حل ت1 السلسلة 3.

نضع $f_1(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ ، $f_2(x,y,z)=xy-1$ و $f=(f_1,f_2)$.

يكون $M_1=f^{-1}(0)$ و f من الصنف C^1. هل رتبة $Jac_f(x,y,z)$ تساوي 2 من أجل كل $(x,y,z) \in M_1$.

$$Jac_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

رتبة $Jac_f(x,y,z)$ لا تساوي 2 يكافئ

$$\begin{cases} 3x^3 - 3y^3 = 0 \\ -3yz^2 = 0 \\ -3xz^2 = 0 \end{cases}$$

ويكافئ (x,y,z) تنتمي إلى $\{(x,x,0),(0,0,z), x,z \in IR\}$.

لكن النقطتين $(x,x,0),(0,0,z)$ لا تنتميان إلى M_1. من الواضح أنهما لا يحققان معادلتي M_1. نستنتج أن رتبة $Jac_f(x,y,z)$ تساوي 2 من أجل كل $(x,y,z) \in M_1$.

وعليه M_1 منوعة.

اتبع نفس الاستدلال من أجل M_2.

من أجل M_3 نضع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^n$ ، يكون $M_3=f^{-1}(0)$ و f من الصنف C^1.
$\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,nz^{n-1})$.

- الحالة $n=1$ ، واضح أن ∇f لا ينعدم وبالتالي M_3 منوعة.
- الحالة $n \geq 2$ ∇f ينعدم من أجل *(0,0,0)*، كون $(0,0,0) \in M_3$ إذن M_3 ليست منوعة بجوار(0,0,0) وبالتالي ليست منوعة في IR^3.

M_4 معرفة وسيطيا، نضع $g(t)=(t^2,t^3,t^4)$ يكون $M_4 = g(IR)$ ، إن g من الصنف C^1.

$g'(t)=(2t,3t^2,4t^3)$ ينعدم من أجل $t=0$ وبما أن $0 \in IR$ ، نستنتج M_4 ليست منوعة في IR^3.

حل ت2

1. نضع $f(x,y,z)=xy+xz+2x+2y-z$ ، يكون $S=f^{-1}(0)$ و f من الصنف C^1.
$\nabla f(0,0,0) = (2,-1,-1)$. وهو لا ينعدم إذن S منوعة في IR^3 بجوار(0,0,0) بعدها 2 ، مما يعني أنها سطح بجوار (0,0,0).

$$(2,-1,-1) \times \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0$$

ومنه $2x - y - z = 0$ ، تمثل معادلة المستوي المماس المطلوب.

2. نضع $f_1(x,y,z)=x^2+y^2-z$ ، $f_2(x,y,z)=x+y+z$ و $f=(f_1,f_2)$.
يكون $\mathcal{C}=f^{-1}(0)$ و f من الصنف C^1. نبين رتبة $\mathrm{Jac}_f(0,0,0)$ تساوي 2 .

$$\mathrm{Jac}_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

كون $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ، يعني رتبة $\mathrm{Jac}_f(0,0,0)$ تساوي 2. ومنه $\mathcal{C}$ منوعة بعدها 1 وعليه فهي تمثل منحنى.
المستقيم المماس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\begin{pmatrix} -x \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

وهي معادلات المستقيم المماس عند المبدأ.

حل ت 3.

1. اولا نعين معادلة S، نضع $\phi(\mathrm{u},\mathrm{v}) = (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ ومنه نحصل على الجملة

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \\ 4uv = z \end{cases}$$

ومنه $u = \frac{x+y}{2}$ و $v = \frac{x-y}{2}$. إذن من المعادلة الثالثة، نكتب $4(\frac{x-y}{2})(\frac{x+y}{2}) = z$. ومنه معادلة S هي $x^2 - y^2 = z$. (لرسم S خذ له مقاطع في مستويات موازية للمستوي xOz).

الشعاع العمودي هو N حيث

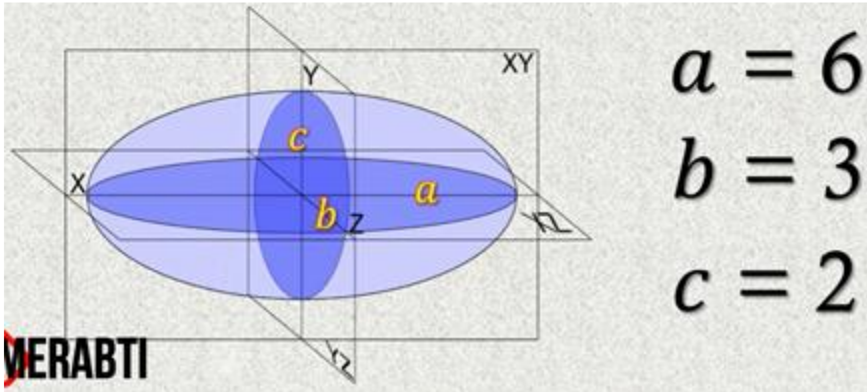
$$N = \frac{\partial\phi}{\partial u}(1,1) \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e_1 \\ 1 & -1 & e_2 \\ 4 & 4 & e_3 \end{vmatrix}$$
$$= 8e_1 - 0e_2 + (-2)e_3$$

($\wedge$ جداء شعاعي)

ومنه $N = {}^t(8,0,-2)$. وعليه شعاع الوحدة العمودي هو

$$n = \frac{N}{\|N\|} = {}^t\left(\frac{8}{\sqrt{68}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{68}}\right)$$

2. الرسم



بوضع

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

من أجل $M_0(x_0, y_0, z_0)$ كيفية من $\mathcal{R}$ نحسب

$$\nabla f(M_0) = \ {}^t(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2})$$

معادلة المستوي المماس لـ $\mathcal{R}$ عند M_0 معرفة بمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ حيث

$$\nabla f(M_0).\overrightarrow{M_0M} = 0$$

("." جداء سلمي)

أي

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

ومنه

$$\frac{2x_0}{a^2}x + \frac{2y_0}{b^2}y + \frac{2z_0}{c^2} - 2(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2}) = 0$$

لكن المقدار بين قوسين يساوي 1 ، لأن $M_0 \in \mathcal{R}$. وعليه المعادلة بعد الاختزال هي

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}\mathrm{z} - 1 = 0$$