1. Eléments de calcul indispensables

Nous rappelons ici sans en donner la démonstration les théorèmes mathématiques qui vont être utilisés dans ce chapitre.

Soient $n(x,t)$ est l'unité pointant vers l'extérieur vecteur normal, x est un point dans un région (D) et la variable d'intégration, dV et dS sont des éléments de volume et de surface à x et $v(x,t)$ est la vitesse de l'élément de surface. La fonction a peut être un tenseur, un vecteur ou une valeur scalaire.

Formules de Green - Ostrogradsky:

La formule de Green - Ostrogradsky ou théorème de la divergence permet de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface, c'est une formule d'intégration par parties.

Pour a scalaire: $\int_D \overrightarrow{grad}(a)\,dV = \int_{\partial D} a\,\vec{n}\,dS$

Pour $\vec{a}$ vecteur: $\int_D div(\vec{a})\,dV = \int_{\partial D} \vec{a}.\vec{n}\,dS$

Pour $\overline{\overline{a}}$ tenseur: $\int_D div(\overline{\overline{a}})\,dV = \int_{\partial D} \overline{\overline{a}}\,\vec{n}\,dS$

Théorème de transport de Reynolds

Ce théorème peut être exprimée comme suit: $\frac{d}{dt}\left(\int_D a\,dV\right) = \int_D \frac{da}{dt}\,dV + \int_{\partial D}(\vec{v}.\vec{n})\,a\,dS$

2. Conservation de la masse.

Le principe de conservation de la masse postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. En conséquence la variation de la masse au cour du temps est nulle

1. Forme intégrale:

Pour tout domaine (D) d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement(donc constitué toujours de mêmes particules), sa variation de masse au cours de temps est nulle.

$\frac{dm}{dt} = 0$ Comme $m = \int_D \rho\,dV$ alors $\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dV = 0$

Par ailleurs et d'après le théorème de transport de Reynolds, nous avons

$\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dV = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \int_{\partial D} \rho\,\vec{v}.\vec{n}\,dS$ alors: $\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \int_{\partial D} \rho\,\vec{v}.\vec{n}\,dS = 0$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \int_D div(\rho\,\vec{v}).dV = 0$$

1. Forme locale:

En utilisant le théorème de l'intégrale nulle, on obtient la forme locale de la loi de conservation de la masse (ou équation de la continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\,\vec{v}) = 0$$

de plus nous avons les relations:

$$div(\rho \vec{v}) = \rho \, div(\vec{v}) + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho \quad et \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\rho$$

on obtient alors une forme de l'équation de continuité

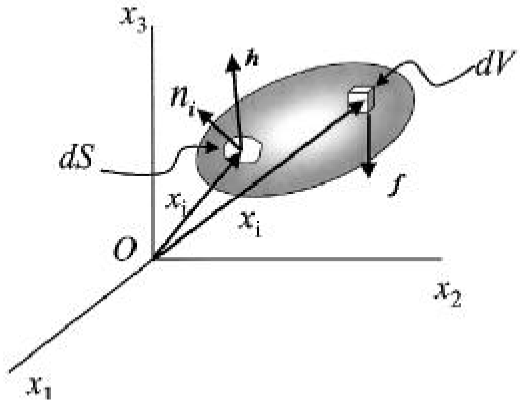
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div(\vec{v}) = 0$$

Remarque:

Pour une fluide est incompressible (ρ = contante),l'équation de continuité devient

$$\nabla.\vec{v} = 0$$

3.2. Conservation de la quantité de mouvement:



1. Forme intégrale:

Soit un milieu continu ayant un volume actuel V et une surface frontière S soumis à des tractions surfaciques de densité h et des forces volumiques de densité De plus, on considère que le corps en mouvement sous le champ de vitesse $v = v_i(x,t)$.

La quantité de mouvement $P(t)$, définie par le vecteur:

$$P(t) = \int_V \rho \, v \, dV$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement, connue aussi sous le nom de principe fondamental de la dynamique qui énoncé que toute variation (temporelle) de quantité de mouvement résulte de l'application de forces exerces.

Donc, on peut écrire une relation générale de la forme:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, v \, dV = \int_S h \, dV + \int_V f dV$$

et comme $\sigma n = h$, en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_V (\rho \dot{v} dV - div(\sigma) - f) dV = 0$$

où $\dot{v}$ est le champ d'accélération du corps.

1. Forme locale:

En utilisant le théorème de l'intégrale nulle, et on note $\dot{v} = a$, on obtient la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement (ou équation de mouvement)

$$div(\sigma) + f = \rho \, a$$

Le cas important de l'équilibre statique, dans lequel les composantes d'accélération disparaissent, est donné à la fois à partir de l'équation précédente comme

$$div(\sigma) + f = 0$$

C'est l'équations d'équilibre, largement utilisées en mécanique des solides.

1. Forme intégrale:

Pour tout domaine (D) d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement

Notion de déformation:

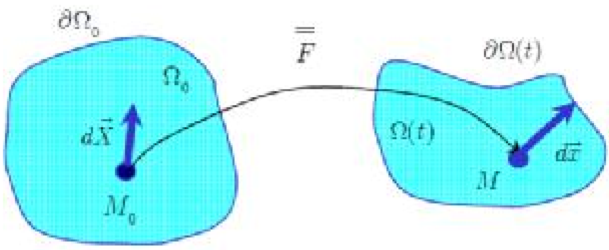
On appelle déformation, un changement de distance entre deux points matériels d'un milieu continu, elle s'accompagne généralement d'un déplacement ainsi que d'un changement de forme.

Gradient de déformation:

De ce précède on a: $x_i = \Phi_i(X_J, t), \quad X_I = \psi_I(x_j, t)$

et nous avons encore les relations suivantes

$x_i = x_i(X_J, t), \quad X_I = X_I(x_j, t)$



Sous forme différentielle nous obtenons:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} dX_J \Rightarrow dx(t) = \nabla\Phi \, dX$$

On peut donc écrire : $dx = F\,dX$ ce qui implique : $dX = F^{-1}dx$

En notation indicielle $F_{iJ} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial X_J} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_J}$ ou

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Le tenseur F qui apparaît est appelé "tenseur gradient" ou encore "application linéaire tangente".

Relation entre le vecteur déplacement et le gradient de déformation:

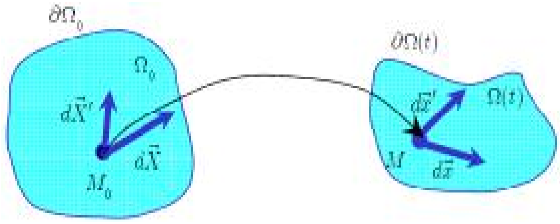
Les composantes de tenseur F peuvent être calculées à partir du champ de déplacement en différenciant la relation suivante: $u(X_J, t) = \overrightarrow{OM}_t - \overrightarrow{OM}_0 = x - X$

on a donc: $F_{iJ} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_J} = \delta_{iJ} + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_J} \Rightarrow \boxed{F = I + \nabla u}$ et $\boxed{dx - dX = F dX - dX = \nabla u \, dX}$

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \end{vmatrix}$$

Tenseur des déformations

Considérons trois particules voisines $\vec{X}$, $\vec{X} + d\vec{X}$ et $\vec{X} + d\vec{X}'$. Après déformations, elles occupent dans $\Omega(t)$ les positions respectives $\vec{x}$, $\vec{x} + d\vec{x}$ et $\vec{x} + d\vec{x}'$



Nous avons les relations :

$$d\vec{x} = F\, d\vec{X} \quad \text{et} \quad d\vec{x}' = F\, d\vec{X}'$$

Ce qui nous donne

$$d\vec{x}^T . d\vec{x}' = (F\, d\vec{X})^T (F\, d\vec{X}') = d\vec{X}^T F^T F\, d\vec{X}' = d\vec{X}^T C\, d\vec{X}'$$

Nous avons:

$$\boxed{d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{X}^T C\, d\vec{X}' \quad \text{avec} \quad C = F^T F}$$

Dans cette relation, le tenseur C est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit.

Nous avons aussi les relations : : $d\vec{X} = F^{-1} d\vec{x}$ et $d\vec{X}' = F^{-1} d\vec{x}'$

Ce qui nous donne

$$d\vec{x}^T . d\vec{x}' = (F^{-1} d\vec{X})^T (F^{-1} d\vec{X}') = d\vec{X}^T (F^{-1})^T F^{-1} d\vec{X}' = d\vec{X}^T (F\, F^T)^{-1} d\vec{X}' = d\vec{X}^T c^{-1} d\vec{X}'$$

Nous avons:

$$\boxed{d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{X}^T c^{-1} d\vec{X}' \quad \text{avec} \quad c = F F^T}$$

Dans cette relation, le tenseur c est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche.

Remarque: Tout comme F, c et C ne sont pas des mesures de déformations car pour un mouvement de corps rigide, on a $C = c = I$.

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange E est défini par :

$$\frac{1}{2}(d\vec{x}^T . d\vec{x}' - d\vec{X}^T . d\vec{X}') = \frac{1}{2}(C - I)\, d\vec{X}^T . d\vec{X}' = d\vec{X}^T E\, d\vec{X}'$$

où I est le tenseur identité. Le tenseur E est un tenseur symétrique matériel du 2$^{\text{ème}}$ ordre. Il se calcule en terme de F par la relation suivante :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T F - I) \qquad (4.1)$$

On définit également le tenseur de déformation d'Euler-Almansi e :

$$\frac{1}{2}(d\vec{X}^T . d\vec{X}' - d\vec{x}^T . d\vec{x}') = \frac{1}{2}\left(I - c^{-1}\right) d\vec{x}^T . d\vec{x}' = d\vec{x}^T e\, d\vec{x}'$$

Le tenseur e est un tenseur spatial symétrique du deuxième ordre qui s'exprime en fonction de F par:

$$e = \frac{1}{2}(I - c^{-1}) = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) \qquad (4.2)$$

Résultat:

D'après les relations (4.1) et (4.2), on peut démontrer que

$$e = F^{-T} E F^{-1}; \quad E = F^{T} e F \qquad (4.3)$$

Relation entre le tenseur de déformation et le vecteur déplacement:

Exprimons le tenseur de déformation de Lagrange E_{ij} et celui d'Euler-Almansi e_{ij} en fonction du vecteur déplacement $\vec{u}$.

Sachant que :

$$2.E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Et

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad u_i = u_i(X_j, t)$$

Alors

$$2E_{ij} = \left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que

$$2.E_{ij} = \delta_{mi}\delta_{mj} + \delta_{mi}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} + \delta_{mj}.\frac{\partial u_m}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Ce qui conduit à

$$2.E_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

Ce qui implique que

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i}.\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right) \qquad (4.4)$$

Le même raisonnement conduit une relation entre le tenseur de déformation d'Euler-Almansi e_{ij} et le vecteur déplacement $\vec{u} = \vec{u}(x_i, t)$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}.\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \qquad (4.5)$$

Petits déplacements et petites déformations : élasticité linéaire:

On admettra les hypothèses suivantes :

– Les déplacements sont petits par rapport aux dimensions du solide.

– Les dérivées des déplacements par rapport à X_i sont petites devant l'unité: $\left|\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| << 1$

Si G un grandeur physique de X_i, on en déduit : $\dfrac{\partial G}{\partial X_i} = \dfrac{\partial G}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} + \dfrac{\partial G}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} + \dfrac{\partial G}{\partial x_3}\dfrac{\partial x_3}{\partial X_1}$

Comme: $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$, soit $x_i = X_i + u_i$

Alors $\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}, \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}$

D'où $\dfrac{\partial G}{\partial X_i} = \dfrac{\partial G}{\partial x_1}\left(1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \dfrac{\partial G}{\partial x_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} + \dfrac{\partial G}{\partial x_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} \Rightarrow \dfrac{\partial G}{\partial X_i} \approx \dfrac{\partial G}{\partial x_1}$

De même : $\dfrac{\partial G}{\partial X_2} \approx \dfrac{\partial G}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial G}{\partial X_3} \approx \dfrac{\partial G}{\partial x_3}$

Tenseur des déformations linéarisé

Le tenseur des déformations de Lagrange et d'Euler-Almansi définit par (4.3) et (4.4) se réduit à : $E_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = e_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij}$

et on écrit

$$[\varepsilon] = (\varepsilon_{ij}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

Le tenseur $[\varepsilon]$ est appelé tenseur des déformations linéarisé.

Taux de déformation

Jusqu'ici nous avons introduit deux mesures de déformations dans les configurations initiale et actuelle. Il nous reste à introduire la vitesse de ces déformations appelée taux de déformation.

Le tenseur taux de déformation (matériel) est la dérivée particulaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange, soit $\dot{E}$. Ce tenseur donne, pour une particule donnée, le taux de variation de sa déformation au cours du temps. C'est clairement une quantité lagrangienne.

De même, nous introduirons le tenseur taux de déformation spatial noté D. Celui-ci est relié à $\dot{E}$ par la même relation (4.3) qui relie e à E :

$$D = F^{-T}\dot{E}F^{-1}; \quad \dot{E} = F^{T}DF$$

On peut dégager l'expression du tenseur taux de déformation spatial en terme des vitesses

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

Série des exercices 02

Exercice1:

Un solide déformable est soumis à des états de déformation dont la description lagrangienne est

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + t^2 X_2 \\ x_2 = X_2 + t^2 X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) représentant les composant du vecteur position avant et après déformation dans un repère orthonormé. Déterminer

1. l'équation de la trajectoire de la particule initialement à $X = (1,2,1)$
2. les composantes de vitesse et d'accélération de la même particule lorsque $t = 2s$

Exercice2:

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donné par $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$.

Déterminer la position finale de la particule telle que la position initiale à $(1, 0, 2)$.

Exercice3:

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est: $v_1 = \frac{x_1}{t}, \quad v_2 = \frac{x_1}{t}, \quad v_3 = 0$

Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en t = 0.

Exercice4:

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_i)$, on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{cases} v_1 = a\,t \\ v_2 = b\,x_1 \\ v_3 = c \end{cases}$$

a, b et c étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

1. Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$
2. Calculer sous forme paramétrique les lignes de courant de l'écoulement à l'instant arbitraire t_0
3. Calculer le champ de vitesse en représentation lagrangienne, en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.
4. Calculer l'accélération des points matériels en représentation eulérienne.
5. Calculer l'accélération des points matériels en représentation lagrangienne. Comparer les solutions obtenues en partant des résultats trouvés en 3 et 4.

Exercice5:

On considère un mouvement défini dans la base $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne (ω est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1\cos(\omega t) - X_2\sin(\omega t) \\ x_2 = X_1\sin(\omega t) + X_2\cos(\omega t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

1. Calculer le tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, le tenseur des dilatations $\overline{\overline{C}}$, et le tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point X et à l'instant t.
2. A quelle classe particulière ce mouvement appartient-il ?
3. Pour un instant t donné, calculer la dilatation en un point X et dans une direction $\overrightarrow{dX}$
4. Pour un instant t donné, calculer le glissement en un point X et pour deux directions orthogonales $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dX'}$.
5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène ρ_0 à l'instant $t_0=0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant t.
6. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées lagrangiennes.
7. Exprimer les coordonnées initiales à partir des coordonnées actuelles. Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(X,t)$ et le champ d'accélération $\vec{a}(X,t)$ en coordonnées eulériennes.
8. Calculer les tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(x,t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(x,t)$.

Exercice6:

On considère l'état de déformation ci-après :

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}_{(\vec{E}_i)}$$

1. Calculer le vecteur déformation pure dans la direction $\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}_1+\sqrt{3}\,\vec{E}_3\right)$. Conclusion?
2. Calculer les déformations principales et les directions principales de déformations.
3. Représenter sur le tricercle de Mohr des déformations les vecteurs déformation pure en M dans les directions $\vec{E}_1,\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$.
4. Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?

Exercice7:

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ par:

$u_1 = x_2x_3,\quad u_2 = x_1x_3,\quad u_3 = x_1x_2$

1. Déterminer le tenseur de déformations au point $M(x_1,x_2,x_3)$.
2. On considère les points $D_0(1,-1,0)$ et $C_0(1,1,0)$, déterminer la dilatation en D_0 dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{D_0C_0}$
3. Déterminer les déformations et les directions principales des déformations au point D_0.
4. On suppose que le milieu est continu et élastique, déterminer dans le repère principale le tenseur des contraintes en D_0.