Formes différentielles

Fiche TD de Y. Letoufa, Univérsité d'El Oued.

Série : 4

Exercice 1

1. Trouver une application φ:R→R de classe C^1 et vérifiant $\varphi(0)=-1$ telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur IR^2 :

$$\omega(x,y)=\frac{2xy}{(1+x^2)2}dx+\varphi(x)dy.$$

2. Donner alors une primitive de ω.

Corrigé

1. Pour que la forme différentielle soit exacte, il faut qu'elle soit fermée. On a donc :
$\varphi'(x)=2x(1+x^2)^2$.
On en déduit, avec la condition initiale, que
$\varphi(x)=-11+x^2$.
Avec cette condition, la forme différentielle est fermée, et comme elle est définie sur IR^{2}qui est étoilé, elle est exacte.
2. Il suffit de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy}{(1+x^2)2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(1+x^2)}.$$

On commence par exemple par intégrer la seconde équation

$$f(x,y)=-\frac{y}{(1+x^2)}+H(x).$$

Si on reporte cette forme dans la première équation,
on trouve $H'(x)=0$, et donc

$$f(x,y)=\frac{y}{(1+x^2)}$$

est une primitive de ω sur IR^2 .

Exercice 2

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$x = r\cos\phi\cos\theta$

$y = r\cos\phi\sin\theta$

$z = r\sin\phi$

1. Calculer dx, dy, dz.
2. Vérifier que $xdx + ydy + zdz = rdr$. En déduire $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Corrigé

1. On vérifie que :

   (a) $dx = \cos\phi\cos\theta dr - r\sin\phi\cos\theta d\phi - r\sin\theta\cos\phi d\theta$

   (b) $dy = \cos\phi\sin\theta dr - r\sin\phi\sin\theta d\phi + r\cos\theta\cos\phi d\theta$

   (c) $dz = \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi$.

   Par suite, on a :

   (a) $xdx = r\cos^2\phi\cos^2\theta dr - r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta d\phi - r^2 \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi d\theta$

   (b) $ydy = r\cos^2\phi\sin2\theta dr - r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta d\phi + r^2 \cos\theta\sin\theta\cos^2\phi d\theta$

   (c) $zdz = r\sin^2\phi dr + r^2\cos\phi\sin\phi d\phi$.

   2. En additionnant, on obtient $xdx + ydy + zdz = rdr$. On en déduit que :

   $xdx + ydy + zdz = r(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz)$.

   Ainsi

   $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.

Exercice 3

On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$,

pour t variant de 0 à 2π. Calculer :

$I = \int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$.

Corrigé

On applique simplement la définition :

$I = \int_{[0,2\pi]} (y(t) - z(t))x'(t) + (z(t) - x(t))y'(t) + (x(t) - y(t))z'(t)dt$

$= \int_{[0,2\pi]} (-R^2 + hRt(\cos t + \sin t) + hR(\cos t - \sin t))dt$

$= -2\pi R(h+R)$.