Université Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Faculté des sciences exactes **Année universitaire 2019/2020**
Département des mathématiques

Exercices sur les Semigroupes 1$^{\text{ère}}$ Master

Exercice 1. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un operateur linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes,
1) T est uniformément continu,
2) T est continu,
3) T est continu en 0,
4) $\exists C > 0, \|Tx\|_Y \leq C, \ \forall x \in X, \|x\| \leq 1,$
5) $\exists C > 0, \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X \ , \ \forall x \in X.$
Solution. Montrons 3) $\Longrightarrow$ 4)
Comme T est continu en 0 on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1$, et soit $\omega \in X$ tel que $\|\omega\| \leq 1$ alors,

$$\left\| \frac{\delta\omega}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} \|\omega\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$$

donc $\left\|T\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)\right\| < 1$ ce qui implique

$$\frac{\delta}{2} \|Tx\|_Y < 1$$

et on a

$$\|Tx\|_Y < \frac{2}{\delta}.$$

Montrons 4) $\Longrightarrow$ 5).
Il est clair que $\|T(0)\| \leq C\|0\|$.
Supposons $x \neq 0$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in X$ et $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, d'après 3) nous avons

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq C$$

par suite

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Montrons 5) $\Longrightarrow$ 1).

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x-y\|, \forall x, y \in X.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, ilexiste $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ telque pour tous $x, y \in X, \|x-y\| < \delta$ on a $\|Tx - Ty\| < \varepsilon$ et T est uniformement continu.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et soit $\{T(t), t \geq 0\}$ une famille d'operateurs à un paramètre donnée par

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + ...$$

Montrer que $\{T(t), t \geq 0\}$ est un semigroupe fortement continu.
Solution. $T(0) = I$.

On a

$$e^a e^b = \left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + ...\right)\left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3!} + ...\right)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{a^k b^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\,(a+b)^n\,.$$

$$\|T\,(t)\,x - x\| = \left\|\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k!}A^k x\right\| \leq$$

Exercice 3. Sur $X = C_0\,([1,+\infty[) = \left\{f \in C\,([0,+\infty[) : \lim_{x\longrightarrow+\infty} f\,(x) = 0\right\}$ muni de la norme

$$\|f\|_X = \sup_{x\in[0,+\infty[}|f\,(x)|\,,$$

on definit la famille $\{T\,(t)\,, t\geq 0\}$ d'operateur à un paramètre

$$T\,(t)\,f\,(x) = f\,(x+t)\,,\ x\geq 0, t\geq 0.$$

montrer que $\{T\,(t)\,, t\geq 0\}$ est un semigroupe fortement continu.

Solution. $\|T\,(t)\,f - f\|_\infty = \sup_{x\geq 0}|f\,(x)|$

Exercice 3. Sur $X = C_0\,([1,+\infty[) = \left\{f \in C\,([1,+\infty[) : \lim_{x\longrightarrow+\infty} f\,(x) = 0\right\}$ muni de la norme

$$\|f\|_X = \sup_{x\in[1,+\infty[}|f\,(x)|\,,$$

on definit la famille $\{T\,(t)\,, t\geq 0\}$ d'operateur à un paramètre

$$T\,(t)\,f\,(x) = f\left(xe^t\right),\ x\geq 1, t\geq 0.$$

montrer que $\{T\,(t)\,, t\geq 0\}$ est un semigroupe fortement continu.

Solution.2.

$$\|T\,(t)\,f - f\|_X = \sup_{x\geq 0}\left|f\left(xe^t\right) - f\,(x)\right|$$

Comme $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f\,(x) = 0$, on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon > 1 : |f\,(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \geq x_\varepsilon.$$

Donc, pour $x \geq x_\varepsilon$ on a

$$\sup_{x\geq x_\varepsilon}\left|f\left(xe^t\right) - f\,(x)\right| < \varepsilon.$$

Pour $x \in [1, x_\varepsilon]$ la fonction $|f\,(xe^t) - f\,(x)|$ est continue sur le compact $[1, x_\varepsilon]$,il existe alors $x_0\,(t) \in [1, x_\varepsilon]$ tel que

$$\sup_{1\leq x\leq x_\varepsilon}\left|f\left(xe^t\right) - f\,(x)\right| = \left|f\left(x_0\,(t)\,e^t\right) - f\,(x\,(t))\right|$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f\,(y) - f\,(x)| < \varepsilon$$

d'autre part

$$\forall\delta > 0, \exists\alpha > 0 : t < \alpha \Longrightarrow \left|e^t - 1\right| < \frac{\delta}{|x|}$$

et parsuite

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha\,(x) > 0; t < \alpha \Longrightarrow |f\,(y) - f\,(x)| < \varepsilon$$

Exercice 4. Soit $X = C([0,1])$ et soit

$$T(t) f(x) = \left\{ \begin{array}{c} e^{t \log x} [f(x) - f(0) \log x], \ x \in]0,1] \\ 0, \ x = 0 \end{array} \right. , t > 0$$

$$T(0) = I.$$

$$T(t+s) f(x) = e^{t \log x} e^{s \log x} [f(x) - f(0) \log x]$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \left(\sup_{x \in [0,1]} |T(t) f(x) - f(x)| \right)$$

Exercice 5. Soit $X = C_0(\mathbb{R}_+) = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0 \right\}$ muni de la norme $\|f\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$.

Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ une famille d'opérateur sur X définie par

$$T(t) f(x) = e^{-t^2 - 2tx} f(x+t).$$

Montrer que c'est un semigroupe fortement continu.

Solution.

$$\begin{aligned} T(t+s) f(x) &= e^{-t^2 - s^2 - 2st - 2tx - 2sx} f(x+s+t) \\ &= e^{-t^2 - 2t(x+s)} \left[e^{-s^2 - 2sx} f(x+s) \right] \\ &= T(t) T(s) f(x) \end{aligned}$$

$$\|T(t) f - f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| e^{-t^2 - 2tx} f(x+t) - f(x) \right|$$

Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}_+, |f(x)| < \varepsilon, \forall x > x_\varepsilon.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+; f(x_0) \neq 0$, alors, il existe $x_1 > x_0$ tel que

$$\forall x > x_1, |f(x)| < \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Donc,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = \sup_{x \in [0, x_1]} |f(x)|$$

et comme $[0, x_1]$ est compact,

$$\exists \overline{x} \in [0, x_1] : \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = |f(\overline{x})|.$$

sup de

Exercice Soit A un opérateur de domaine $D(A)$. Montrer que A est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t) = e^{tA}$.

Solution

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| \frac{e^{tA} x - x}{t} - Ax \right\| = \lim_{t \longrightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty}$$

$$e^{(A - \lambda I)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k t^k}{k!}$$

Exercice 1. 8 points
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit sur $X = L^2[0,1]$ la famille d'opérateurs $T(t), t \geq 0$ par

$$T(t)f(x) = \alpha^k f(x+t-k), \text{ si } x+t \in [k,k+1], k \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que $\{T(t), t \geq 0\}$ est un semigroupe fortement continu.
2) Montrer que le générateur infinitésimal de $\{T(t), t \geq 0\}$ est l'operateur A defini sur

$$D(A) = H^1[0,1]$$

par $Af = f_x$ où f_x est la dérivée faible (ou au sens des distributions) de f.
Indication : Pour montrer la continuité de $\{T(t), t \geq 0\}$ utiliser la densité de $C_0[0,1]$ dans $L^2[0,1]$.

Exercice 2: 12 points
Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u_t, \text{ sur } (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \text{ pour } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{P}$$

1) Ecrire le problème (P) sous la forme

$$U_t(x,t) = \mathcal{A}U(t,x)$$
$$U(x,0) = (u_0(x), u_1(x))^T$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur défini sur $\mathcal{H} = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, de domaine $D(\mathcal{A})$ à déterminer.
$\mathcal{H}$ est muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi u_x u_x^* dx + \int_0^\pi v v^* dx.$$

2) Utiliser le théorème de Lumer-Phillips et montrer que pour

$$(u_0(x), u_1(x)) \in D(\mathcal{A})$$

le problème (P) admet une solution unique

$$u \in C\left([0,+\infty[; H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)\right) \cap C^1\left([0,+\infty[; H_0^1(0,\pi)\right) \cap C^2\left([0,+\infty[; L^2(0,\pi)\right).$$

Indication: On admet que l'équation

$$u_{xx}(x) - \alpha^2 u(x) = h(x)$$

admet une solution de la forme

$$u(x) = k_1 e^{\alpha x} + k_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^\pi k(x,y)h(y)\,dy$$

avec

$$k(x,y) = e^{\alpha|x-y|}, 0 \leq x, y \leq \pi.$$

Exercice 1. 6 points

Soit $E = C_0(\mathbb{R}_+)$ muni de la norme de sup, et soient $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $\{T(t), t \geq 0\}$ un semigroupe fortement continu sur E, On suppose que $T(t)$ et q satisfont la propriété suivante

$$T(t)\left(e^{tq(x)}f(x)\right) = e^{tq(x)}T(t)f(x), \ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall f \in E.$$

On définit une famille d'opérateurs à un paramètre $\{S(t), t \geq 0\}$ par

$$S(t)f(x) = e^{tq(x)}T(t)f(x).$$

1) Montrer que $S(t)$ est un semigroupe fortement continu.

2) Déterminer, l'expression de $\mathcal{B}$ le générateur infinitésimal de $S(t)$, en fonction de $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal de $T(t)$.

Problème. (14 points) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ et considérons le problème

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \Delta u_t - u, \text{ pour } (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ pour } (t,x) \in (0,+\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{A}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ est la dérivée normale extérieure de u, et η le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dérigé vers l'extérieure de Ω.

1) Calculer l'énergie associée au problème (A) et déduire l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (espace d'énergie) de cette équation.

2) En posant $u_t = v$ et $U = (u,v)^T$, écrire le problème (A) sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0,x) = (u_0(x), u_1(x))^T \end{cases} \tag{A*}$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur differentiel de domaine $D(\mathcal{A}) = \{u, v \in H^1(\Omega), u + v \in H^2(\Omega)\}$.

3) Montrer que $\mathcal{A}$ est dissipative.

4) Pour montrer que $\mathcal{A}$ est maximal, on considére l'équation $(I - \mathcal{A})U = F$, avec $F = (f,g)^T \in \mathcal{H}$ et $U = (u,v)^T$. Montrer que ceci peut s'écrire

$$\begin{cases} u - v = f \\ w(x) - \Delta w(x) = g(x), \text{ sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \text{ pour } (t,x) \in (0,+\infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{B}$$

où w est une fonction dépend de u et v.

5) Montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram que le problème (B) admet une solution unique $w \in H^2(\Omega)$, en déduit que le problème (A*) admet une solution unique $U \in D(\mathcal{A})$.

6) Préciser la régularité de la solution u dans le cas où la donné unitiale vérifie $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A})$.

Exercice 1 Soit $E = C_0(\mathbb{R}_+)$ muni de la norme de sup, et soient $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $\{T(t), t \geq 0\}$ un semigroupe fortement continu sur E, On suppose que $T(t)$ et q satisfont la propriété suivante

$$T(t)\left(e^{tq(x)} f(x)\right) = e^{tq(x)} T(t) f(x), \ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall f \in E.$$

On définit une famille d'opérateurs à un paramètre $\{S(t), t \geq 0\}$ par

$$S(t) f(x) = e^{tq(x)} T(t) f(x).$$

1) Montrer que $S(t)$ est un semigroupe fortement continu.

$$S(0) f(x) = e^{0q(x)} T(0) f(x) = T(0) f(x) = f(x).$$

$$\begin{aligned} S(s+t) f(x) &= e^{(s+t)q(x)} T(s+t) f(x) = e^{sq(x)} e^{tq(x)} T(s) T(t) f(x) \\ &= e^{sq(x)} T(s) e^{tq(x)} T(t) f(x) = S(s) S(t) f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|S(t) f - f\| &= \sup \|S(t) f(x) - f(x)\| \leq \sup \left\| e^{tq(x)} T(t) f(x) - e^{tq(x)} f(x) \right\| + \sup \left\| e^{tq(x)} f(x) - f(x) \right\| \\ &\leq \sup \left\| e^{tq(x)} \right\| \sup \|T(t) f(x) - f(x)\| + \sup \left\| e^{tq(x)} - 1 \right\| \|f(x)\| \end{aligned}$$

et comme q est bornée

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \sup \left\| e^{tq(x)} \right\| = 1$$

d'autre part

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \sup \|T(t) f(x) - f(x)\| = 0$$

et

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \sup \left\| e^{tq(x)} - 1 \right\| = \lim_{t \longrightarrow 0} \left\| e^{t \sup q(x)} - 1 \right\| = 0,$$

donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \|S(t) f - f\| = 0$$

ce qui termine la démonstration.

2) Déterminer, l'expression de $\mathcal{B}$ le générateur infinitésimal de $S(t)$, en fonction de $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal de $T(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t) f(x) - f(x)}{t} &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{tq(x)} T(t) f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{tq(x)} T(t) f(x) - e^{tq(x)} f(x) + e^{tq(x)} f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} e^{tq(x)} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{[T(t) f(x) - f(x)]}{t} + f(x) \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{tq(x)} - 1}{t} = \mathcal{A} f(x) + q(x) f(x). \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par u_t et en integrant sur Ω on trouve

$$\int_\Omega u_{tt} u_t dx = \int_\Omega (\Delta u) u_t dx + \int_\Omega \Delta u_t u_t dx - \int_\Omega u u_t dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u_t^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega u_t^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \right) = -\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx$$

donc

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} u.u^* dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^* dx + \int_{\Omega} vv^* dx$$

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= \Delta u + \Delta v - u \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - u + \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\Omega} v.udx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla udx + \int_{\Omega} (\Delta u - u + \Delta v)\, vdx \\ &= \int_{\Omega} vudx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla udx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla vdx - \int_{\Omega} vudx - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = -\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u - v = f \\ (v + u) - \Delta (u + v) = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - v = f \\ (v + u) - \Delta (u + v) = g \end{cases}$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u, v \in H^1(\Omega), u + v \in H^2 \right\}$$