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m} \quad \text{النفاذية المغناطيسية للفراغ.}$$

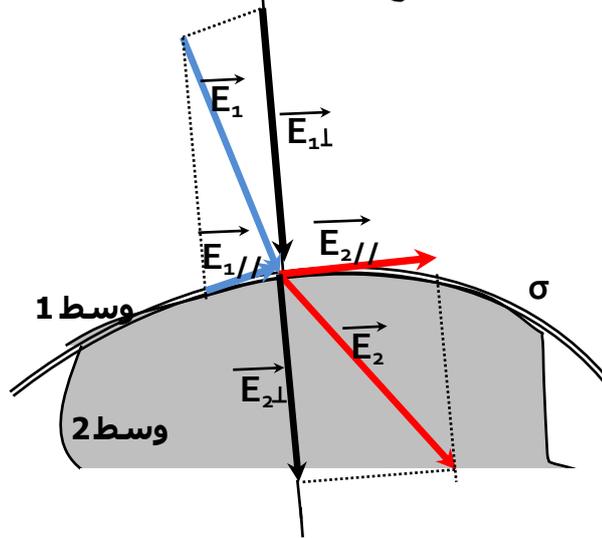
$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad \text{تمثل النفاذية المغناطيسية النسبية للوسط.}$$

إذاً في الأوساط المادية الخطية، المتجانسة و المتماثلة المناحي معادلات ماكسويل تكتب:

الصيغ التفاضلية	الصيغ التكاملية	
$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$	1/ قانون فارادي
$\text{div}\vec{D} = \rho_l$	$\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_l$	2/ قانون غوص
$\text{div}\vec{B} = 0$	$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	3/ قانون التدفق المغناطيسي
$\text{rot}\vec{H} = (\vec{J}_e + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$	$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J}_e + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$	4/ قانون أمبير المعمم

II-2-3- الشروط الحدية

لنأخذ وسطين عازلين مختلفين (ϵ_1) و (ϵ_2) على تماس أحدهما بالآخر. و نفرض أن السطح الفاصل بينهما يحمل كثافة شحنة سطحية حرة σ_l . عندما يجتاز الحقلان \vec{E} و \vec{D} السطح الفاصل فالعلاقات التي تربط بين الحقلين عند الحد الفاصل تدعى بالشروط الحدية. باستعمال قانون غوص نجد عند السطح الفاصل أن:



$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_l & E_{1//} = E_{2//} \\ D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_l & \varepsilon_1 D_{1//} = \varepsilon_2 D_{2//} \end{cases} \quad (62 - II)$$

الترتيب. $E_{1\perp}, D_{1\perp}$ و $E_{2\perp}, D_{2\perp}$ تمثل المركبات الناعمية للحقلين في الوسط الأول و الثاني على الترتيب.

الترتيب. $E_{1//}, D_{1//}$ و $E_{2//}, D_{2//}$ تمثل المركبات المماسية للحقلين في الوسط الأول و الثاني على

أي أن المركبة المماسية للحقل الكهربائي مستمرة عند الحد الفاصل.

أما في حالة تماس وسطين مغناطيسيين مختلفين (μ_1) و (μ_2) و الحد الفاصل بينهما يحمل كثافة تيار سطحية حرة \vec{j}_s ، باستعمال قانون أمبير الشروط الحدية للحقلين \vec{B} و \vec{H} تكتب على الشكل:

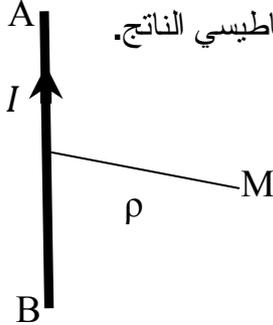
$$\begin{cases} B_{1\perp} = B_{2\perp} & \frac{1}{\mu_1} B_{1//} - \frac{1}{\mu_2} B_{2//} = |\vec{j}_s \times \vec{n}| \\ \mu_1 H_{1\perp} = \mu_2 H_{2\perp} & H_{1//} - H_{2//} = |\vec{j}_s \times \vec{n}| \end{cases} \quad (63 - II)$$

أي أن المركبة الناعمية للحقل المغناطيسي مستمرة عند الحد الفاصل.

تمرينات

التمرين 1:

1/ باستعمال قانون بيوسافارت أوجد عبارة الحقل المغناطيسي الناتج عن سلك ناقل AB يسري به تيار كهربائي I وذلك في نقطة M تبعد مسافة ρ عن الناقل.



2/ إذا اعتبرنا A و B يؤولان إلى المالانهاية، فأستنتج عبارة الحقل المغناطيسي الناتج.

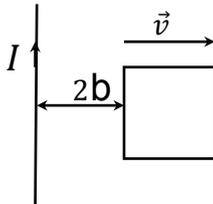
3/ أوجد هذه العبارة باستعمال قانون أمبير.

4/ أوجد عبارة الكمون الشعاعي الناتج في النقطة M . علما ان

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{k^2+x^2})$$

التمرين 2:

وضعت دائرة مغلقة مربعة الشكل ذات أبعاد $(2a \times b)$ مصنوعة من سلك ناقل بجوار سلك ناقل ذي طول لانهاية ويعبره تيار كهربائي ثابت I . الدارة و السلك موضوعان في نفس المستوي. نحرك الدارة المربعة الشكل بسرعة $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$. المسافة بين السلك و الدارة في اللحظة الابتدائية $r = 2b$. أحسب القوة المحركة الكهربائية المولدة في الدارة.



التمرين 3:

سلك ناقل طويل جدا و مهمل القطر محمول على المحور (OZ) يسري به تيار كهربائي I . نعتبر حلقة مربعة الشكل DCBA ناقلة و ذات مقاومة R موضوعة في نفس مستوي السلك. لنعتبر التيار المار في السلك متغيرا مع الزمن وفق المعادلة التالية:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

1/ أوجد القوة المحركة الكهربائية المتحرضة في الدارة.

2/ أوجد عبارة التيار المتحرض.

تمرين 4:

يعطى حقل مغناطيسي في الفراغ بـ:

$$\vec{B} = B_0 \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y) \vec{e}_z$$

1/ أحسب كثافة تيار الإنزياح، و ماذا يمثل هذا التيار؟

2/ أحسب شعاع الإزاحة الكهربائية.

3/ أحسب الكثافة الحجمية للشحنة الكهربائية.

التمرين 5:

يعطى حقل كهربائي في الفراغ بـ:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

1/ أحسب تفرقه و دورانه.

2/ أوجد مركبات الحقل المغناطيسي المرافق.

3/ أحسب تفرق و دوران هذا الحقل المغناطيسي.

4/ ماهي العلاقة التي يجب أن تربط بين α و β حتى تتحقق معادلات ماكسويل؟

الفصل III : إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية

III-1- الأمواج المستوية في وسط لانهازي

III-1-1- الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية في الفراغ

الموجة هي عبارة عن اهتزاز أو اضطراب ينتقل من نقطة إلى أخرى سواء في وسط مادي أو في الفراغ، فالاهتزاز أو الاضطراب هو عبارة عن تغيرات دورية لمقدار فيزيائي ما. تعتبر الموجة آلية يتم بواسطتها نقل المعلومة أو الطاقة من نقطة إلى أخرى، و ذلك بسرعة معينة. الشحنات الكهربائية المتسارعة (أو المتباطئة) تولد حولها حقولاً كهربائية متغيرة مع الزمن، وهي بدورها تولد حولها حقولاً مغناطيسية متغيرة مع الزمن، هذه أيضاً تولد بدورها حولها حقولاً كهربائية متغيرة مع الزمن و هكذا، أي أن الحقل الكهرومغناطيسي ينتشر على شكل أمواج كهرومغناطيسية، وانتشار الأمواج الكهرومغناطيسية لا يحتاج بالضرورة إلى وسط مادي.

III-1-1-1- معادلة انتشار الحقل الكهرومغناطيسي في الفراغ :

في الفراغ وعندما تكون الشحنات الكهربائية معدومة و كثافة التيار معدومة أيضاً تأخذ معادلات ماكسويل الشكل التالي:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1 - \text{III})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2 - \text{III})$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (3 - \text{III})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4 - \text{III})$$

بإدخال $\overrightarrow{\text{rot}}$ على طرفي المعادلة (1 - III) نجد :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\underbrace{\text{div}\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0=0}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t}$$

وباستعمال معادلة ماكسويل (4 - III) نجد :

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5 - \text{III})$$

و بالطريقة نفسها بإدخال مؤثر الدوران على المعادلة (4 - III) نجد أن :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6 - III)$$

وهما معادلتان تفاضليتان تشيران إلى معادلة الانتشار.

نستنتج من خلال هاتين المعادلتين الأخيرتين أن \vec{E}, \vec{B} يحققان معادلة الموجة، وعليه فإن الحقل الكهرومغناطيسي ينتشر في الفراغ على شكل أمواج بالسرعة:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8,85 \cdot 10^{-12}) \cdot (4\pi \cdot 10^{-7})}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

أي تنتشر بسرعة الضوء C في الفراغ.

III-1-1-2- إنتشار الموجة المستوية:

لتبسيط الدراسة نأخذ موجة كهرومغناطيسية مستوية، وهي موجة تنتشر في اتجاه واحد فقط، وليكن هذا الاتجاه هو المحور OZ على سبيل المثال؛ أي أن الحقل الكهرومغناطيسي يتعلق فقط بالزمن وبالإحداثي Z . معادلة الانتشار لكلا الحقلين تصبح من الشكل:

$$\frac{\partial^2 (\vec{E})}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 (\vec{E})}{\partial t^2} = 0 \quad (7 - III)$$

$$\frac{\partial^2 (\vec{B})}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 (\vec{B})}{\partial t^2} = 0 \quad (8 - III)$$

وهما معادلتان تفاضليتان من الدرجة الثانية حلها من الشكل:

$$\vec{E}(z, t) = f^+ \left(t - \frac{z}{c} \right) + f^- \left(t + \frac{z}{c} \right) \quad (9 - III)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ حيث:}$$

$f^+ \left(t - \frac{z}{c} \right)$ تمثل موجة كهرومغناطيسية منتشرة وفق المحور (OZ) بالسرعة c .

$f^- \left(t + \frac{z}{c} \right)$ تمثل موجة كهرومغناطيسية منتشرة وفق المحور $(-OZ)$ بالسرعة (c) .

III-1-2-1-1- عرضية الموجة المستوية:

وهي خاصية أساسية تتميز بها الموجة المستوية. نوضح هذه الخاصية بناء على معادلات ماكسويل

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{في الفراغ:}$$

$$(\text{rot} \vec{B})_z = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

إذا المركبة $E_z(t,z)$ لاتتعلق بالموضع ولا بالزمن، وبالتالي نستخلص أن المركبة $E_z(t,z)=0$ وبنفس الطريقة نجد أن $B_z(t,z)=0$.

وبالتالي نستنتج أن الحقلين $\vec{E}(t)$ و $\vec{B}(z,t)$ موجودان في المستوي (xy) فقط؛ أي في مستو عمودي على جهة الانتشار (Oz) . نقول أن الحقلين الكهربائي و المغناطيسي هما حقلان عرضيان. المستوي (yx) يدعى بمستوي (جبهة) الموجة.

III-1-1-2-2- الإستقطاب الخطي:

موجة كهرومغناطيسية مستوية مستقطبة خطيا أي أن حقلها الكهربائي محمول دوما على محور واحد عمودي على اتجاه الانتشار كالمحور (Ox) مثلا.

III-1-1-3-2- بنية الموجة المستقطبة خطيا:

نعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تنتشر وفق الإتجاه المتزايد للمحور (Oz) ومستقطبة خطيا وفق المحور (Ox) ؛ أي حقلها الكهربائي محمول على المحور (Ox) ، فكيف يكون اتجاه الحقل المغناطيسي لهذه الموجة؟

من خلال تحليل معادلة ماكسويل: $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ نجد :

$$(\text{rot}\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad (a)$$

لأن $\vec{E}(z,t)$ ليس لديه مركبات وفق (y) و (z) و بالتالي مشتق هذه المركبات معدوم أيضا.

$$(\text{rot}\vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}}_{=0} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (b)$$

$$(\text{rot}\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (c)$$

من خلال المعادلة (b) نتوصل إلى أن:

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} \quad (10 - III)$$

ولمجانسة طرفي هذه المعادلة نجري تبديل المتغير حيث نعلم $\vec{E}(z,t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

وبوضع $u = t - \frac{z}{c}$ نجد:

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial u} \left(-\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}$$

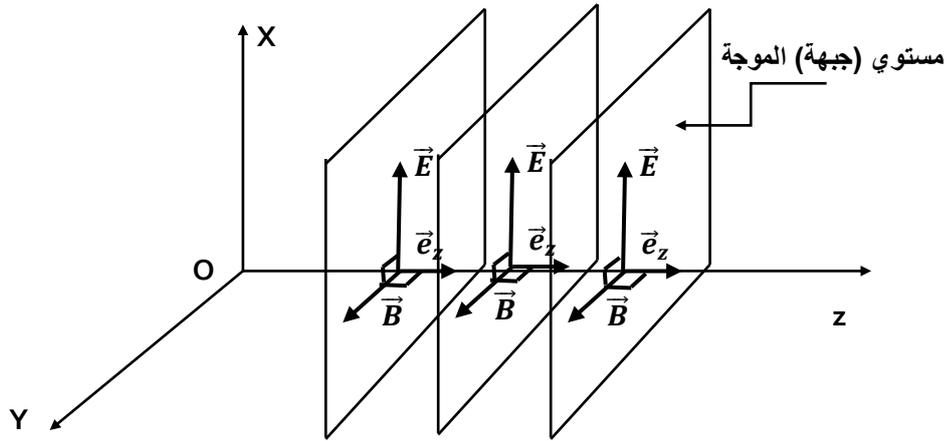
بالتعويض في المعادلة $(10 - III)$ نجد:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t} \Rightarrow B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_x(z, t) \Rightarrow$$

$$B_y = \frac{1}{c} E_x \quad (11 - III)$$

من هذه المعادلة الأخيرة نستخلص أن \vec{E} و \vec{B} متعامدان، و العلاقة التي تربط بين الحقلين هي:

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \frac{\vec{E}}{c} \quad (12 - III)$$



الشكل (1-4) الخاصية العرضية للموجة المستوية

III-1-1-2-4- الموجة المستوية الجيبية وأحادية الطول الموجي:

من بين الحلول الخاصة لمعادلة الإنتشار هي الموجة المستوية المتغيرة جيبيا مع الزمن من الشكل:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (13 - III)$$

نعتبر موجة جيبية مستوية تنتشر وفق المحور (OZ) أي أن:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (14 - III)$$

نعبر عن هذه الموجة في التمثيل المركب نظرا لسهولة التعامل معه رياضيا كمايلي:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)] \quad (15 - III)$$

\vec{k} يمثل شعاع الموجة و هو شعاع له نفس اتجاه الإنتشار، و طويلته تساوي $\frac{\omega}{c}$.

ω يمثل نبض الموجة.

\vec{E}_0 يمثل سعة الموجة.

لكن الحقل الكهربائي للموجة هو الجزء الحقيقي لهذه العبارة $\vec{E} = Re \{ \vec{E} \}$.

كل عمليات إشتقاق المعادلة (III - 15) بالنسبة للموضع و بالنسبة للزمن تكون على النحو التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv iw, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -w^2, \quad \vec{\nabla} \equiv -ik \quad (16 - III)$$

بالتعويض في معادلة الانتشار (III - 5) نجد:

$$\left(-k^2 + \frac{w^2}{c^2}\right) \vec{E} = \vec{0} \quad (17 - III)$$

أي أن الموجة الجيبية المستوية لا تكون حلاً لمعادلة الانتشار إلا إذا تحقق الشرط: $k = \frac{w}{c}$

والذي يسمى علاقة التبدد أو التشتت.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$$

إذا الموجة الجيبية هي موجة عرضية لأن حقلها الكهربائي و المغناطيسي عموديان على جهة الانتشار.

و من المعادلة الأولى لماكسويل نلاحظ أن:

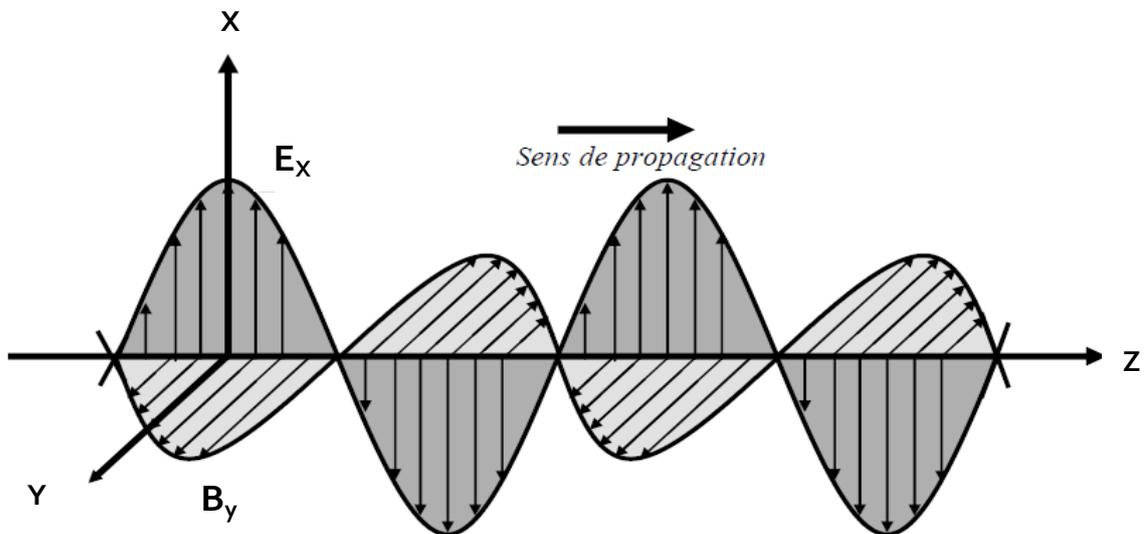
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{E} = -iw\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{w}$$

من خلال المعادلة الأخيرة نقول أن الحقلين الكهربائي و المغناطيسي للموجة الجيبية متعامدان و أيضا

$$\vec{B} \rightarrow \vec{k} \rightarrow \vec{E}$$

كذلك باعتماد علاقة التبدد نجد أن:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} \quad (18 - III)$$



الشكل (2-4): بنية الموجة الجيبية المستوية.

III-1-1-3- انتشار الطاقة الكهرومغناطيسية: شعاع بونتنيغ

لنحسب تفرق العبارة $\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ من خلال معادلات ماكسويل.

$$\text{div} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}]$$

إعتمادًا على معادلات ماكسويل نجد:

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{E} \cdot \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{div} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)} \quad (19 - \text{III})$$

يمثل كثافة الطاقة المختزنتين في الحقل الكهربائي و المغناطيسي، ويرمز لها $\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$: Ω_{em} .

$\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$: يدعى شعاع بونتنيغ، و يرمز له \vec{R} . وهو يعبر عن كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية العابرة

عبر الموجة عبر وحدة السطوح في وحدة الزمن. شعاع بونتنيغ له نفس اتجاه انتشار الموجة.

المعادلة (19 - III) تمثل معادلة انحفاظ الطاقة الكهرومغناطيسية في الفراغ.

الصيغة التكاملية لهذه الموجة تكتب:

$$\boxed{\underbrace{\oint_S \vec{R} \cdot d\vec{s}}_I = -\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \Omega_{em} d\tau}_{II} = -\frac{dU_{em}}{dt}} \quad (20 - \text{III})$$

تدفق شعاع بونتنيغ عبر السطح S يمثل الاستطاعة الكهرومغناطيسية المشعة عبر السطح S. أما الحد II في المعادلة (20 - III) يمثل المعدل الزمني لتناقص كثافة الطاقة المختزنة في الحقل الكهرومغناطيسي.

تعتبر هذه المعادلة على أن تدفق شعاع بونتنيغ عبر سطح مغلق يساوي تغير الطاقة الكهرومغناطيسية المختزنة في الحجم τ المحدد بهذا السطح المغلق.

طويلة شعاع بونتنيغ بالنسبة للموجة المستوية الجيبية الأحادية الطول الموجي يساوي:

$$|\vec{R}| = \varepsilon_0 c E^2 = c \frac{B^2}{\mu_0} = c \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) = c \cdot \Omega_{em} \quad (21 - III)$$

أي أن طويلة شعاع بونتنيغ يساوي سرعة الإنتشار في الفراغ مضروبة في كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية.

و القيمة المتوسطة لشعاع بونتنيغ و التي تمثل شدة الموجة الكهرومغناطيسية تأخذ الشكل التالي:

$$I = \langle |\vec{R}| \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 c E_{eff}^2 \quad (22 - III)$$

E_{eff} تمثل القيمة الفعالة لـ E .

تمرينات:

التمرين 1: أثبت أن المعادلات التالية:

$$E(x, t) = E_0 \sin \left[w \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$E(x, t) = E_0 \exp \left[w \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$E(x, t) = E_0 \cos [k(x \pm ct)]$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{هي حلول للمعادلة التالية:}$$

حيث x, t, c تمثل سرعة الانتشار و الزمن و المسافة على الترتيب.

التمرين 2:

من بين حلول معادلة انتشار \vec{E} و \vec{B} في الفراغ معادلة موجة مستوية أحادية الطول الموجي من الشكل:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{(wt - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{(wt - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

\vec{E}_0 و \vec{B}_0 ثوابت. أحسب:

$$1- \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, -\vec{\nabla} \cdot \vec{B}, -\vec{\nabla} \times \vec{E}, -\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

2- أ- بين أن \vec{E} و \vec{B} هما موجتان عرضيتان.

2- ب- بين أن \vec{E} و \vec{B} هما موجتان متعامدتان.

3- لنعبر موجة كهرومغناطيسية مستوية:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos [wt - kz] \vec{e}_x$$

ا- حدد سرعة الانتشار.

ب- حدد اتجاه انتشار الحقل الكهربائي.

ج- أوجد عبارة الحقل المغناطيسي.

التمرين 3:

نعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية و مستقطبة خطيا وجيبية ذات نبض w تنتشر في الفراغ. يرفق

في هذا الفراغ معلم متعامد و متجانس $(zyxO)$. تنتشر هذه الموجة وفق المحور (Ou) الذي يقع في

المستوي (yxO) و يصنع زاوية θ مع المحور (Ox) . الحقل الكهربائي محمول على المحور (Oz) و

$$E(O, t) = E_0 \cos(wt)$$

1/ أكتب مركبات شعاع الانتشار و مركبات شعاع الحقل الكهربائي في نقطة M ذات إحداثيات (x,y) و في اللحظة t.

2/ إستنتج مركبات الحقل المغناطيسي المرافق.

3/ أحسب الكثافة الحجمية للطاقة الكهرومغناطيسية ثم قيمتها المتوسطة.

4/ أوجد مركبات شعاع بونتنيغ ثم طويلته ثم قيمته المتوسطة.

5/ ماهي العلاقة التي تربط القيمة المتوسطة للكثافة الحجمية للطاقة الكهرومغناطيسية و طولية شعاع بونتنيغ؟

التمرين 4:

موجة كهرومغناطيسية مستوية ذات نبض w تنتشر في الفراغ. مركبات حقلها المغناطيسي في معلم متعامد و متجانس (zyxO) تعرف بـ :

$$B_x = 0, \quad B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), \quad B_z = 0$$

1- باستعمال معادلات ماكسويل أوجد مركبات الحقل الكهربائي بدلالة B_0 .

2- أوجد مركبات شعاع بونتنيغ.

3- ما هي الاستطاعة المتوسطة المشعة عبر سطح S عمودي على اتجاه الانتشار؟

التمرين 5:

نعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية ودورية ذات نبض w تنتشر في الفراغ. حقلها الكهربائي محمول على المحور (Oz). اتجاه انتشار هذه الموجة يقع في المستوي (yxO) و يصنع زاوية $\theta=45^\circ$ مع المحور (Ox).

1/ أكتب عبارة الحقل المغناطيسي و الكهربائي الموافقين لهذه الموجة.

2/ أوجد مركبات شعاع بونتنيغ.

3/ إستنتج العبارة اللحظية و المتوسطة لتدفق الاستطاعة.

III-1-2- إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في العوازل:

III-1-2-1- معادلة الانتشار في العوازل :

تتميز المواد العازلة بكون الشحنات الحرة معدومة؛ أي:

$$\rho_f = 0 \text{ و } \sigma_f = 0 \text{ حيث } \epsilon_r > 1 \text{ و } \mu_r > 1. \text{ لنر الآن خصائص انتشار الامواج}$$

الكهرومغناطيسية المستوية في هذه الأوساط.

لنعدْ لمعادلة الانتشار العامة، نجد أنه بالنسبة لانتشار الحقل الكهربائي في العوازل و من خلال معادلات ماكسويل:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III} - 23)$$

أي نفس معادلة الانتشار في الفراغ لكن بتغيير $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ و $\mu = \mu_r \mu_0$

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \text{ وبالتالي نلاحظ أن سرعة الانتشار في العوازل هي:}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \text{ حيث } n \text{ هي قرينة انكسار المادة العازلة}$$

و ϵ_r تمثل السماحية الكهربائية النسبية للوسط و μ_r تمثل النفاذية المغناطيسية النسبية للوسط، بمعنى أن سرعة الانتشار في الأوساط العازلة أصغر من سرعة الانتشار في الفراغ، فهي تتعلق بطبيعة الوسط.

$$|\vec{K}| = \frac{w}{v} = w \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{w}{c} n \text{ أما شعاع الانتشار يصبح على الشكل التالي:}$$

$$\mu_r = 1 \text{ من أجل المواد الغير مغناطيسية}$$

فما هي خصائص انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في العوازل؟ معادلة ماكسويل الأولى في الأوساط العازلة تأخذ الشكل التالي:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{III} - 24)$$

فمن أجل موجة كهرومغناطيسية جيبية مستوية تنتشر في الاتجاه (Oz) و مستقطبة خطيا وفق

المحور (Ox) واعتمادًا على العلاقة (III - 16) تصبح المعادلة (III - 24) من الشكل :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{E} = -iw\mu \vec{H} \Rightarrow -ik(\vec{E})_x = -iw\mu(\vec{H})_y \Rightarrow$$

$$\frac{(\vec{E})_x}{(\vec{H})_y} = \frac{\mu w}{k} = \frac{\mu w}{w\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(\vec{E})_x}{(\vec{H})_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \quad (25 - III)$$

$$\Rightarrow (\vec{E})_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\vec{H})_y \quad (26 - III)$$

نستنتج من خلال هذه المعادلة أن:

- 1- الأمواج المستوية في العوازل هي أمواج عرضية أيضا.
- 2- الحقل الكهربائي و المغناطيسي هما حقلان متوافقان في الطور، فإذا كان الحقل الكهربائي من الشكل:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{i} \quad (27 - III)$$

فإن الحقل المغناطيسي يكون على الشكل:

$$\vec{H}(z, t) = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{j} \quad (28 - III)$$

III-1-2-2- إنتشار الطاقة الكهرومغناطيسية في العوازل:

• كثافة الطاقة الكهرومغناطيسية تأخذ الشكل التالي:

$$\Omega_{em} = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon E^2}_{\Omega_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu H^2}_{\Omega_m} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \right)^2 = \epsilon E^2 \quad (29 - III)$$

نلاحظ أن كثافة الطاقة الكهربائية Ω_e تساوي كثافة الطاقة المغناطيسية Ω_m أي:

$$\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (30 - III)$$

• شعاع بونتينغ في الأوساط العازلة:

$$\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H} \Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \quad (31 - III)$$

أما القيمة المتوسطة لشعاع بونتينغ

$$\langle |\vec{R}| \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2 = v \epsilon \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \langle |\vec{R}| \rangle = v \varepsilon E_{eff}^2 \quad (32 - III)$$

حيث E_{eff} القيمة الفعالة لقيمة الحقل الكهربائي.

III-1-3- إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في الأوساط الناقلة :

III-1-3-1- معادلة الحقل الكهرومغناطيسي في الأوساط الناقلة :

في الأوساط الناقلة نعتبر أن $\rho_f = 0$ بينما الناقلية الكهربائية للناقل σ ليست معدومة،

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{حيث حسب قانون أوم}$$

معادلات ماكسويل في النواقل تصبح على الشكل التالي:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (33 - III)$$

من خلال معادلات ماكسويل في النواقل نتوصل إلى معادلة الانتشار:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (34 - III)$$

من بين حلول معادلات ماكسويل معادلة موجة مستوية جيبية تنتشر في الاتجاه Oz:

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{i}$$

وبالتالي معادلة هذه الموجة تحقق معادلات ماكسويل:

$$\textcircled{1} \vec{k} \cdot \vec{\tilde{E}} = 0$$

$$\textcircled{2} \vec{k} \cdot \vec{\tilde{H}} = 0$$

$$\textcircled{3} -i \vec{k} \times \vec{\tilde{E}} = -i \omega \mu \vec{\tilde{H}}$$

$$\textcircled{4} -i \vec{k} \times \vec{\tilde{H}} = \sigma \vec{\tilde{E}} + i \omega \varepsilon \vec{\tilde{E}}$$

من الواضح أن $\vec{\tilde{E}}$ و $\vec{\tilde{H}}$ حقلان عرضيان، أي ناظميان على جهة الانتشار.

$$\frac{(\vec{\tilde{E}})_x}{(\vec{\tilde{H}})_y} = \frac{\mu \omega}{k} \quad (*) \quad \text{من المعادلة } \textcircled{2} \text{ نجد أن :}$$

$$\frac{(\vec{\tilde{E}})_x}{(\vec{\tilde{H}})_y} = \frac{i k}{\sigma + i \varepsilon \omega} \quad (**) \quad \text{من المعادلة } \textcircled{4} \text{ نجد أن :}$$

المعادلة $\textcircled{4}$ تشير إلى أن الحقل الكهربائي و المغناطيسي غير متوافقين في الطور.

$$\frac{\mu w}{k} = \frac{ik}{\sigma + i\epsilon w} \quad \text{بالمقارنة بين (*) و (**): نجد أن:}$$

$$\Rightarrow k^2 = w^2 \epsilon \mu \left(1 - i \frac{\sigma}{\epsilon w}\right) \quad (35 - III)$$

نلاحظ أن شعاع الإنتشار في النواقل هو عدد مركب (عقدي).

أ- من أجل النواقل الجيدة: لدينا $|\vec{J}| \gg |\vec{J}_d|$

أي أن $\sigma \vec{E} \gg w \epsilon \vec{E}$ هذا يؤدي إلى أن $\frac{\sigma}{w \epsilon} \gg 1$

وباستعمال دستور التقريب تصبح عبارة العدد الموجي في الأوساط الجيدة الناقلية من الشكل:

$$k \approx \sqrt{w^2 \epsilon \mu \left(-i \frac{\sigma}{\epsilon w}\right)} \Rightarrow k = \sqrt{w \mu \sigma} (-i)^{1/2} \quad (36 - III)$$

كما نعلم أن: $-i = \exp\left(-i \frac{\pi}{2}\right)$

إذن العدد الموجي في الأوساط الجيدة الناقلية يكتب من الشكل:

$$k = \sqrt{w \mu \sigma} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \quad (37 - III)$$

إذن:

$$\frac{(\vec{E})_x}{(\vec{H})_y} = \frac{\mu w}{\sqrt{w \mu \sigma} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\mu w}{\sigma}} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \quad (38 - III)$$

أي أن موجة الحقل الكهربائي تسبق موجة الحقل المغناطيسي بالطور $\theta = \frac{\pi}{4}$

يمكن كتابة العدد الموجي أيضا:

$$k = \sqrt{\frac{w \mu \sigma}{2}} (1 - i) = k_r - i k_i \quad (39 - III)$$

حيث الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد الموجي يساوي $K_r = k_i = \sqrt{\frac{w \mu \sigma}{2}}$

من جهة أخرى:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_0 \exp[i(\omega t - (K_r - i k_i)z)] \vec{i} \\ &= \underbrace{E_0 \exp(-k_i z)}_{E'_0(z)} \exp[i(\omega t - k_r z)] \vec{i} \end{aligned} \quad (40 - III)$$

أي أن الحقل الكهرومغناطيسي يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}(z, t) &= E_0' \exp[i(\omega t - k_r z)] \vec{i} \\ \vec{\tilde{H}}(z, t) &= \sqrt{\frac{\sigma}{\mu \omega}} E_0 \exp(-k_i z) \exp\left[i\left(\omega t - k_r z - \frac{\pi}{4}\right)\right] \vec{j} \end{aligned} \quad (41 - III)$$

نلاحظ أن سعة الحقل الكهرومغناطيسي في الأوساط الجيدة الناقلية تتناقص أسياً مع الزمن في اتجاه الانتشار، أي أنها تتخامد بسرعة أثناء الانتشار.

يدعى المقدار $\frac{1}{k_i}$ بالعمق القشري، و يرمز له بالرمز δ وهو عبارة عن العمق (المسافة) التي تتناقص

عندها سعة الحقل الكهربائي بالنسبة 37% $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,71} = 37\%$ من سعته عند سطح الناقل.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (42 - III)$$

◀ وهو مقدار يختبر به مدى اختراق موجة كهرومغناطيسية لوسط جيد الناقلية.

سرعة الانتشار في الأوساط الجيدة الناقلية تعرف بـ: $v_\phi = \frac{\omega}{k_r}$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = c \sqrt{\frac{2\varepsilon\omega}{\sigma}} \lll c \quad (43 - III)$$

◀ سرعة الانتشار في الأوساط الجيدة الناقلية تكون صغيرة جداً أمام سرعة الضوء.

ب- من أجل الأوساط الضعيفة الناقلية: أي $|j_d| \gg |j| \ll 1 \ll \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

في هذه الحالة العدد الموجي يصبح من الشكل التالي:

$$k \cong \pm \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \left(1 - i \frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\right) \quad (44 - III)$$

الحقل الكهربائي لموجة تنتشر في هذا الوسط تكتب:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{E}}(z, t) &= E_0 \exp i \left[\omega t - \left(-\omega \sqrt{\varepsilon\mu} + i \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right) z \right] \vec{i} \\ &= E_0 \exp i \left[\omega t - \left(-\omega \sqrt{\varepsilon\mu} + i \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\varepsilon 2}} \right) z \right] \vec{i} \\ &= E_0 \exp \left(-\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} z \right) \exp i [\omega t - (\omega \sqrt{\varepsilon\mu} z)] \vec{i} \end{aligned}$$

$$\vec{\tilde{E}}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{E}'_0(\mathbf{z}) \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z \right) \right] \vec{i} \quad (45 - III)$$

نلاحظ أيضا في الأوساط الضعيفة الناقلية أن سعة الحقل الكهرومغناطيسي تتناقص أسيا وفق المحور

$$v = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n} \quad \text{Oz. بينما سرعة الإنتشار تساوي:}$$

أي نفس سرعة الإنتشار في العوازل.

III-1-2-3- إنتشار الطاقة الكهرومغناطيسية في الأوساط الناقلية:

لنحسب $div(\vec{E} \times \vec{H})$ اعتمادا على خصائص التحليل الشعاعي لدينا:

$$div(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{H}$$

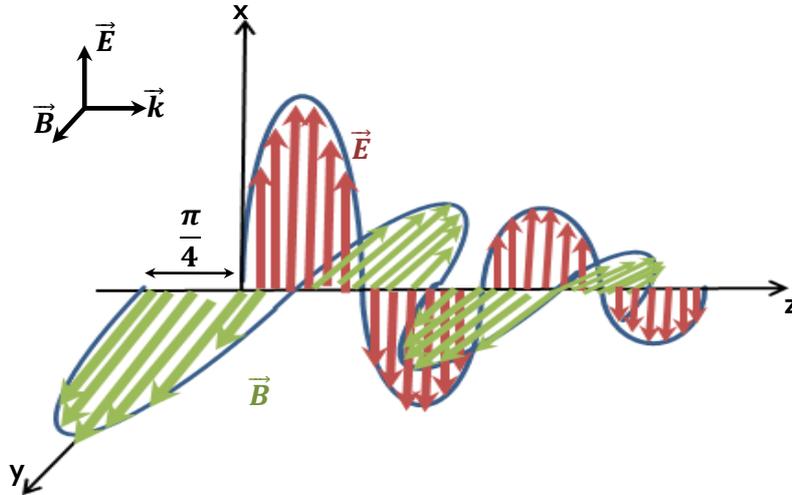
وباستخدام معادلات ماكسويل نجد:

$$\begin{aligned} div(\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} - \sigma E^2 - \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) - \sigma E^2 \\ div(\vec{E} \times \vec{H}) &= -\frac{\partial \Omega_{em}}{\partial t} - \sigma E^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$div \vec{R} = -\frac{\partial \Omega_{em}}{\partial t} - \sigma E^2 \quad (46 - III)$$

تدعى هذه المعادلة بمعادلة انحفاظ الطاقة الكهرومغناطيسية في الأوساط الناقلية.

تشير هذه المعادلة إلى أن تناقص الطاقة الكهرومغناطيسية المخترنة في الموجة يساوي كمية الطاقة المشعة عبر هذه الموجة (شعاع بونتنيغ) مضافاً إليه الطاقة الضائعة بفعل جول في الناقل (σE^2) .



الشكل (1-6): يوضح بنية الموجة الجيبية المستوية في النواقل الجيدة الناقلية.

تمريبات

تمرين 1:

تنتشر موجة كهرومغناطيسية سعتها العظمى $E_0 = 4\mu V/m$ في وسط عازل: $\epsilon_r = 6$ و $\mu_r = 1$
 1/ أوجد سرعة الموجة و شعاع بوينتينغ.
 2/ أوجد السعة العظمى للحقل المغناطيسي.

تمرين 2:

موجة كهرومغناطيسية تنتشر في وسط غير ناقل ذي سماحية $\epsilon_r = 9$ و نفاذية مغناطيسية نسبية $\mu_r = 1$. الحقل الكهربائي ذو تردد يساوي 1GHz وذو سعة تساوي 3V/m ومحمول على المحور Ox واتجاه الانتشار هو المحور Oz.

1/ أحسب سرعة الإنتشار. و أعط مركبات الحقل الكهربائي و شعاع الإزاحة الكهربائية.
 2/ أوجد مركبات الحقل المغناطيسي و شعاع الشدة المغناطيسية.

تمرين 3:

موجة كهرومغناطيسية جيبية مستوية و أحادية الطول الموجي ذات تردد $\nu = 1MHz$ و تنتشر عموديا وفق المحور Oz. سعة الحقل الكهربائي عند البداية ($z=0$) تساوي 150 V/m. تعطى أيضا ناقلية مياه البحر بـ $\sigma = 4.5 \text{ s/m}$ و $\epsilon_r = 81$ و $\mu_r = 1$.

1/ بين أن مياه البحر هو ناقل مثالي عند هذا التردد.

2/ أحسب سرعة الطور و معامل التخماد.

3/ أعط عبارة الحقل المغناطيسي.

تمرين 4:

سلك من التنغستين طوله 1,32م نصف قطره 1مم و ناقليته $\sigma = 1,8 * 10^7 \text{ mho/m}$. طبق عليه توتر مقداره $\nu = 10$ فولط. أوجد شعاع بوينتينغ على سطح هذا السلك ثم أرسم طويلته في

المجال $0 \leq r \leq \infty$.

تمرين 5:

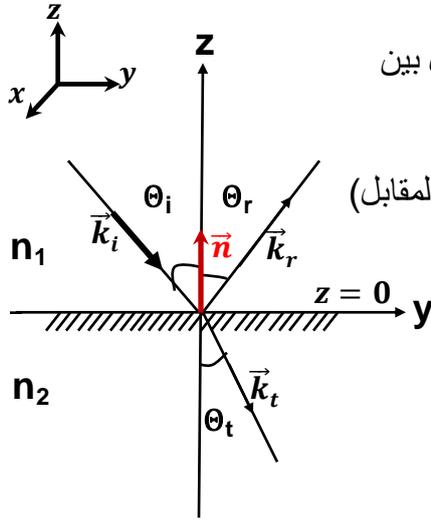
فرن ميكرويف يرسل موجة كهرومغناطيسية جيبية و أحادية الطول الموجي ذات تردد $\nu = 2.5GHz$ وسعة حقلها الكهربائي يساوي 300 V/m. علما أن ناقلية الطعام تساوي $\sigma = 1.6 \text{ S.m}^{-1}$

- أحسب الاستطاعة المتوسطة المبددة في وحدة حجم الطعام.

III-3- انعكاس و انكسار الأمواج الكهرومغناطيسية

III-3-1- قانونا الانعكاس و الانكسار لسنل ديكرات:

عند سقوط موجة كهرومغناطيسية مستوية على سطح فاصل بين وسطين عازلين مختلفين فإن جزءاً من هذه الموجة ينعكس و الجزء الآخر سينفذ إلى الوسط الثاني



◀ لنعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية تسقط على الحد الفاصل بين وسطين عازلين قرينة انكسارهما n_1 و n_2 .

هذه الموجة الواردة تصنع زاوية θ_i مع الناظم (كما في الشكل المقابل)

وتنتشر وفق شعاع الانتشار \vec{k}_i . أيضا \vec{k}_r و \vec{k}_t هما أشعة

انتشار الموجة المنعكسة و النافذة على الترتيب، كما

أن للموجات الثلاث نفس التردد w .

\vec{n} يمثل شعاع وحدة ناظم على السطح الفاصل $z = 0$.

المستوي المشكّل من \vec{n} و \vec{k}_i يدعى مستوي ورود.

الشكل (1-7): يوضح انعكاس و انكسار موجة كهرومغناطيسية

تكتب معادلات الحقل الكهربائي للموجات الثلاث على الشكل:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[i(wt - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[i(wt - \vec{k}_r \cdot \vec{r})]$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp[i(wt - \vec{k}_t \cdot \vec{r})]$$

حيث:

$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = \frac{w}{v_1} = \frac{wn_1}{c}, \quad |\vec{k}_t| = \frac{w}{v_2} = \frac{wn_2}{c} \quad (46 - III)$$

من خلال الشروط الحدية و اعتمادا على خاصية الاستمرارية للحقل الكهربائي عند الحد الفاصل

$$(E_i + E_r)_{\parallel} = (E_t)_{\parallel} \quad (z=0)$$

$$\Rightarrow E_{0i} \exp[i(wt - \vec{k}_i \cdot \vec{r})] + E_{0r} \exp[i(wt - \vec{k}_r \cdot \vec{r})] = E_{0t} \exp[i(wt - \vec{k}_t \cdot \vec{r})]$$

الشروط الحدية تكون محققة في كل نقطة من نقاط السطح الفاصل $z = 0$ و في كل لحظة من الزمن t ، رياضيا لا يمكن للمعادلة الأخيرة أن تتحقق إلا إذا تساوت المعاملات الأسية:

$$(wt - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) = (wt - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) = (wt - \vec{k}_t \cdot \vec{r}) \quad (47 - III)$$

$$\Rightarrow \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \quad (48 - III)$$

حيث أن \vec{r} شعاع اختياري من السطح الفاصل.

من خلال خصائص تحليل الأشعة لدينا : $\vec{r} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})$ أي:

$$(48 - III) \Leftrightarrow \vec{k}_i \cdot (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})) = \vec{k}_r \cdot (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})) = \vec{k}_t \cdot (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}))$$

$$\Rightarrow (\vec{k}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = (\vec{k}_r \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = (\vec{k}_t \times \vec{n}) \cdot (\vec{n} \times \vec{r})$$

و بالتالي المعادلة الأخيرة تكون محققة إلا كان :

$$\Rightarrow (\vec{k}_i \times \vec{n}) = (\vec{k}_r \times \vec{n}) = (\vec{k}_t \times \vec{n}) \quad (49 - III)$$

نستنتج من هذه المعادلة الأخيرة ما يلي:

• أشعة الانتشار للموجات الثلاث \vec{k}_i و \vec{k}_r و \vec{k}_t تقع في نفس المستوي والذي يدعى بمستوي الورود لأن الناظم على مستوي الورود (\vec{k}_i, \vec{n}) مواز لناظم المستوي (\vec{k}_r, \vec{n}) و لناظم على المستوي (\vec{k}_t, \vec{n}) .

• و من المعادلة (49 - III) نجد : $|\vec{k}_i| |\vec{n}| \sin \theta_i = |\vec{k}_r| |\vec{n}| \sin \theta_r$

وبما أن $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r|$ إذن:

$$\theta_i = \theta_r \quad (50 - III)$$

تمثل هذه المعادلة قانون سنل للإعكاس.

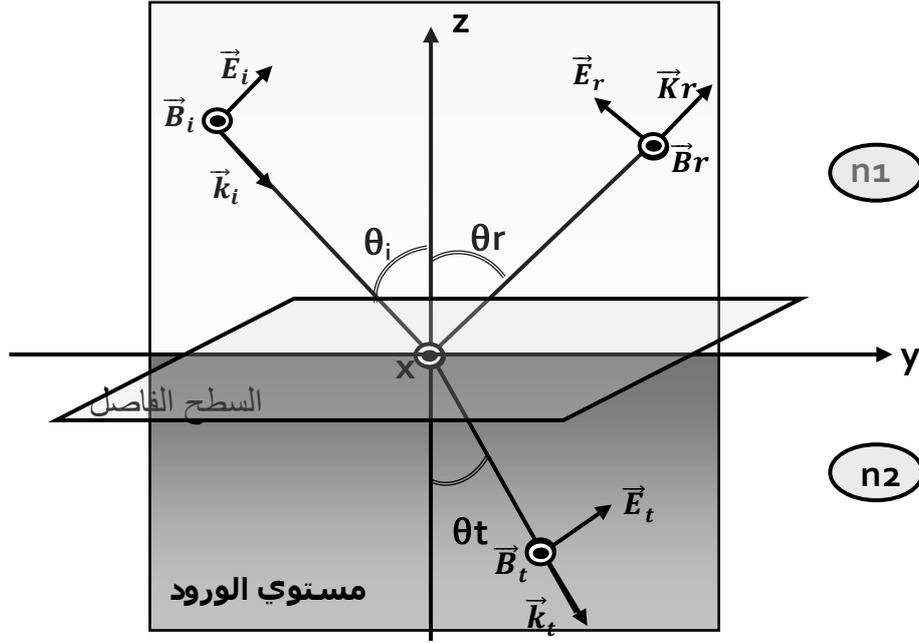
• ويكون أيضاً: $|\vec{k}_i \times \vec{n}| = |\vec{k}_t \times \vec{n}| \Rightarrow |\vec{k}_i| |\vec{n}| \sin \theta_i = |\vec{k}_t| |\vec{n}| \sin \theta_t$

$$\Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (51 - III)$$

تدعى هذه المعادلة قانون سنل للانكسار.

III-3-2- معادلات فريزل:

نعتبر موجة كهرومغناطيسية مستوية ومستقطبة خطياً تسقط سقوطاً مائلاً على سطح فاصل بين وسطين عازلين n_1 و n_2 (كما في الشكل أدناه). نعتبر أن الوسطين خطيان و متجانسان و متماثلا المناحي. نعتبر في البداية أن الحقل الكهربائي موجود مستوي الورود أي المستوي (yz) و بالتالي شعاع الحقل المغناطيسي يكون خارجاً من مستوي الورقة (المستوي xy) أي الحقل المغناطيسي يكون مماسياً للسطح البيني.



فما هي العلاقة التي تربط بين سعات الموجة الواردة و المنعكسة و النافذة ؟
الحقول الكهرومغناطيسية للموجة الواردة و المنعكسة و النافذة تكون على الشكل التالي بالترتيب:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)], & \vec{B}_i = \frac{\vec{K}_i}{\omega} \times \vec{E}_{0i} \exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)] \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)], & \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \times \vec{E}_{0r} \exp[i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)] \\ \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp[i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)], & \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t}{\omega} \times \vec{E}_{0t} \exp[i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)] \end{cases} \quad (52 - III)$$

و عند الحد الفاصل بين الوسط ① و ② ومن الشروط الحدية للحقل الكهرومغناطيسي (II-62) و

(63 - II)، وحيث لا وجود لشحنات أو تيارات حرة في الوسط البيني فإن:

$$\left(\frac{1}{\mu_1} B_1\right)_{//} = \left(\frac{1}{\mu_2} B_2\right)_{//} \quad \text{و} \quad (E_1)_{//} = (E_2)_{//} \quad (53 - III)$$

في الوسط ① لدينا حقل الموجة الواردة و المنعكسة وفي الوسط ② لدينا حقل الموجة المنكسرة فقط أي:

$$\begin{cases} (E_i)_{//} + (E_r)_{//} = (E_t)_{//} \\ \frac{1}{\mu_1} (B_i)_{//} + \frac{1}{\mu_1} (B_r)_{//} = \frac{1}{\mu_2} (B_t)_{//} \end{cases} \quad (54 - III)$$

بإسقاط مركبات الحقل الكهربائي و المغناطيسي على السطح الفاصل نجد:

$$\begin{cases} E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_r = E_{0t}\cos\theta_t \\ \frac{1}{\mu_1}(B_{0i} + B_{0r}) = \frac{B_{0t}}{\mu_2} \end{cases} \quad (55 - III)$$

و باستعمال العلاقة التي تربط بين سعني الحقل الكهربائي و المغناطيسي \vec{E} و \vec{B} :

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{v} = \frac{n|\vec{E}|}{c}$$

نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_r = E_{0t}\cos\theta_t & (1) \\ \frac{n_1}{\mu_1}(E_{0i} + E_{0r}) = \frac{n_2}{\mu_2}E_{0t} & (2) \end{cases}$$

حل جملة المعادلتين (1)+(2) يعطي:

$$\begin{cases} E_{0r} = \frac{\mu_2 n_1 \cos\theta_t - \mu_1 n_2 \cos\theta_i}{\mu_2 n_1 \cos\theta_t + \mu_1 n_2 \cos\theta_i} E_{0i} \\ E_{0t} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos\theta_i}{\mu_1 n_2 \cos\theta_i + \mu_2 n_1 \cos\theta_t} E_{0i} \end{cases} \quad (56 - III)$$

إذن نعرّف النسب:

$$\begin{cases} r_{//} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{\mu_2 n_1 \cos\theta_t - \mu_1 n_2 \cos\theta_i}{\mu_2 n_1 \cos\theta_t + \mu_1 n_2 \cos\theta_i} \\ t_{//} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos\theta_i}{\mu_1 n_2 \cos\theta_i + \mu_2 n_1 \cos\theta_t} \end{cases} \quad (57 - III)$$

تُدعي النسبة بين سعة الموجة الناقذة و سعة الموجة الواردة $(t_{//})$ والنسبة بين الموجة المنعكسة و سعة الموجة الواردة $(r_{//})$ في حالة الإستقطاب الموازي (الحقل الكهربائي مواز لمستوي الورود) بالزوج الأول لمعادلات فرينل.

في حالة الاستقطاب العمودي (الحقل الكهربائي ناظمي على مستوي الورود) فإن الزوج الثاني لمعادلات فرينل يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{n_1\mu_2\cos\theta_i - n_2\mu_1\cos\theta_t}{n_1\mu_2\cos\theta_i + n_2\mu_1\cos\theta_t} \\ t_{\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\mu_2\cos\theta_i + n_2\mu_1\cos\theta_t} \end{cases} \quad (58 - III)$$

من أجل أوساط غير مغناطيسية $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$ معادلات فرينل تصبح من الشكل:

$$\begin{cases} r_{//} = \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)} & r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \\ t_{//} = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_t + \theta_i)\cos(\theta_i - \theta_t)} & t_{\perp} = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_i}{\cos(\theta_t + \theta_i)} \end{cases} \quad (59 - III)$$

يعرف معامل الانعكاس R على أنه النسبة بين القيمة المتوسطة لشعاع بوننتغ للموجة المنعكسة و القيمة المتوسطة لشعاع بوننتغ للموجة الواردة. هذا المقدار يسمى "شدة الموجة الكهرومغناطيسية".

$$R = \frac{\langle |\vec{R}_r| \rangle}{\langle |\vec{R}_i| \rangle} = \frac{(E_{0r})^2}{(E_{0i})^2} = (r)^2 \quad (60 - III)$$

كما أن معامل النفاذ يساوي:

$$T = \frac{\langle |R_t| \rangle}{\langle |R_i| \rangle} = \frac{\mu_1 n_2 \cos\theta_t}{\mu_2 n_1 \cos\theta_i} (t)^2 \quad (61 - III)$$

وعند جمع R و T نجد:

$$\begin{aligned} R + T &= \left(\frac{\mu_2 n_1 \cos\theta_t - \mu_1 n_2 \cos\theta_i}{\mu_2 n_1 \cos\theta_t + \mu_1 n_2 \cos\theta_i}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\mu_1 n_2 \cos\theta_t}{\mu_2 n_1 \cos\theta_i}\right) \left(\frac{2\mu_2 n_1 \cos\theta_i}{\mu_1 n_2 \cos\theta_i + \mu_2 n_1 \cos\theta_t}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{R + T = 1} \quad (62 - III) \text{ إذا}$$

III-3-3- زاوية بروستر:

في حالة الاستقطاب الموازي، عندما تسقط موجة كهرومغناطيسية بزواوية ورود تدعى بزواوية بروستر فإن هذه الموجة تنفذ كلياً ولا يكون هناك أي انعكاس للموجة؛ أي معامل الانعكاس يكون معدوماً.

لدينا من المعادلات (III – 59) و (III – 60) :

$$R = (r_{//})^2 = \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)} = 0 \Rightarrow tg(\theta_i + \theta_t) \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_i$$

لدينا من قانون الانكسار :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right)$$

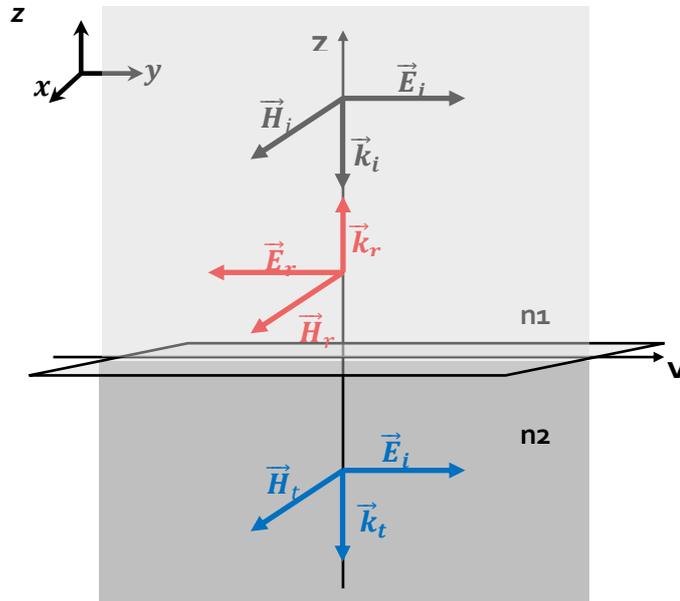
$$\Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \cos (\theta_i)$$

$$\boxed{tg \theta_{iB} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (III - 63)$$

θ_{iB} تدعى بزواوية بروستر.

III-3-4- إنعكاس وانكسار الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية على السطح الفاصل بين وسطين عازلين مغناطيسيين في حالة السقوط الناظمي:

لنعتبر أن الموجة الواردة \vec{E}_i, \vec{H}_i تنتشر وفق الاتجاه المتناقص للمحور Oz.
و الموجة المنعكسة \vec{E}_r, \vec{H}_r تنتشر وفق الاتجاه المتزايد للمحور Oz.
و الموجة النافذة \vec{E}_t, \vec{H}_t تنتشر وفق الاتجاه المتناقص للمحور Oz.



الوسطان العازلان خطيان و متجانسان و متماثلا المناحي، و السطح الفاصل منطبق على المستوي (yx). عبارة الموجات الثلاث تأخذ الأشكال التالية:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} \exp[i(\omega t + k_i \cdot z)] \vec{j}, & \vec{H}_i = \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0i} \exp[i(\omega t + k_i \cdot z)] \vec{i} \\ \vec{E}_r = -E_{0r} \exp[i(\omega t - k_i \cdot z)] \vec{j}, & \vec{H}_r = \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0r} \exp[i(\omega t - k_i \cdot z)] \vec{i} \\ \vec{E}_t = E_{0t} \exp[i(\omega t + k_t \cdot z)] \vec{j}, & \vec{H}_t = \frac{n_2}{\mu_2 c} E_{0t} \exp[i(\omega t + k_t \cdot z)] \vec{i} \end{cases} \quad (64 - III)$$

عند السطح الفاصل و بتطبيق شرط استمرارية المركبات المماسية للحقل الكهرومغناطيسي حيث لا وجود لشحنات ولا تيارات حرة:

$$\begin{cases} E_{0i} - E_{0r} = E_{0t} \\ H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \end{cases} \Rightarrow \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0i} + \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0r} = \frac{n_2}{\mu_2 c} E_{0t}$$

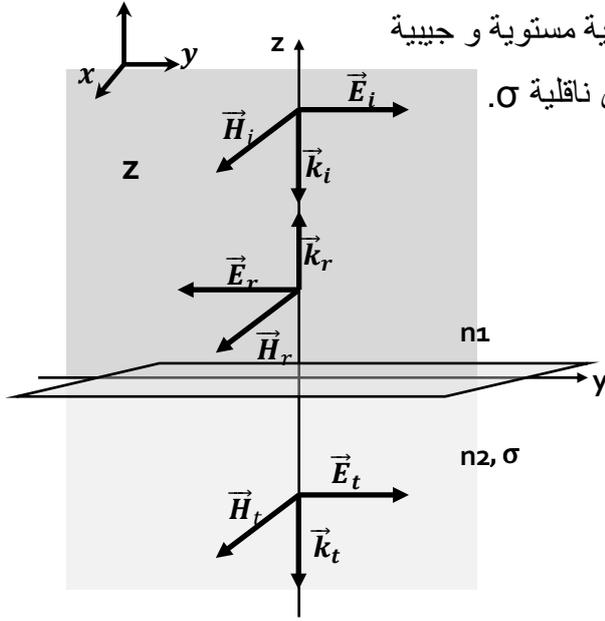
$$\Rightarrow \begin{cases} E_{0i} - E_{0r} = E_{0t} \\ \frac{n_1}{\mu_1} (E_{0i} + E_{0r}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{0t} \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلتين نجد العلاقة بين سعات الحقول الكهربائية للموجات الثلاث كالتالي:

$$\begin{cases} r = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = \frac{n_1 \mu_2 - n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2 + n_2 \mu_1} \\ t = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) = \frac{2n_1 \mu_2}{n_1 \mu_2 + n_2 \mu_1} \end{cases} \quad (65 - III)$$

و تدعى هاتان المعادلتان بمعادلات فرينل في حالة السقوط الناظمي.

III-3-5- إنعكاس الأمواج الكهرومغناطيسية المستوية على وسط ناقل:



سندرس في هذه الحالة سقوط موجة كهرومغناطيسية مستوية و جيبية على سطح فاصل بين وسط عازل و وسط ناقل ذي ناقلية σ .

نعتبر السقوط ناظميا، فكيف تكون العلاقة

بين سعات حقول الموجات الثلاث؟

وفقا للشكل المقابل عبارات الموجات الواردة و

المنعكسة تكون على الشكل:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} \exp[i(\omega t + k_i \cdot z)] \vec{j}, & \vec{H}_i = \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0i} \exp[i(\omega t + k_i \cdot z)] \vec{i} \\ \vec{E}_r = -E_{0r} \exp[i(\omega t - k_i \cdot z)] \vec{j}, & \vec{H}_r = \frac{n_1}{\mu_1 c} E_{0r} \exp[i(\omega t - k_i \cdot z)] \vec{i} \end{cases} \quad (66 - III)$$

بينما الموجة النافذة تكون من الشكل:

$$\vec{E}_t = E_{0t} \exp[i(\omega t + \tilde{k}_t \cdot z)] \vec{j}, \vec{H}_t = \frac{\tilde{k}_t}{\mu_2 \omega} E_{0t} \exp[i(\omega t + \tilde{k}_t \cdot z)] \vec{i} \quad (67 - III)$$

$$\tilde{k}_t = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_2 \omega}\right)} \quad \text{حيث } k_t \text{ هو عدد موجي مركب:}$$

و من شرط استمرارية المركبات المماسية لـ \vec{E}_i و \vec{H}_i :

$$\begin{cases} E_{0i} - E_{0r} = E_{0t} \dots \dots \dots (a) \\ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_{0i} + E_{0r}) = \frac{\tilde{k}_t}{\mu_2 \omega} E_{0t} \dots \dots \dots (b) \end{cases} \quad (68 - III)$$

حل جملة المعادلتين يعطي العلاقة بين سعتي الموجة المنعكسة و الموجة النافذة بدلالة سعة الموجة الواردة:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0r} = \frac{1 - \left(\frac{\tilde{k}_t}{w\mu_2}\right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \left(\frac{\tilde{k}_t}{w\mu_2}\right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{0i} \\ E_{0t} = \frac{2}{1 + \left(\frac{\tilde{k}_t}{w\mu_2}\right) \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} E_{0i} \end{array} \right. \quad (69 - III)$$

نلاحظ ان هناك فرقاً في الطور بين الموجة الواردة و المنعكسة و الموجة الواردة و النافذة نظرا إلى العدد k_t عدد مركب.

أيضا في حالة ناقل مثالي أي: $k_t = \infty \Rightarrow \sigma = \infty$ فإن:

بالتعويض في المعادلات (69 - III) نجد:

$$E_{0t} = 0 ; \quad E_{0i} = -E_{0r} \quad (69 - III)$$

أي أن الموجة الكهرومغناطيسية عندما تسقط على سطح ناقل مثالي فإنها تنعكس كليا.

تمريبات

تمرين 1:

أحسب معامل فريزل في الانعكاس عند ورود موجة مستقطبة ناظميا من الهواء على عازل بزواوية ورود تساوي زاوية بروستر. أوجد معامل الانعكاس عندما تساوي قرينة انعكاس العازل 1,5.

تمرين 2:

موجة كهرومغناطيسية جيبية و مستوية و مستقطبة خطيا وفق المحور (Oy) تنتشر في الفراغ وفق المحور (Ox) تسقط ناظميا على سطح عازل نصف نهائي غير مغناطيسي $\mu = \mu_0$

$$I = 1W/m^2 \text{ و } n > 1 \text{ وشدة الموجة تساوي}$$

1/ أرس مخططاً موضحا شعاع الشدة المغناطيسية للموجة الواردة.

2/ أحسب سعة الحقل الكهربائي و الشدة المغناطيسية للموجة الواردة.

3/ مثل كلا من $\vec{k}_r, \vec{E}_r, \vec{H}_r ; \vec{k}_t, \vec{E}_t, \vec{H}_t$ للموجة المنعكسة و النافذة في الرسم السابق.

4/ أكتب شروط الاستمرارية عند السطح الفاصل، ثم استخرج معامل الانعكاس عند $x=0$.

5/ أكتب عبارة الحقل الكهربائي في الفراغ ثم اكتب سعته العظمى بدلالة x .

6/ إستنتج السعة العظمى و السعة الدنيا للحقل الكهربائي الناتج في الفراغ.

تمرين حول موجة الموجة:

موجة كهرومغناطيسية و أحادية الطول الموجي ذات نبض w . تنتشر وفق المحور zO بين لوحين ناقلين مثاليين و موضوعين عند الإحداثيين $y=0$ و $y=a$. مركبات الحقل الكهربائي تكتب على الشكل التالي:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(wt - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

1/ أوجد عبارة الحقل المغناطيسي الموافق لهذه الموجة.

2/ أوجد العلاقة التي تربط بين k و النبض w .

3/ بين أن هذه الموجة لا يمكن أن تنتشر إلا إذا كانت w أكبر من قيمة معينة، يطلب تعيينها.

الفصل IV: إشعاع الأمواج الكهرومغناطيسية

دراسة إشعاع الأمواج الكهرومغناطيسية هو دراسة توليد الأمواج الكهرومغناطيسية عن طريق الشحنات المتحركة ثم انتشارها بحرية. في البداية سنختار دراسة ثنائي قطب هرتز، و ذلك نظرا لسهولة دراسته.

IV-1- الكمون الكهرومغناطيسي المتأخر:

بصفة عامة في الأنظمة الغير مستقرة و في وجود الشحنة و التيار الكهربائيين ومن خلال معادلات ماكسويل في الفراغ و شرط لورنتز يخضع الكمون الكهرومغناطيسي إلى المعادلات التفاضلية التالية:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{و} \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1 - IV)$$

حل هاتين المعادلتين في الأنظمة غير مستقرة يعطي الكمون المتأخر:

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_p \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\vartheta_p \quad (2 - IV)$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_p \frac{\vec{J}(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\vartheta_p \quad (3 - IV)$$

أي أنه في اللحظة t و في النقطة M و التي تقع على بعد $PM=r$ من التوزيع الشحني، الكمون الكهرومغناطيسي لا يوافق الشحنة و التيار الموجودة في نفس اللحظة t ، نظرا لأن الأمواج الكهرومغناطيسية تنتشر بالسرعة c وتحتاج إلى زمن قدره $\frac{r}{c}$ حتى يصل الاضطراب إلى النقطة M .

IV-2- إشعاع ثنائي القطب المهتز:

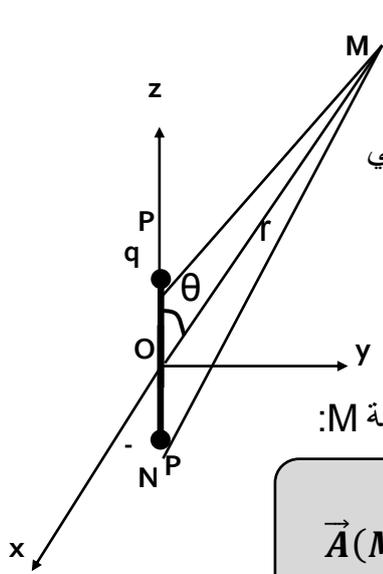
ثنائي القطب المهتز أو ثنائي قطب هرتز هو ثنائي قطب كهربائي مهتز، و يتميز بعزم يتغير جيبيًا مع الزمن، يكتب في التمثيل المركب على النحو:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \exp(i\omega t) \quad (4 - IV)$$

نعتبر كرتين مشحونتين بشحنتين متعاكستين. الشحنة q موجودة عند النقطة P و $-q$ موجودة عند

$$\text{النقطة } N \text{ و البعد بينهما هو } a \text{ حيث } \vec{NP} = a\vec{k}$$

نفرض أن الشحنة q تتغير مع الزمن مشكِّلة تيارًا كهربائيًا ذا شدة $I(t)$.



يسري هذا التيار بين الشحنتين على طول المحور Oz. نحدد النقطة M و التي تبعد مسافة r عن مركز PN (كما في الشكل المقابل).

نعتبر $a \ll r$ حيث يمكننا هذا من اعتبار الكرتين كثنائي قطب كهربائي

ذي عزم كهربائي $\vec{p} = q\vec{a}$. لنحسب الكمون الكهرومغناطيسي

(\vec{A}, V) الناتج عن هذا الثنائي في النقطة M.

IV-2-1- حساب الكمون الكهرومغناطيسي المشع:

الكمون الشعاعي المتأخر الناتج عن ثنائي القطب المهتز الناتج في النقطة M:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_p \frac{I(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dz_p \vec{k} \quad (5 - IV)$$

من الشكل المقابل: $\vec{OM} = \vec{PM} + \frac{a}{2}\vec{k} \Rightarrow \vec{PM} = \vec{OM} - \frac{a}{2}\vec{k}$

$$\Rightarrow |\vec{PM}| = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \cos\theta}$$

• باعتبار ثنائي القطب أي $a \ll r$ وبإجراء تقريب ثنائي القطب بإمكاننا وضع:

$$PM \approx r \Rightarrow \frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r} \quad (6 - IV)$$

• باعتبار أن سرعة اهتزاز الشحنة صغيرة جدا أمام سرعة الضوء c أي أن طول موجة الحقل

الكهرومغناطيسي λ أكبر بكثير من a:

$$v \ll c \Rightarrow \omega a \ll c \Rightarrow \frac{2\pi}{T} a \ll c \Rightarrow a \ll cT \Rightarrow a \ll \lambda \quad (7 - IV)$$

بما أن $a \ll \lambda$ يمكننا إجراء التقريب التالي: $\frac{PM}{c} \approx \frac{r}{c}$

و بالتالي الكمون الشعاعي يصبح:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} a \frac{I(t - \frac{r}{c})}{r} \vec{k} \quad (8 - IV)$$

يمكننا التعبير عن شدة التيار الكهربائي بدلالة عزم ثنائي القطب p: $I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dp(t)}{dt}$

إذن:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{dp(t')}{dt'} \vec{k} \quad (9 - IV)$$

$$\text{حيث: } t' = t - \frac{r}{c}$$

بتطبيق شرط لورنتز نحسب الكمون السلمي المتأخر $V(M,t)$ الموافق:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{z}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \cos\theta \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \Rightarrow V &= -c^2 \int \left[\cos\theta \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \right] dt \end{aligned} \quad (10 - IV)$$

وبما أن: $\frac{dp(t')}{dt'} = \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial r}$ وبإجراء التكامل نجد عبارة الكمون السلمي:

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[\frac{1}{rc} \frac{dp(t')}{dt'} - \frac{1}{r^2} p(t') \right] \quad (11 - IV)$$

في النظام المستقر يكون $\frac{dp(t')}{dt'} = 0$ وبالتالي فإن:

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta \quad \text{و} \quad \vec{A}(t) = 0 \quad (12 - IV)$$

IV-2-2- حساب الحقل الكهرومغناطيسي المشع:

إنطلاقاً من العلاقة بين الكمون الشعاعي و الحقل المغناطيسي: $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$

و باستعمال الإحداثيات الإسطوانية نجد: $B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\sin\theta \frac{\partial A_z}{\partial r}$ إذن:

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{dp(t')}{dt'} + \frac{1}{rc} \frac{d^2p}{dt'^2} \right) \vec{e}_\phi \quad (13 - IV)$$

أما الحقل الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب المهتز يحدد من خلال العلاقة:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \Rightarrow E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} \quad \text{و} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \quad E_\phi = 0 \end{aligned} \quad (14 - IV)$$

وبإجراء الإشتقاق نجد:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\cos\theta \left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \frac{dp(t')}{dt'} \right)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left(\frac{p(t')}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \frac{dp(t')}{dt'} + \frac{1}{rc^2} \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right)$$

$$E_\phi = 0$$
(15 – IV)

أما في المناطق البعيدة جدا عن ثنائي القطب؛ أي من أجل $r \gg \lambda$ لدينا :

$$\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2 \lambda} \ll \frac{1}{r \lambda^2} \Rightarrow \frac{1}{r^3} \ll \frac{w}{r^2 c} \ll \frac{w}{rc^2}$$
(16 – IV)

وبإجراء التقريب في عبارة الحقل الكهرومغناطيسي الناتج عن ثنائي القطب نتوصل لـ:

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left(\frac{1}{rc^2} \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right) \vec{e}_\theta$$
(17 – IV)

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left(\frac{1}{rc} \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right) \vec{e}_\phi$$
(18 – IV)

نلاحظ أن الحقل الكهرومغناطيسي في منطقة الإشعاع يتميز بـ :

- على عكس الحقل الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهروستاتيكي الذي يتناسب مع $\frac{1}{r^3}$ الحقل الكهرومغناطيسي في منطقة الإشعاع يتناقص مع $\frac{1}{r}$.

- الحقل الكهرومغناطيسي متناسب مع $\frac{d^2 p(t-\frac{r}{c})}{d(t-\frac{r}{c})^2}$ ، أي يتعلق بتسارع الجسيم المشع.

- $\vec{E}, \vec{B}, \vec{r}$ متعامدة مع بعضها وتشكل ثلاثية مباشرة بهذا الترتيب: $\vec{E}(M, t) = c\vec{B}(M, t) \wedge \vec{e}_r$

IV-2-3- حساب الإستطاعة الكهرومغناطيسية المشعة:

بالتعويض في العلاقة الرياضية لشعاع بونتينغ بعبارة الحقل الكهرومغناطيسي لثنائي قطب هرتز في منطقة الإشعاع نجد:

$$\vec{R} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left(\frac{d^2 p(t')}{dt'} \right)^2 \vec{e}_r$$
(19 – IV)

حيث: $t' = t - \frac{r}{c}$

نلاحظ من خلال العلاقة (17-IV) و(18-IV) أن الإشعاع يكون معدوماً على طول محور ثنائي القطب المهتز حيث $\theta=0$ ، وأعظمياً وفق كل الاتجاهات الموجودة في المستوي (Oxy) حيث $\theta = \frac{\pi}{2}$

و الإستطاعة المشعة عبر عنصر السطح ds لكرة نصف قطرها r تأخذ الشكل التالي:

$$dP = \vec{R} \cdot \vec{ds} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left(\frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right)^2 ds \quad (20 - IV)$$

أما الاستطاعة المتوسطة المشعة عبر وحدة السطح :

$$\left\langle \frac{dP}{ds} \right\rangle = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left\langle \left(\frac{d^2 p}{dt'^2} \right)^2 \right\rangle \quad (21 - IV)$$

ولإيجاد الاستطاعة المتوسطة الكلية المشعة عبر سطح كرة نصف قطرها r نكامل على كل السطح نجد:

$$\langle p \rangle = \iiint_{\text{كرة}} \left\langle \frac{dP}{ds} \right\rangle r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (22 - IV)$$

وبالتالي:

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi} \left\langle \left(\frac{d^2 p}{dt'^2} \right)^2 \right\rangle \quad (23 - IV)$$

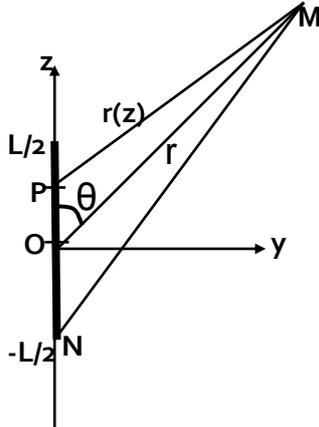
نلاحظ أن الإستطاعة المتوسطة المشعة عن ثنائي قطب هرتز لا تتعلق بنصف القطر r ، وهذا متوقع بحكم انحفاظ الطاقة الكهرومغناطيسية في الفراغ.

4-2-IV- إشعاع هوائي مستقيم:

يمكن اعتبار الهوائي هو مجموعة من ثنائيات اقطاب هرتز. ولإيجاد الحقل الكهرومغناطيسي الناتج نقوم بتجميع الحقول العنصرية الناتجة عن الأطوال dz المكونة للناقل.

5-2-IV- إشعاع هوائي- نصف موجة:

نعتبر هوائي نصف موجة اي سلك مهمل المقطع مركزه O وطوله $l = \lambda/2$ محمول على المحور



(Oz). يمر بالسلك تيار كهربائي من الشكل:

$$I(z, t) = I_0 \left(\frac{\pi z}{l} \right) \cos(\omega t) \quad (24 - IV)$$

الحقل الكهربائي العنصري المشع في النقطة M و الناتج عن الطول

العنصري dz كما قمنا بحسابه في الفقرة السابقة:

$$d\vec{E}(z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta(z) \left(\frac{1}{r(z)c^2} \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right) \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d^2 p(t')}{dt'^2} = \frac{dl}{dt} \mathbf{dz} \quad \text{وبما أن:}$$

$$\sqrt{z^2 + r^2 + 2rz\cos\theta} = \sqrt{r^2 \left(1 + \frac{z^2}{r^2} + 2\frac{z}{r} \cos\theta \right)}$$

و بإجراء التقريب نجد:

$$r(z) = PM = r(z) \approx r - z\cos\theta$$

إذن:

$$d\vec{E}(z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta(z) \left(\frac{1}{r(z)c^2} \frac{dl \left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c} \right)}{dt} \right) \vec{e}_\theta \quad (25 - IV)$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} w I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \frac{\sin\theta(z)}{r} \sin\left(w\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z\cos\theta}{c}\right)\right) dz \vec{e}_\theta$$

و الحقل الكلي المشع عن الهوائي الناتج: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-l/2}^{l/2} d\vec{E}(z, t)$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 c I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \sin\left(w\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta \quad (26 - IV)$$

ومن خلال شعاع بونتينغ نحسب الاستطاعة المتوسطة المشعة عن الهوائي نصف موجة :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{\mu_0 c}{2} \left(\frac{I_0}{2\pi} \right)^2 \iint \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta d\phi = 1.22 \frac{\mu_0 c}{4\pi} I_0^2 \quad (27 - IV)$$

ملحق

1/ المؤثرات في مختلف الإحداثيات

	الإحداثيات الكارتيزية	الإحداثيات الاسطوانية	الإحداثيات الكروية
	$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$	$\rho \geq 0,$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\infty \leq z \leq +\infty$	$r \geq 0,$ $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
	$\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$	$\vec{dl} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$	$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$
	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$
$\vec{\text{grad}} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$
$\text{div} \vec{A} =$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r)$ $+ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta}$ $+ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\vec{\text{rot}} \vec{A} =$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x$ $-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y$ $-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho$ $-\left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta$ $+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$	$\frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r$ $+ \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[aU(M) + bV(M) \right] = a \overrightarrow{\text{grad}}U(M) + b \overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[U(M)V(M) \right] = U(M) \overrightarrow{\text{grad}}V(M) + V(M) \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\diamond \overrightarrow{\text{grad}} \left[\vec{A}(M) \cdot \vec{B}(M) \right] = \left[\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{B}(M) + \left[\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) \\ + \vec{A}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) + \vec{B}(M) \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[a \vec{A}(M) + b \vec{B}(M) \right] = a \cdot \text{div} \vec{A}(M) + b \cdot \text{div} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \cdot \text{div} \vec{A}(M) + \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

$$\bullet \text{div} \left[\vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) - \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[a \vec{A}(M) + b \vec{B}(M) \right] = a \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + b \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[U(M) \cdot \vec{A}(M) \right] = U(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) + \overrightarrow{\text{grad}}U(M) \times \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \right] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[\text{div} \vec{A}(M) \right] - \Delta \vec{A}(M)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}} \left[\vec{A}(M) \times \vec{B}(M) \right] = \vec{A}(M) \cdot \text{div} \vec{B}(M) - \vec{B}(M) \cdot \text{div} \vec{A}(M) + \\ \left[\vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{A}(M) - \left[\vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \vec{B}(M)$$

المراجع

[1] Pérez, J. P., Carlos, R., & Fleckinger, R. (2002). *Électromagnétisme: Fondements et applications avec 300 exercices et problèmes résolus*/José-Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger. Dunod.

[2] ريتز – ميلفورد ترجمة د. يحيى علي، أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية. جامعة الموصل.

[3] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : " *Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, Tome 2*". Addison Wesley, seconde édition, 1994.

[4] Griffiths, D. J., & Reed College. (1999). *Introduction to electrodynamics* (Vol. 3). Upper Saddle River, NJ: prentice Hall.