Dr. Y. Letoufa

Email: letoufa54@gmail.com

Formulaire cours

Contenu :

Continue de chapitre 4 ; Variétés topologiques

Chapitre 5 : Formes différentielles en dimension 1, 2 et 3

Continue de chapitre 4 ; Variétés topologiques

Rappelle. La sphère S_{n-1} : $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$,

c'est un bon exemple de sous- variétés dans R^n.

On note par $|.|$la norme euclidiennes.

Exemple 1 (sur les cartes et atlas).

"*Projections stéréographiques de la sphère*".

On définit $p_N(x)$ pour x appartenant à un voisinage de l'hémisphère sud sur la sphère S_{n-1} , voisinage contenant l'équateur, comme l'intersection avec le plan de l' équateur de la droite qui passe par N(le pôle nord) et x .On définit de même p_S. On vérifie à la main que le changement de carte est C^∞. Précisément, on note $x= (x_1,...,x_n)$ sur la sphère, non égal au pôle nord, et $p_N(x)$ est alors défini comme l'intersection de l'hyperplan $\{x_n= 0\}$ avec la droite affine $(Np_N(x))$. Cette droite affine admet la représentation paramétrique :

$\{(0,...,0,1) +t(x_1,...,x_{n-1},x_n-1), t\in R\}$,

et l'intersection avec l'hyperplan de l´équateur a donc lieu pour t tel que $1 +t(x_n-1) = 0$. On vient de vérifier que

$p_N(x_1,...,x_n) =\frac{1}{1-x_n}(x1,...,x_{n-1},0)$.

Calculons la réciproque $p^{-1}{}_N$,définie dans $p_N(S_{n-1}\backslash\{N\})$. On pose la forme a priori

$p_N^{-1}(x'_1,...,x'_n) = (\alpha x'_1,...,\alpha x'_n,\beta)$.

Alors $p_N(\alpha x'_1,...,\alpha x'_{n-1},\beta) =\frac{\alpha}{1-\beta}(x'_1,...,x'_{n-1},0)$.

Donc $\alpha= 1-\beta$. Par ailleurs, $p_N^{-1}(x')$ appartient à S_{n-1}.

Donc $\beta^2|x'|^2+ (1-\beta)^2= 1$.

La solution triviale $\beta= 0$ correspond à l'hémisphère nord.

L'autre solution est $\beta=\frac{2}{1+|x'|^2}$. Donc

$p_N^{-1}(x') =\left(\frac{2x'_1}{1+|x'|^2}, ... \frac{2x'_{n-1}}{1+|x'|^2}, \frac{-1+|x'|^2}{1+|x'|^2}\right)$.

Enfin, on calcule

$p_S \circ p^{-1}_N(x',0) = |x'|^{-2}\,(x',0)$,

qui est C^∞.

Exemple 2. Sur la sphère S_2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ incluse dans R^3; un atlas est donné par $\{(U_N , p_N), (U_S, p_S)\}$, avec U_N un voisinage du pôle nord qui contient strictement l'hémisphère nord, et p_N la projection stéréographique à partir du pôle nord. De même symétriquement pour U_S et p_S.

On vérifie que c'est un atlas lisse: il suffit de vérifier que

$p_N \circ p_S^{-1}$ et $p_S \circ p_N^{-1}$ sont C^∞: C'est ce que déjà on a vérifié dans l'Exemple 1.

6. Morphismes de variétés

Une application différentiable entre deux variétés est simplement une application différentiable lorsqu'on la lit dans des cartes.

Définition 1 (Différentiabilité).

Soient M et N deux variétés différentielles dans R^n, une application $f : M \to N$ est différentiable en a s'il existe une carte (U,ϕ) en a et une carte (V, ψ) en $f(a)$ telle que $f(U) \subset V$ et

$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ est différentiable en $\phi(a)$.

Lorsque f est différentiable en tout point a de M, on dit que f est différentiable sur M.

Si pour tout x dans M l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ est de classe C^k sur $\phi(U)$ on dit que f est un morphisme de classe C^k sur M.

Définition 2 (Difféomorphisme).

Une application $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés différentielles est un C^k difféomorphisme si f est bijective et f, f^{-1} sont de classe C^k.

Deux variétés différentielles M et N de classe C^k sont isomorphes lorsqu'il existe un C^k-difféomorphisme de M dans N.

Exercice 1. Soient M,N et K sont variétés différentielles. Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow K$ deux application différentielles.

Montrer que $g \circ f : M \rightarrow N$ est différentiable**.**

7. Partition de l'unité

Lemme 1. *La fonction définie sur IR par* $f(t) = e^{-1/t}$ *pour* $t \geq 0$ *et par* $f(t) = 0$ *pour* $t \leq 0$ *est* C^∞.

Preuve. On montre par récurrence que pour $t > 0$, $f^{(p)}(t)$ est de la forme $\frac{Q(t)}{t^{2p}} e^{-1/t}$ où Q est un polynôme. En effet, cela est vrai pour $p = 0$ et sa dérivée est

$(tQ'(t) - 2pQ(t))t^{-2p-1}\, e^{-1/t} - Q(t)t^{-2p-2t}\, e^{-1/t}$

Il en résulte que $f^{p}(t)$ est bien définie pour $t > 0$ et que

$\lim_{t\to 0} f^{p}(t) = 0$. On en déduit

que f est p-fois dérivable en 0, et que sa p-ième dérivée est continue. Donc f est de classe C^p pour tout p, et elle est finalement de classe C^∞.

On peut alors construire une fonction g telle que $g(t) = 0$ pour

$t \leq 0$ et $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Il suffit de poser

$I = \int_{\mathrm{IR}} f(t)f(1 - t)dt.$

Alors $I > 0$ et $g(t) = \frac{1}{I}\int_{-\infty}^{t} f(s)f(1 - s)ds.$

Proposition 1 *Soit K un compact contenu dans* Ω. *Il existe une fonction ϕ de $C^0_\infty(\Omega)$ égale à* 1 *au voisinage de K.*

Preuve. Soit δ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega$ pour tout x de K (qui existe car $d(x, C_{\mathrm{IRn}}\Omega)$ atteint son minimum > 0 sur le compact K).

Alors posant $\psi_x(y) = 2g\,(1 - |y - x|^2\, \delta^{-2})$

et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, on a $K \subset \cup_{x\in K} W_x$ et en extrayant un sous-recouvrement fini par les W_{xj}, on pose $\phi(y) = g(\Sigma_j\, \psi_{xj}(y))$. Alors $\phi = 1$ sur K et $\phi = 0$ hors d'un δ-voisinage de K.

Théorème 1. *Soit X un sous-ensemble fermé de IR^n et $(U_j)_{j\in \mathrm{IN}}$ un recouvrement localement fini de X. Il existe alors des fonctions χ_j dans $C^0_\infty(Uj)$, à valeurs dans* [0, 1] *vérifiant*

$$\Sigma_j\, \chi_j(x) = 1 \text{ sur } X$$

Preuve. Il existe un recouvrement de X par des ouverts V_j tels que $V_j \subset U_j$ (recouvrement qui est automatiquement localement fini). Supposons en effet avoir défini

$V_1, ..., V_m$ tels que

$X \subset \cup_{1\leq j\leq m} V_j \cup_{k\geq m+1} U_k$

On pose $F_{m+1} = X \setminus (\cup_{1\leq j\leq m} V_j \cup_{k\geq m+2} U_k)$. On a par hypothèse

$F_{m+1} \subset U_{m+1}$, on

peut alors trouver un ouvert V_{m+1} tel que $F_{m+1} \subset V_{m+1} \subset V_{m+1} \subset U_{m+1}$. On a alors

$X \subset \cup_{1\leq j\leq m+1} V_j \cup_{k\geq m+2} U_k$.

On prend alors ϕ_j valant 1 sur V_j et s'annulant hors de U_j. Alors $\Sigma_j \phi_j > 0$ sur $\cup_j V_j$ et

si $\psi(x) = 1$ sur X et vaut 0 hors de $\cup_j V_j$, on a sur X l'égalité

$$\Sigma_j \frac{\phi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \Sigma_j \phi_j(x)} = 1 .$$

Les fonctions $\chi_j(x) = \frac{\phi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \Sigma_j \phi_j(x)}$ répondent donc à la question.

Théorème 2. *Soit K un compact de IR^n contenu dans la réunion d'ouverts $\cup_\alpha U\alpha$. Il existe alors des fonctions χ_α dans $C^0_\infty(U_\alpha)$, à valeurs dans* $[0, 1]$ *vérifiant*

$\Sigma_\alpha \chi_\alpha(x) = 1$ *sur K*

la somme étant supposée localement finie.

Preuve. On rappelle le théorème de Lebesgue : pour tout

recouvrement de K il existe un δ tel que les boules $B(x, \delta)$ pour x dans K sont toutes contenues dans un U_α.
Posant $\psi_x(y) = 2f(\delta^2 - |y - x|^2)$ et $W_x = \{y \mid \psi_x(y) > 1\}$, les W_x pour x dans K forment un recouvrement de K dont on extrait un sous-recouvrement fini par les W_{xj}. On pose $\psi_j = \psi_{xj}$. Alors

$\Sigma_j\ \psi_j(y) > 1$ sur K et si ϕ est la fonction associée par la proposition précédente à K, les fonctions
$\chi_j = \psi_j(1 - \phi) + \Sigma_j\ \psi_j$
répondent au problème posé.

Théorème 3 (Partition de l'unité sur une variété)**.** *Soit M une variété et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe alors une famille $(\rho_j)_j$ de fonctions de classe C^∞ telles que*

a*) pour tout j* $\operatorname{supp}(\rho_j) \subset U_{\alpha(j)}$
b) $\forall x \in M,\ 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$
c) $\forall x \in M,\ \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j = 1$
d) Chaque point x de M a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des supports de ϕ_j

Preuve. On peut passer à un recouvrement plus fin, localement fini, dont chaque ouvert est contenu dans une carte. Soit $(U_j)_{j \in \mathrm{IN}}$ un tel recouvrement, et V_j un sous recouvrement tel que $V_j \subset \overline{V_J} \subset U_j$. Via les cartes $\phi_j : U_j \to \mathrm{IR}^n$, on peut trouver des fonctions f_j à support dans U_j telles que $f_j = 1$ sur V_j (voir Proposition 1).

Alors

$\phi_j = \frac{f_j}{\sum_{j=1}^{\infty} f_j}$ vérifie les conditions du théorème.

Chapitre 5 :

Formes différentielles en dimension 1, 2 et 3

1 Motivations: Les formes différentielles sont les objets naturels qu'on peut intégrer sur des domaines non plats (courbes, surfaces, volumes). Ensuite, nous démontrons la formule de Stokes qui joue un rôle crucial, autant en mathématiques qu'en mécanique et en physique.

$\int_{\partial D} \omega = \int_D \, d\omega,$

et généralise la formule classique

$\int_{[a,b]} df = \int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a) = \int_{\{b,a\}} f = \int_{\partial[a,b]} f$

au cas d'une surface $D = S$ bordée par une courbe $\partial D = C$, et à celui d'un volume $D = V$ bordé par une surface $\partial D = S$.

Note : Les fonctions utilisées dans ce texte sont considérées en de classe C^1 ou bien de classe C^2 si le besoin.

Définition 1. On définit la rotation et la divergence pour un champ vectorielle sur IR^2 ou IR^3 comme la suite rot$(f,g)= \partial_x g - \partial_y f$,

avec f, g des fonctions des deux coordonnées.

rot$(f,g,h)= (\partial_y h - \partial_z g , \partial_z f - \partial_x h , \partial_x g - \partial_y f)$,

div$(f,g,h)= \partial_x f + \partial_y g + \partial_z h$,

avec f, g et h des fonctions des trois coordonnées.

On définit maintenant les formes différentielles de degré k = 0; 1; 2; 3, qui sont des objets qu'on va intégrer sur des domaines de dimension k.

Définition 2.

1. Une 0-forme différentielle $\omega \in \Omega^0$ est une fonction f des coordonnées.

2. Une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1$ est une expression de la forme

$\omega = fdx$ *(sur IR)*

$\omega = fdx + gdy$ *(sur* IR^2*)*

$\omega = fdx + gdy + hdz$ *(sur* IR^3*)*

avec f, g et h des fonctions des coordonnées.

3.Une 2-forme différentielle $\omega \in \Omega^2$ est une expression de la forme

$\omega = fdx \wedge dy$ *(sur* IR^2*)*

$\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ *(sur IR*^{3}*)*

avec *f, g et h* des fonctions des coordonnées.

4. Une 3-forme différentielle $\omega \in \Omega^3$ sur IR3 est une expression de la forme

$\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$.

Les règles du calcul avec les formes différentielles sont les suivantes:

$du \wedge dv = -dv \wedge du$ pour u et v des coordonnées؛

$du \wedge (dv \wedge dw) = (du \wedge dv) \wedge dw,$

$f \wedge w = f.w,$

$(w_1+w_2) \wedge \eta = w_1 \wedge \eta + w_2 \wedge \eta,$

De la première règle, on déduit

$du \wedge du = 0.$

Définition 3. On définit la différentielle extérieure $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ par les règles suivantes:

1. La différentielle $df \in \Omega^1$ d'une 0-forme (fonction) *f* est la 1-forme différentielle

définie par les dérivées partielles de la fonction:

$df = f' dx$ *(sur IR)*

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$ *(sur IR²)*

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ *(sur IR3)*

2. *Si f est une fonction et* ω *est une forme differentielle produit extérieur des formes coordonnées dx, dy, dz (par exemple* $\omega = dx$, $\omega = dz \wedge dx$ *ou* $\omega = dy \wedge dx \wedge dz$*) alors*

$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega$.

3. *La différentielle est additive :* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

Remarque 1. *On peut montrer à partir des régles de calculs de la définition les deux propriétés suivantes :*

1. La différentielle du produit d'une fonction $f \in \Omega^0$ *et d'une k-forme* $\omega \in \Omega^k$ *est donnée par*

$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega$.

2. Plus généralement, la diff´erentielle du produit de $\omega \in \Omega^k$ *et* $\eta \in \Omega^l$ *vérifie la règle de d´erivation graduée*

$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

3. $d(d\omega) = 0$.

Par exemple, sur IR, si $\omega = fdx$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par

$d\omega = df \wedge dx + f \wedge d^2x = f'(x)dx \wedge dx + 0 = 0$.

De meme sur IR², si $\omega = fdx + gdy$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par

$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy$

$= (\partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy) \wedge dx + (\partial_x g\, dx + \partial_y g\, dy) \wedge dy$

$=\partial_y f\, dy \wedge dx + \partial_x g\, dx \wedge dy$

$= (\partial_x g - \partial_y f) dx \wedge dy.$

De meme sur IR^3, si $\omega = fdx + gdy + hdz$ est une 1-forme differentielle, sa differentielle exterieure est donnée par

$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$

$= (\partial_y f\, dy \wedge dx + \partial_z f\; dz \wedge dx)$

$+ (\partial_x g\, dx \wedge dy + \partial_z g\; dz \wedge dy)$

$+ (\partial_x h\, dx \wedge dz + \partial_y h\; dy \wedge dz)$

$= (\partial_y h - \partial_z g) dy \wedge dz$

$+ (\partial_z f - \partial_x h) dz \wedge dx$

$+ (\partial_x g - \partial_y f) dx \wedge dy$

Définition 4. *Une forme differentielle ω est dite* fermée *si* $d\omega = 0$ *et* exacte *si elle admet une primitive, i.e., si il existe η telle que $d\eta = \omega$.*

Comme $d(d\omega) = 0$, toute forme differentielle exacte est fermée. On a aussi la réciproque suivante sur des domaines sans trous.

Théorème 1. *Sur une domaine D "sans trou" de* IR^n, *une forme différentielle est exacte si et seulement si elle est fermée.*

3 Champs de vecteurs et formes différentielles

On montre maintenant que du point de vue des formes differentielles, les opérateurs classiques sur les champs de vecteurs (**gradiant, rotationnel, divergence**) s'identifient à la différentielle extérieure.

On note V l'espace des champs de vecteurs, qui sont des fonctions $\vec{V}$: $\mathrm{IR}^n \longrightarrow \mathrm{IR}^n$ pour $n = 2, 3$, qu'on peut écrire en coordonnées

$\vec{V}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ (sur IR^2)

$\vec{V}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ (sur IR^3).

On note F l'espace des fonctions f des coordonnées.

On va symboliser le lien entre les opérateurs du calcul vectoriel et la différentielle extérieure par des diagrammes d'applications et d'´equivalences. Ce lien permet de

retrouver toutes les formules différentielles et intégrales pour ces opérateurs.

<u>Sur IR^2</u>, si $\vec{V} = (f, g)$ est un champ de vecteurs, on note

$\omega_V = fdx + gdy$.

On a alors le diagramme $F \xrightarrow{grad} V \xrightarrow{rot} F$ en parallèle à

$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2$.

On a déjà vu par un calcul dans la section précédente que

$d(fdx + gdy) = \mathrm{rot}(\vec{V})\, dx \wedge dy$.

<u>Sur IR^3</u>, si $\vec{V} = (f, g, h)$ est un vecteur, on pose

$\omega_V = fdx + gdy + hdz$

et

$*\,\omega_V = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$.

Remarquons que la 2-forme $*\,\omega_V$ est obtenue à partir de la 1-forme ω_V par le remplacement suivant, appelé opérateur étoile de Hodge :

$dx \to *dx = dy \wedge dz$

$dy \to *dy = dz \wedge dx$

$dz \to *dz = dx \wedge dy$

On a alors le diagramme

$F \xrightarrow{grad} V \xrightarrow{rot} V \xrightarrow{div} F$;

$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3$.

Vérifions que la divergence en dimension 3 s'identifie à la différentielle en utilisant les règles $du \wedge du = 0$ et

$du \wedge dv = -dv \wedge du$ pour annuler des termes. On a

$d(*\omega_V) = d(fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy)$

$= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy$

$= \partial_x f dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y g\, dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z h\, dz \wedge dx \wedge dy$

$= (\partial_x f + \partial_y g + \partial_z h) dx \wedge dy \wedge dz$

$= \mathrm{div}(V)\, dx \wedge dy \wedge dz$

Vérifions de même que le rotationnel en dimension 3 s'identifie a la différentielle. On a

$d(\omega_V) = d(fdx + gdy + hdz)$

$= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$

$= (\partial_y f\, dy \wedge dx + \partial_z f\, dz \wedge dx) + (\partial_x g\, dx \wedge dy + \partial_z g\, dz \wedge dy) + (\partial_x h\, dx \wedge dz + \partial_y h\, dy \wedge dz)$

$= (\partial_y h - \partial_z g) dy \wedge dz + (\partial_z f - \partial_x h) dz \wedge dx + (\partial_x g - \partial_y f) dx \wedge dy$

$= * \omega_{\mathrm{rot}(V)}$

La règle de calcul $d^2 = 0$ implique les règles

rot ∘grad = 0,

div ∘ rot = 0.

Résultat.

1. *Pour une forme différentielle ω sur IR^n, on a l'équivalence*

   $d\omega = 0 \Leftrightarrow \exists\eta,\ \omega = d\eta.$

   2. Pour un champ de vecteurs V sur IR^n, n=2,3. On a l'équivalence

   $\mathrm{rot}(V) = 0 \Leftrightarrow \exists f,\ \mathrm{grad}(f) = V.$

Définition 5. Soit ω une forme de degré n sur IR^n à support compact.

$\omega = f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$\int_{IR^3} \omega = \int_{IR^3} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$

Ici dx_1, dx_2, dx_3 est la mesure de Lebesgue.
La formule du changement de variable devient alors

Proposition 1. *Soit ϕ un difféomorphisme de* IR^3 préservant l'orientation, *et α une forme de degré n sur* IR^3. *Alors on a la formule de changement de variable*

$\int_{IR^3} \omega = \int_{IR^3} \phi^* \omega$

Démonstration. La formule n'est rien d'autre que la traduction de la formule du changement de variable dans les intégrales multiples.

$\int_{IR^3} f(\phi(x_1, x_2, x_3)) \mid \det(d\phi(x_1, x_2, x_3)) | dx_1 d\, x_2 d\, x_3 =$

$\int_{IR^3} f(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 d\, y_3$

En effet si ϕ préserve l'orientation, le déterminant de $d\phi$ est positif,donc

$\phi^* \omega = f(\phi(x_1, x_2, x_3)) \det(d\phi(x_1, x_2, x_3)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\phi(x_1, x_2, x_3))| \det(d\phi(x_1, x_2, x_3))|\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Remarque 2. La formule du changement de variable en dimension 3 est définit par un intégrale d'une 3-forme diff´erentielle $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$ sur un volume.

Définition 6. Notons P_k un pavé (produitsd'intervalles) et $\phi : P_k \to D$ une variété paramètre orienté de dimension k. L'intégrale d'une k-forme différentielle $\omega \in \Omega^k$ sur D est définie par

$\int_\Omega \omega = \int_{P_k} \phi^* \omega$.

Pour que la définition 6 prenne sens, il faut définir le tire en arrière $\phi^*\omega$ d'une

forme différentielle le long d'une paramétrisation $\phi : P_k \to D$. Ceci peut se faire de la

manière implicite suivante, qu'on va expliciter sur les exemples.

Propositions 2. Si $\phi : P_k \to D$ est un domaine paramètre de dimension k, et $\omega \wedge \eta$ est un

produit de formes différentielles, on pose

$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$

Si $f \in \Omega^0$ est une fonction, on pose

$\phi^* f = f \circ \phi$.

On a aussi la règle

$\phi^* d\omega = d\, \phi^* \omega$.

Exemple 2. *Si C est une courbe paramétrée par* $\phi = (x(t), y(t))$ *dans* IR^2*, on voit que*

$\phi^* dx = d\,\phi^* x = d(x(t)) = x'(t)dt.$

De même, on obtient

$\phi^* dy = y'(t)dt.$

Si f est une fonction, on obtient

$\phi^* f(t) := f(x(t), y(t)).$

Ceci donne par exemple

$\phi^* (fdx) = \phi^* (f).\ \phi^* (dx) = f(x(t), y(t))x'(t)dt.$

Proposition 3. *L'intégrale curviligne d'une* 1*-forme différentielle* $\omega = fdx + gdy$ *le long de la courbe orientée C est donnée par la formule*

$$\int_C \omega := \int_{[a,b]} \phi^*\omega = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt + g(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Exemple 3. *Si S est une surface paramétrée par*

$\phi = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$*, on peut calculer l'image inverse de la* 2*-forme* $dx \wedge dy$ *sur le pavé des paramètres* (s, t) *de la manière suivante :*

$$\phi^*(dx \wedge dy) = \phi^* dx \wedge \phi^* dy$$
$$= d\phi^* x \wedge d\phi^* y$$
$$= dx(s, t) \wedge dy(s, t)$$
$$= (\partial x\ \partial s ds + \partial x\ \partial t\ dt) \wedge (\partial x\ \partial s ds + \partial x\ \partial t\ dt)$$
$$= \frac{D(x,y)}{D(s,t)}\, ds \wedge dt,$$

avec

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

le déterminant jacobien de la paramétrisation.

Proposition 3. *L'intégrale d'une* 2*-forme différentielle*
$\omega = fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$
sur une surface S orientée paramétrée par

$\phi : P_2 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathrm{IR}^3$ *est donnée par la formule*
$\int_S \omega = \int_{P_2} [f \circ \phi \, D \frac{D(x,y)}{D(s,t)} + g \circ \phi \, D \frac{D(y,z)}{D(s,t)} + g \circ \phi \, D \frac{D(z,x)}{D(s,t)}] \, ds \wedge dt.$

On démontre par un calcul très similaires aux précédents que si V est un volume orienté paramétré par

$\phi : [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathrm{IR}^3$, on a
$\phi*(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} \, ds \wedge dt \wedge du.$

Théorème 2 (Formule de Stokes). *Soit D un domaine de* IR^n *de dimension* $k + 1$ *et de bord* ∂D *de dimension k. Soit* $\omega \in \Omega^k$ *une k-forme différentielle et* $d\omega \in \Omega^{k+1}$ *sa différentielle. On a alors l'´égalité*
$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$