Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 Préliminaires

Définition 1.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires $\mathbb{R}$. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application $T : X \longrightarrow Y$ qui vérifie :*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X.$$

On écrit souvent Tx au lieu de $T(x)$. L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y se note $L(X, Y)$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition et la multiplication par les scalaires

$$(T + S)x = Tx + Sx,$$
$$(\lambda T)x = \lambda(Tx).$$

L'opérateur identité noté I, est défini par $I(x) = x, \forall x \in X$.

Remarque 1.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $T : X \longrightarrow Y$ un operateur, alors, T est continu sur X, si*

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X; \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Ty\| < \varepsilon.$$

L'espace des opérateurs linéaires et continus de X dans Y est noté $\mathscr{L}(X, Y)$. Lorsque $Y = \mathbb{R}$, l'espace $\mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ s'appelle espace dual de X et se note X', ses élements s'appellent fonctionnelles sur X.

Proposition 1.1. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un operateur linéaire, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1) T est uniformément continu,
2) T est continu,
3) T est continu en 0,
4) $\exists C > 0 : \forall x \in X, \|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Tx\| \leq C$,
5) $\exists C > 0, \|Tx\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X$.

Démonstration. Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3). Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 4), la continuité de T à 0 se traduit pour $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E, \|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1,$$

alors, pour $x \in E : \|x\| < 1$ on a $\left\| \frac{\delta x}{2} \right\| < \delta$ et par suite

$$\left\| T\left(\frac{\delta x}{2}\right) \right\| < 1$$

donc

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta} = C.$$

Montrons que 4) $\Longrightarrow$ 5) Soit $x \in E : x \neq 0$, alors, $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ et par suite,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C$$

donc $\|Tx\| \leq C\|x\|$, pour $x = 0$ on a $\|T(0)\| = C\|0\|$. Montrons que 5) $\Longrightarrow$ 1). Soient $x, y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$, puisque,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x-y\|$$

alors, pour que $\|Tx - Ty\| < \varepsilon$, il suffit que, $C\|x-y\| < \varepsilon$, ce qui se vérifie si $\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{C}$. Il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. $\square$

Définition 1.2. *Un opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est dit borné, s'il transforme tout ensemble borné de X à un ensemble borné de Y, c'est à dire*

$$\exists k > 0;\ \|Tx\| \leq k\|x\|,\ \forall x \in X.$$

Remarque 1.1. *Il est à noté que d'après la proposition ci-dessus les termes borné et continu n'ont aucune différence pour les opérateurs linéaires. L'espace $\mathscr{L}(X,Y)$ se note aussi $\mathscr{B}(X,Y)$.*

Définition 1.3. *Un opérateur $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ est dit inversible s'il existe un opérateur $S \in \mathscr{L}(Y,X)$, tel que $TS = I_Y$, et $ST = I_X$. Dans se cas S se note T^{-1}.*

Exemple 1.1. *Soient $f \in C[0,1]$ et $T_f \in L(L^2[0,1])$ defini par*

$$(T_f u)(x) = f(x)u(x),\ u \in L^2[0,1].$$

Alors $T_f \in \mathscr{L}(L^2[0,1])$. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x$. Alors, T_f est inversible.

Soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$, alors, $T_g \in \mathscr{B}(L^2[0,1])$ et on a

$$(T_f T_g u)(x) = f(x)g(x)u(x) = u(x)$$

et

$$(T_g T_f u)(x) = g(x)f(x)u(x) = u(x)$$

donc T_f est inversible et $T_f^{-1} = T_g$.

Théorème 1.1. *Soient X un espace de Banach et $T \in \mathscr{L}(X)$ avec $\|I-T\| < 1$, alors, T est inversible et*

$$T^{-1} = \sum_{n\geq 0} (I-T)^n .$$

Théorème 1.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach, alors si $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ est bijectif, il est inversible.*

Démonstration 1.

Définition 1.4. *Un opérateur non borné est un opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, définit sur $D(A)$ un sous espace de X appelé domaine de A.*

L'opérateur A est continu (borné) s'il éxiste une constante positive C telle que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in D(A).$$

La plus petite constante C qui vérifie l'inégalité au-dessus est la norme de A,

$$\|A\| = \inf\{C > 0, \|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in D(A)\}.$$

Exemple 1.2. *Soient $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $M = \sup\limits_{0\leq x,y\leq 1} |k(x,y)|$ et soit $A : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ défini par*

$$(Af)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

$$|Af(x)| \leq \int_0^1 |k(x,y) f(y)|\, dy \leq \|f\| \int_0^1 |k(x,y)|\, dy \leq M\|f\| \int_0^1 dy = M\|f\|$$

Donc, $\|Af\| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |Af(x)| \leq M\|f\|$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \leq M$$

et A est borné.

Exemple 1.3. *Soit $X = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de $\sup$ et soit $A : X \longrightarrow X$ defini par*

$$Af = f',$$

alors, $D(A) = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

Pour $f(x) = x^n$ on a $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$, mais $\|Af\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |nx^{n-1}| = n$, donc

$$\forall C > 0, \exists f \in D(A), f(x) = x^n, n > C : \|f\| = 1, \|Af\| > C,$$

A est alors non borné.

Topologie de $\mathscr{L}(X)$

Soient X un espace de Banach et $\mathscr{L}(X)$ l'espace des operateurs linéaires continus de X dans X, c'est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

et la multiplication des operateurs définie par

$$TS(x) = T(S(x)),\ x \in X.$$

La topologie induite par la norme définie ci-dessus, s'appelle la topologie de la convergence uniforme et elle est caracterisée par le fait que

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathscr{L}(X) \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

On peut aussi munir $\mathscr{L}(X)$ par la topologie forte caractérisé par le fait qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un operateur T si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_n x - Tx\| = 0,\ \forall x \in D(T),$$

ou la topologie faible caractérisé par la convergence de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers T définie comme suit

$$T_n \rightharpoonup T \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle f, (T_n - T)x \rangle = 0, \forall x \in D(T), \forall f \in X'.$$

Définition 1.5. *Un opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, est dit fermé si $D(A) \times R(A)$ est fermé dans $X \times Y$; c'est à dire*

$$\forall (x_n) \subset D(A) : \lim x_n = x,\ \text{alors},\ x \in D(A), \lim Ax_n = Ax.$$

Théorème 1.3. *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Si $\mathcal{G}(A)$ le graphe de A est fermé alors A est borné.*

Lemme 1.1 (Baire)**.** *Soient X un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés telle que $\overset{\circ}{F}_n = \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}$, alors,*

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^{\circ} = \varnothing.$$

Théorème 1.4. ***Banach-Steinhauss.*** *Une famille $\mathscr{F} = \{T_\alpha : X \longrightarrow Y, \alpha \in S\} \subset \mathscr{L}(X, Y)$ d'opérateurs linéaires continus d'un espace de Banach X dans un espace vectoriel normé Y est uniformement bornée si et seulement si elle est simplement bornée,*

$$\left(\sup_{T\alpha \in \mathscr{F}} \|T_\alpha x\|_Y < \infty,\ \forall x \in X \right) \Longleftrightarrow \sup_{T\alpha \in \mathscr{F}} \|T_\alpha\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty.$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'implication directe, le cas inverse est clair. Pour chaque $n \geq 1$ on pose

$$F_n = \{x \in E : \forall \alpha \in S, \|T_\alpha x\| \leq n\}.$$

Alors, $\underset{n\geq 1}{\cup} F_n = E$. Il résulte du lemme de Baire, qu'il existe $n_0 \geq 1 : \overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \varnothing$. Soient alors $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que

$$B(x_0, r) \subset F_{n_0}.$$

Pour $\|x\| \leq 1$ on a $y = x_0 + xr \in F_{n_0}$. Par suite

$$\|T_\alpha (x_0 + xr)\| \leq n_0, \forall \alpha \in S.$$

Par conséquent

$$r\|T_\alpha x\| \leq n_0 + \|T_\alpha x_0\|, \forall x, \|x\| \leq 1, \forall \alpha \in S.$$

D'où,

$$\sup_{\alpha \in S} \|T_\alpha\| \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{\alpha \in S} \|T_\alpha x_0\|\right) < \infty.$$

Autre dḿonstration Il suffit de montrer l'implication directe, le cas inverse est clair. Notons par $F_b(S, E)$ l'espaces des fonctions $f : S \longrightarrow E$ telle que $\{\|f(\alpha)\|, \alpha \in S\}$ est borné. C'est un éspace vectoriel normé de norme

$$\|f\|_b = \sup_{\alpha \in S} \|f(\alpha)\|.$$

Pour tout $x \in E$ on pose $f^x(\alpha) = T_\alpha(x)$. Par définition

$$\{\|f^x(\alpha)\|, \alpha \in S\} = \{\|T_\alpha(x)\|, \alpha \in S\}$$

est borné, donc $f^x \in F_b(S, E)$. On définit l'opérateur $A : E \longrightarrow F_b(S, E)$ par $A(x) = f^x$. Alors, A est fermé. c'est à dire : $\mathcal{G}(A)$ le graphe de A est fermé. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers x et soit $g = \lim_{n\longrightarrow\infty} A(x_n)$. Alors,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|g(\alpha) - A(x_n)(\alpha)\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \|g - A(x_n)\|_b = 0$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A(x_n)(\alpha) = g(\alpha)$$

et en prenant en considération la continuité de T_α on obtient

$$g(\alpha) = \lim_{n\longrightarrow\infty} A(x_n)(\alpha) = \lim_{n\longrightarrow\infty} T_\alpha(x_n) = T_\alpha(x) = A(x)(\alpha), \forall \alpha \in S.$$

Donc $g = A(x)$ et $(x, g) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (x_n, A(x_n)) = (x, A(x)) \in \mathcal{G}(A)$, d'ou A est fermé. Le théorème de graphe fermé entaîne que A est continu (borné). Par suite

$$\|T_\alpha(x)\| = \|f^x(\alpha)\| \leq \|f^x\|_b = \|A(x)\|_b \leq \|A\| \|x\|, \forall \alpha \in S, \forall x \in E$$

donc

$$\|T_\alpha\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|T_\alpha(x)\|}{\|x\|} \leq \|A\|, \forall \alpha \in S.$$

ce qui conduit à

$$\sup\{\|T_\alpha\|, \alpha \in S\} \leq \|A\|.$$

□

Chapitre 2

Semi-groupe fortement continu

2.1 C_0-semigroupes

Définition 2.1. *Une famille* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *d'operateurs linéaires bornés sur un espace de Banach* X *est appelée semi groupe fortement continu ou* C_0- *semigroupe si elle vérifie les assertions suivantes :*
i) $T(s+t) = T(s)T(t),\ \forall s,t \geq 0,$
ii) $T(0) = I,$
iii) pour tout $x \in X,\ \lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x.$

Remarque 2.1. *Le point iii) ci-dessus, se traduit par le fait que la famille* $T(t)$ *tend fortement vers* I *quand* $t \to 0^+$. *Ce qui revient au même de dire que l'application*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ t &\longrightarrow T(t) \end{aligned}$$

est continue en 0 *à droite par rapport à la topologie forte de* $\mathscr{L}(E)$, *ou encore l'application*

$$\begin{aligned} \xi_x : [0, +\infty) &\longrightarrow E \\ t &\longrightarrow T(t)x \end{aligned}$$

est continue.

Exemple 2.1. *Soit* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions qui s'annulent à l'infini, c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon compact \subset \mathbb{R};\ |f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R} - K_\varepsilon,$$

c'est espace de Banach pour la norme de sup

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Soit $q \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *une fonction continue. On définit une famille d'opérateurs sur* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *par*

$$T_q(t)f = e^{tq} f,$$

Exemple 2.2. *Soit $A \in \mathscr{L}(E)$, alors, la famille $\{T(t)\}$ définie par*

$$T(t) = e^{tA} := \sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$$

est un semigroupe fortement continu.
En effet, il est clair que $T(0) = I$.

En utilisant le produit des series formelles on montre que

$$T(t+s) = T(t)T(s),$$

d'autre part, pour tout $x \in E$

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| \leq \lim_{t\to 0^+} \sum_{k\geq 1} \frac{t^k \|A\|^k \|x\|}{k!} = \lim_{t\to 0^+} \left(e^{t\|A\|} - 1\right) \|x\| = 0.$$

Exemple 2.3. *Soit $E = C_{ub}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et uniformement continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme*

$$\|f\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

On définit une famille $\{T(t), t \geq 0\}$ d'operateurs bornés à un paramètre sur E en posant

$$T(t) f(x) = f(x+t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

il est clair que $T(0) f(s) = f(s)$ c'est à dire $T(0) = I$, d'autre part,

$$T(t+s) f(x) = f(x+t+s) = T(s) f(x+t) = T(t) T(s) f(x).$$

En fin

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_X &= \lim_{t\to 0^+} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |T(t)f(x) - f(x)| \right) \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(t+x) - f(x)| \right), \end{aligned}$$

Démonstration. comme f est uniformement continue

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \forall x \in X : |t| < \alpha; \ |f(t+x) - f(x)| < \varepsilon$$

donc $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(t+x) - f(x)| < \varepsilon$, par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ |t| < \alpha \Longrightarrow \|T(t)f - f\|_X < \varepsilon$$

ce qui signifie que $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\|_X = 0$ et le semigroupe et fortement continu. □

Proposition 2.1. *Soit E un espace de Banach et F une fonction d'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ dans $\mathscr{L}(E)$. Les assertions suiventes sont équivalentes.*

1) $\forall x \in E$ l'application

$$\begin{aligned} F(.)\,x : K &\longrightarrow E \\ : t &\longrightarrow F(t)\,x \end{aligned}$$

est continue.

2) F est uniformement bornée sur K

$$\sup_{t \in K} \|F(t)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$$

et il existe un sous-ensemble D dense dans E telle que l'application

$$\begin{aligned} F(.)\,x : K &\longrightarrow E \\ : t &\longrightarrow F(t)\,x \end{aligned}$$

est continue pour tout $x \in D$.

3) L'application

$$\begin{aligned} K \times C &\longrightarrow E \\ (t, x) &\longrightarrow F(t)\,x \end{aligned}$$

est uniformement continue pour tout compact $C \subset E$.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) Puisque F est continue sur le compact K alors pour tout $x \in E$ $\{\|F(t)x\|;\ t \in K\} < \infty$ c'est à dire la famille $\{F(t), t \in K\}$ est simplement bornée, alors le théorème de Banach-Steinhauss entraîne qu'elle est uniformément bornée sur K.
2) $\Longrightarrow$ 3) Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|F(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M,\ \forall t \in K.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et C un compact de E, alors il existe une recouvrement finie pour C,

$$\left\{ B_0\left(x_i, \frac{\varepsilon}{M}\right),\ 1 \leq i \leq m,\ x_i \in D \right\}$$

c'est à dire $C \subset \underset{1 \leq i \leq m}{\cup} B_0\left(x_i, \frac{\varepsilon}{M}\right)$. Comme $F(.)\,x_i$ est continue pour tout $x_i \in D, 1 \leq i \leq m$, alors il existe $\delta_i > 0$ tel que

$$\forall t, s \in K;\ |t - s| < \delta_i \text{ on a } \|F(t)\,x_i - F(s)\,x_i\| < \varepsilon.$$

Pour $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \delta_i$, on a pour tout $1 \leq i \leq m$

$$\|F(t)\,x_i - F(s)\,x_i\| < \varepsilon,\ \forall t, s \in K, |t - s| < \delta.$$

Soient $x, y \in C$ et $t, s \in K$ verifient $\|x-y\|_X < \frac{\varepsilon}{M}$ et $|t-s| < \delta$ alors, il existe $x_i \in \{x_1, s_2, ..., x_m\}$ tel que $x \in B_0\left(x_i, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ et par suite

$$\begin{aligned}\|F(t)x - T(s)y\| &\le \|F(t)x - F(t)x_i\| + \|F(t)x_i - F(s)x_i\| \\ &+ \|F(s)x_i - F(s)x\| + \|F(s)x - F(s)y\| \\ &\le \|F(t)\|\|x-x_i\| + \|F(t)x_i - F(s)x_i\| \\ &+ \|F(s)\|\|x-x_i\| + \|F(s)\|\|x-y\| \\ &\le M\frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon + M\frac{\varepsilon}{M} + M\frac{\varepsilon}{M} = 4\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ et } \exists \lambda(\varepsilon) > 0\varepsilon;\ \ \|x-y\| < \lambda, |t-s| < \delta \Longrightarrow \|F(t)x - T(s)y\| \le 4\varepsilon$$

donc F est uniformement continue sur $K \times C$. 3) $\Longrightarrow$ 1) evident. □

Une conséquence immédiate du proposition 2.1 est le lemme suivant

Lemme 2.1. *Pour un semigroupe $\{T(t), t \ge 0\}$ sur un espace de Banach E, les assertions suiventes sont équivalentes.*
a) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} T(t)x = x$,
b) il existe $\delta > 0$ et $M \ge 1$ et un ensemble D dense dans E tel que
i) $\|T(t)\| \le M,\ \forall t \in [0, \delta]$,
ii) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} T(t)x = x,\ \forall x \in D$.

Démonstration. $a) \Longrightarrow b)$ si $i)$ n'est pas vérifié alors il existe une suite (δ_n) converge vers 0 tandis que $\|T(\delta_n)\| \longrightarrow \infty$, et par suite le théorème de Banach-Steinhauss assure l'existence d'un $x \in E$ tel que $\underset{n\to\infty}{lim}\|T(\delta_n)x\| = +\infty$ ce qui contredit la continuité de $T(\cdot)x$ en 0 à droite. $c)ii)$ est evidente.
$b) \Longrightarrow a)$ Soit δ, M et D tels qu'ils sont indiqués en $b)$, soit $K = \{t_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite inclue dans $[0, \delta]$ et converge vers 0, alors K est compact de $[0, +\infty[$. De $i)$ de $b)$ $T(\cdot)$ est bornée sur K, $\|T(t)\| \le M,\ \forall t \in K$. $ii)$ signifie que $T(\cdot)x$ est continue en 0 à droite pour tout $x \in D$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : t < \alpha \Longrightarrow \|T(t)x - x\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Soit $t_n \in K$ et $0 \le t < \alpha$ alors,

$$\begin{aligned}\|T(t_n + t)x - T(t_n)x\| &= \|T(t_n)\|\|T(t)x - x\| < \varepsilon, \\ \|T(t_n - t)x - T(t_n)x\| &= \|T(t_n - t)\|\|T(t)x - x\| < \varepsilon, \text{ pour } t \le t_n,\end{aligned}$$

donc $T(\cdot)x$ est continue sur K pour tout $x \in D$. Il result de la proposition 1 (2) $\Longrightarrow$ 1)), que $T(\cdot)x$ est continue sur K pour tout $x \in E$ et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} T(t_n)x = x,\ \forall x \in E.$$

La suite (t_n) était arbitraire, alors $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$. □

Théorème 2.1. *Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un semigroupe fortement continu, alors il existent $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\omega},\ t \geq 0.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'il existe $\eta > 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M,\ \forall t \in [0, \eta]. \tag{2.1}$$

Supposons que ceci n'est pas vrai, alors il existe un semigroupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ tel que

$$\forall \eta > 0, \forall M \geq 1,\ \exists t_{\eta,M} : \left\|T\left(t_{\eta,M}\right)\right\|_{\mathscr{L}(X)} > M.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $\eta = \frac{1}{n}$ et $M = n$, on note $t_{\eta,M} = t_n$ avec $t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ alors on a

$$\|T(t_n)\|_{\mathscr{L}(X)} > n \tag{2.2}$$

Lorsque, $n \to +\infty$, $t_n \to 0$ donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T(t_n)\, x = x,\ \forall x \in E,$$

ce qui entraîne que la suite $(T(t_n)\, x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans X, de théorème de Banach-Steinhaus on conclu que la suite $(T(t_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathscr{L}(E)$ ce qui est contradictoire avec (2.2) d'où (2.1). Soit $t > 0$,alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in [0, \eta[$ tels que $t = n\eta + \delta$, on a donc

$$\|T(t)\| = \|T^n(\eta)\, T(\delta)\| \leq M^n M.$$

Notons que $n = \dfrac{t-\delta}{\eta} \leq \dfrac{t}{\eta}$ par suite

$$\|T(t)\| \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\frac{t}{\eta}\ln M} = Me^{\omega t},$$

avec $\omega = \dfrac{\ln M}{\eta}$. □

Définition 2.2. *Un semigroupe fortement continu qui vérifie*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\omega},\ t \geq 0.$$

est dit de type (M, ω).
Un semigroupe de type $(1, 0)$ est dit semigroupe de contractions.

$$\|T(t)\| \leq 1,\ \forall t \geq 0.$$

Définition 2.3. *Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semigroupe fortement continu, le nombre*

$$\omega_0 = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R};\ \exists M_\omega \geq 1 \textit{tel que } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t},\ \forall t \geq 0\right\}$$

s'appelle la borne de croissance du semigroupe.

Corollaire 2.1. *Soit* $\{T(t), t \geq 0\}$ *un semigroupe fortement continu, alors, la fonction*

$$\begin{aligned} T &: [0, +\infty[\times E \longrightarrow E \\ &: (t, x) \longrightarrow T(t)\, x \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. Soient $x, y \in E, t \in [0, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + h \geq 0$. Si $h > 0$, alors,

$$\begin{aligned} \|T(t+h)\,x - T(t)\,y\| &= \|T(t+h)\,x - T(t+h)\,y\| + \|T(t+h)\,y - T(t)\,y\| \\ &\leq \|T((t+h))\|\,\|x-y\| + \|T(t)\|\,\|T(h)\,y - y\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega}\,\|x-y\| + Me^{t\omega}\,\|T(h)\,y - y\|. \end{aligned}$$

La continuité forte du semigroupe permet de choisir h assez petit $h < \varepsilon$ tel que

$$Me^{t\omega}\,\|T(h)\,y - y\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'autre part, puisque h verifie $h < \varepsilon$ et $x \longrightarrow y$, il est possible de choisir

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2Me^{t\omega h}}$$

et par suite

$$\|T(t+h)\,x - T(t)\,y\| < \varepsilon.$$

Si $h < 0$, on aura

$$\begin{aligned} \|T(t+h)\,x - T(t)\,y\| &= \|T(t+h)\,x - T(t+h)\,T(-h)\,y\| \\ &\leq \|T(t+h)\|\,\|x - T(-h)\,y\| \\ &\leq \|T(t+h)\|\,(\|x-y\| + \|x - T(-h)\,y\|) \\ &\leq Me^{(t+h)\omega}\,(\|x-y\| + \|x - T(-h)\,y\|) \end{aligned}$$

et $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2Me^{t\omega}}$ et $\|x - T(-h)\,y\| \longrightarrow 0$ quand $-h \longrightarrow 0^+$ conduisent au resultat. □

Corollaire 2.2. *Soit* $\{T(t), t \geq 0\}$ *un semi-groupe fortement continu. Pour tout* $x \in E$ *la fonction*

$$t \longrightarrow T(t)\, x$$

est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration. Soient $t, h \geq 0$, alors

$$\|T(t+h)\,x - T(t)\,x\| \leq \|T(t)\|\,\|T(h)\,x - x\| \leq Me^{t\omega}\,\|T(h)\,x - x\|.$$

Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|T(h)\,x - x\| < \varepsilon,\ \forall h, 0 \leq h < \delta$$

par suite pour tout $t \geq 0$, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} T(t+h)\,x = T(t)\,x$ d'ou la continuité à droite en tout $t \in [0, +\infty[$. Pour $t > 0$ et $t \geq h \geq 0$, on a

$$\|T(t-h)\,x - T(t)\,x\| \leq \|T(t-h)\|\,\|T(h)\,x - x\| \leq Me^{t\omega}\,\|T(h)\,x - x\|,$$

et la continuité à gauche en tout $t \in]0, +\infty[$ s'en suit. □

2.2 Générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu

Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un semigroupe d'opérateurs.

Définition 2.4. *On appelle générateur infinitésimal du semigroupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ l'operateur A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},\ \textit{existe} \right\},$$
$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Remarque 2.2. *1) Il est clair que*

$$Ax = \left. \frac{d^+ T(t)}{dt} \right|_{t=0} x.$$

2) $D(A)$ est un sous espace de E et A est en général un opérateur non borné.

Exemple 2.4. *Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ le semigroupe défini par*

$$T(t)x = \left(e^{tA}\right)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}.$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t)x - x}{t} - Ax \right\| = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x}{n!} \right\| \leq \lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{n=2}^{\infty} \left\| \frac{t^{n-1} A^n x}{n!} \right\| \leq \lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} \|A\|^n \|x\|}{n!}$$
$$= \lim_{t \longrightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n \|x\|}{n! t} - \|A\| \|x\| = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{e^{t\|A\|} \|x\| - \|x\|}{t} - \|A\| \|x\| = 0$$

Exemple 2.5. *Considérons le semigroupe $\{T(t), t \geq 0\}$ défini sur l'espace de Banach $E = C_{ub}(\mathbb{R})$ par*

$$T(t) f(x) = f(x+t).$$

On a

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t) f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Pour que la limite $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ existe, il faut et il suffit que f soit dérivable à droite en chaque $x \in \mathbb{R}$, alors

$$D(A) = \left\{ f \in C_{ub}(\mathbb{R}) ; f \text{ admet une dérivée à droite } f'_+ \text{ en tout point de } \mathbb{R} \right\},$$

de plus

$$Af = f'_+.$$

Remarque 2.3. *On va montrer (Remarque 3. a) que f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$, et que $Af = f'$.*

Lemme 2.2. *Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach E. Pour tout $x \in E$, on note par T_x l'application*

$$\begin{aligned} T_x &: [0, +\infty[\longrightarrow E \\ &: t \longrightarrow T(t)\, x. \end{aligned}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes : i) T_x est différentiable sur $\mathbb{R}_+$, ii) T_x est différentiable à 0 à droite.

Preuve. Il suffit de vérifier que $ii) \Longrightarrow i)$.

Pour $h > 0$, on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(s+h)\,x - T(s)\,x}{h} = T(s) \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(h)\,x - x}{h} = T(s) \frac{d^+ T_x}{dt}(0)$$

et T_x est différentiable à droite en tout point $t \in [0, +\infty[$.

Pour $-s \leq h < 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{T(s+h)\,x - T(s)\,x}{h} - T(s) \frac{d^+ T_x}{dt}(0) &= T(s+h) \left(\frac{T(-h)\,x - x}{-h} - \frac{d^+ T_x}{dt}(0) \right) \\ &\quad + T(s+h) \frac{d^+ T_x}{dt}(0) - T(s) \frac{d^+ T_x}{dt}(0). \end{aligned}$$

Notons que d'après la première partie de la démonstration on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{T(-h)\,x - x}{-h} = \frac{d^+ T_x}{dt}(0),$$

en plus $\|T(s+h)\| < \infty$, alors

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \left\| T(s+h) \left(\frac{T(-h)\,x - x}{-h} - \frac{d^+ T_x}{dt}(0) \right) \right\| \leq \lim_{h \longrightarrow 0^-} \|T(s+h)\| \left\| \frac{T(-h)\,x - x}{-h} - \frac{d^+ T_x}{dt}(0) \right\| = 0.$$

La continuité forte de $T(t)$ entraîne

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \left(T(s+h) \frac{d^+ T_x}{dt}(0) - T(s) \frac{d^+ T_x}{dt}(0) \right) = 0,$$

et T_x est différentiable à gauche en tout point $t \in]0, +\infty[$, d'où la différentiabilité de T_x sur $[0, +\infty[$, de plus

$$\frac{dT_x(t)}{dt} = T(t) \frac{d^+ T_x}{dt}(0).$$

Remarque 2.4. *Sur le sous espace $D(A) = \{x \in E : T_x$ est différentiable sur $[0, +\infty[\} \subset E$, la dérivée en 0 à droite $\frac{d^+ T_x}{dt}(0)$ définie un operateur*

$$\begin{aligned} A &: D(A) \subset E \longrightarrow E \\ &: x \longrightarrow Ax = \frac{d^+ T_x}{dt}(0), \end{aligned}$$

c'est le générateur infinitesimal du semigroupe $\{T(t), t \geq 0\}$.

Proposition 2.2. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$. Alors,*

i) Pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$ on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, x ds = T(t)\, x.$$

ii) Pour tout $x \in E$ et tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t T(s)\, x ds \in D(A) \ \text{ et } A\left(\int_0^t T(s)\, x ds\right) = T(t)\, x - x.$$

iii) Pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$, on a $T(t)\, x \in D(A)$, et l'application

$$\begin{aligned} [0, +\infty[&\longrightarrow E \\ t &\longrightarrow T(t)\, x \end{aligned}$$

est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$\frac{d}{dt}(T(t)\, x) = AT(t)\, x = T(t)\, Ax.$$

iv) Pour tout $x \in D(A)$ et tout $0 \leq s \leq t < \infty$ on a

$$\int_s^t AT(\tau)\, x d\tau = \int_s^t T(\tau)\, Ax d\tau = T(t)\, x - T(s)\, x.$$

Démonstration. *i)* Soit $h > 0$, notons que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)\, x ds - T(t)\, x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s) - T(t))\, x ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)\, x - T(t)\, x\|\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire 1. $\lim_{s \longrightarrow t} \|T(s)\, x - T(t)\, x\| = 0$ et le resultat s'ensuit. *ii)* Soient $x \in E, t > 0$ et $h > 0$, alors,

$$\begin{aligned} \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)\, x ds &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{\int_0^t T(s+h)\, x ds - \int_0^t T(s)\, x ds}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)\, x ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_h^t T(s)\, x ds \right) \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, x ds + \frac{1}{h} \int_t^h T(s)\, x ds \right) \end{aligned}$$

et en utilisant $i)$ on obtient

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)\,xds=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)\,xds-\frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,xds\right)=T(t)\,x-x.$$

D'autre part

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(s)\,x=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(s+h)\,x-T(s)\,x}{h}$$

ce qui prouve $ii)$. $iii)$ Soit $x\in D(A)$, alors, $a)$ pour $t\geq 0$ et $h>0$ on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)\,x-T(t)\,x}{h}-T(t)\,Ax\right\|&=\left\|T(t)\left(\frac{T(h)\,x-x}{h}-Ax\right)\right\|\\&\leq\|T(t)\|\left\|\frac{T(h)\,x-x}{h}-Ax\right\|\end{aligned}$$

et puisque $\|T(t)\|<\infty$ le second terme ted vers 0 ce qui prouve que

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)\,T(t)\,x-T(t)\,x}{h}=T(t)\,Ax$$

et par suite $T(t)\,x\in D(A)$ et $AT(t)\,x=T(t)\,Ax$. De plus T est differentiable à droite de $t\in[0,+\infty[$ et

$$\frac{d^+T(t)}{dt}=T(t)\,Ax=AT(t)\,x.$$

$b)$ Pour $t>0$ et $h<0$ tel que $t+h\geq 0$,on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)\,x-T(t)\,x}{h}-T(t)\,Ax\right\|&\leq\|T(t+h)\|\left\|\frac{x-T(-h)\,x}{h}-T(-h)\,Ax\right\|\\&\leq\|T(t+h)\|\left(\left\|\frac{T(-h)\,x-x}{-h}-Ax\right\|+\|T(-h)\,Ax-Ax\|\right)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{T(-h)x-x}{-h}=Ax$ et $\lim_{h\longrightarrow 0^-}T(-h)\,y=y$, on aura

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{T(t+h)\,x-T(t)\,x}{h}=T(t)\,Ax$$

d'ou la différentiabilité de T à gauche de tout $t>0$. La continuité de

$$t\longrightarrow T(t)\,Ax$$

sur $[0,+\infty[$, termine la démonstration de $iii)$. $iv)$ La continuité de $t\longrightarrow T(t)\,Ax$ permet d'integrer l'égalité

$$\frac{d}{dt}(T(t)\,x)=AT(t)\,x=T(t)\,Ax$$

et par suite

$$\int_s^t AT(\tau)\,xd\tau=\int_s^t T(\tau)\,Axd\tau=\int_s^t\frac{d}{d\tau}(T(\tau)\,x)\,d\tau=T(t)\,x-T(s)\,x.$$

$\square$

Remarque 2.5. *Notons que si $x \in D(A)$, le resultat de ii) peut s'écrire aussi*

$$A\left(\int_0^t T(s)\,xds\right) = \int_0^t AT(s)\,xds = \int_0^t T(s)\,Axds.$$

Remarque 2.6. *En appliquant iii) à la générateur infinitisimal de semi-groupe défini par*

$$T(t)\,f(x) = f(x+t)\,,$$

on conclu que

$$t \longrightarrow f(t+x)$$

est dérivable par rapport t, alors,

$$\lim_{s\longrightarrow 0}\frac{f(x+t+s) - f(x+t)}{s} \text{ existe}$$

ce qui signifie que f est dérivable en tout $y = x+t \in \mathbb{R}$, par suite

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{f \in C_{ub}(\mathbb{R})\,;\, f \in C^1(\mathbb{R})\right\},\\ Af &= f'. \end{aligned}$$

Corollaire 2.3. *Pour tout $u_0 \in D(A)$, où A est le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{du(x,t)}{dt} = Au(x,t)\,,\ t > 0,\\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases}$$

admet une solution unique $u(t) = T(t)\,u_0$ qui vérifie

$$u \in C\left([0,+\infty[\,; D(A)\right) \cap C^1\left([0,+\infty[\,; E\right).$$

Démonstration. En effet, si $u_0 \in D(A)$ on a $u(t) = T(t)\,u_0 \in D(A)$ d'après *iii)* du théorème précédent, et

$$u : t \longrightarrow T(t)\,u_0$$

est continue, d'où $u \in C([0,+\infty[\,; D(A))$. D'autre part, u est différentiable sur $[0,+\infty[$ et

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}T(t)\,u_0 = AT(t)\,u_0 \in E,$$

de plus la continuité de u par rapport à t et de A sur $D(A)$ entraine que

$$\frac{d}{dt}T(\cdot)\,u_0 = AT(\cdot)\,u_0 \in C\left([0,+\infty[\,; E\right).$$

d'où le resultat. □

L'unicité de la solution est une conséquence du théorème 4. ci-dessous.

Corollaire 2.4. *Le domaine $D(A)$ du generateur infinitisimal A d'un semigroupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$ est dense dans E et l'operateur A est fermé.*

Démonstration. Soient $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, du théorème 3 *ii*), pour $h = \frac{1}{n} > 0$ on a $x_n = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,xds \in D(A)$ et de *i*) on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,xds = T(0)\,x = x,$$

donc $D(A)$ dense dans X. Soient $(x_n) \subset D(A)$ tel que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$, d'aprés théorème 3, *iv*) on a,

$$\int_0^t T(s)\,Ax_n ds = T(t)\,x_n - x_n,$$

puisque $T(t)$ est borné (continu et défini sur E), alors $\lim_{n \longrightarrow \infty} T(t)\,x_n = T(t)\,x$, d'autre part

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t T(s)\,Ax_n ds - \int_0^t T(s)\,yds \right\| &= \left\| \int_0^t T(s)\,(Ax_n - y)\,ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(s)\|\,\|Ax_n - y\|\,ds \\
&\leq M \int_0^t e^{s\omega}\,\|Ax_n - y\|\,ds \\
&\leq \frac{M}{|\omega|} e^{t|\omega|}\,\|Ax_n - y\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

donc,

$$\int_0^t T(s)\,yds = T(t)\,x - x$$

et par suite

$$y = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,yds = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)\,x - x}{t}$$

donc $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

□

Théorème 2.2. *Soient $T(t), S(t)$ deux semigroupes fortement continus de generateurs infinitesimals A et B respectivement.*

Si $A = B$, alors $T(t) = S(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. Soit $x \in D(A) = D(B)$, d'après le théorème 3. *iii*) $s \longrightarrow S(s)\,x$ est différentiable et $S(s)\,x \in D(A)$. En utilisant encore le théorème 3. *iii*) et le fait que $s \longrightarrow t - s$ est differentiable, on constate que

$$f : s \longrightarrow T(t-s)\,S(s)\,x$$

est differentiable pour tout $s \in [0,t]$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -\frac{dT(t-s)}{d(t-s)}S(s)x + T(t-s)\frac{dS(s)}{ds}x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

L'application f est alors constante et par suite

$$f(0) = f(t)$$

ce qui entraîne

$$T(t)x = S(t)x.$$

□

Théorème 2.3. *Soit A le generateur infinitisimal d'un semigroupe fortement continu $T(t)$, et soit $D(A^n)$ le domaine de A^n, alors, $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cap}} D(A^n)$ est dense dans E.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ et tout $\varphi \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ on pose

$$y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds.$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)y-y}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(s)T(s+h)xds - \int_0^{+\infty}\varphi(s)T(s)xds\right) \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\left(\int_h^{+\infty}\varphi(s-h)T(s)xds - \int_0^{+\infty}\varphi(s)T(s)xds\right).\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{supp}\varphi \subset]0,+\infty[$ on a $\varphi(s-h) = 0$ sur $]0,h[$ et par suite

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{T(h)y-y}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(s-h)T(s)xds - \int_0^{+\infty}\varphi(s)T(s)xds\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{\varphi(s-h)-\varphi(s)}{h}T(s)xds = -x(\varphi'),\end{aligned}$$

ceci prouve que $x(\varphi) \in D(A)$ et $Ax(\varphi) = -x(\varphi')$. □

Démonstration. En refaisant le même travail avec $y = -x(\varphi')$ on montre que $-x(\varphi') = Ax(\varphi) \in D(A)$ et $-Ax(\varphi') = x(\varphi'')$ ce qui signifie que

$$x(\varphi) \in D\left(A^2\right) \text{ et } A^2x(\varphi) = x(\varphi'')$$

et par suite on montre par reccurence que

$$x(\varphi) \in D(A^n) \text{ et } A^nx(\varphi) = (-1)^n x(\varphi''), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

donc,

$$x(\varphi) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n).$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ telle que

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\varphi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Il est clair que $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(]0,+\infty[)$ et que $supp\varphi_\varepsilon = \varepsilon supp\varphi$, alors, $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ et

$$\int_0^{+\infty} \varphi_\varepsilon(s)\,ds = 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|x(\varphi_\varepsilon) - x\| &= \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)(T(s)x - x)\,ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\|T(s)x - x\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{supp\varphi_\varepsilon} \varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\|T(s)x - x\|\,ds \\
&\leq \sup_{s\in supp\varphi_\varepsilon} \|T(s)x - x\|.
\end{aligned}$$

Notons que lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, $supp\varphi_\varepsilon$ se reduit à $\{0\}$ et par suite $\sup\limits_{s\in supp\varphi_\varepsilon} \|T(s)x - x\| \longrightarrow 0$, ce qui prouve que

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} x(\varphi_\varepsilon) = x$$

et $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans E.

□

Corollaire 2.5. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A le générateur infinitisimal d'un semigroupe $T(t)$. Pour tout $t \geq 0$ et $u_0 \in D(A^n)$, $T(t)x \in D(A^n)$ et la fonction*

$$\begin{aligned}
u &: [0,+\infty[\longrightarrow E \\
&: t \longrightarrow T(t)u_0
\end{aligned}$$

est de classe $C^n([0,+\infty[)$ et est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = A^n u(t), \ t \geq 0 \\ u^{(k)}(0) = A^k u_0, \ k = 0,1,...,n-1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Démonstration. Le cas $n = 1$ était l'objet de la remarque 3. Montrons le cas général par récurrence. Supposons que la propriété est vraie jusqu'au cas n et que $u_0 \in D(A^{n+1})$. Puisque $D(A^{n+1}) \subset D(A^n)$ alors $x \in D(A^n)$ et il existe une solution unique de du problème de Cauchy (2.3) pour tout $t \geq 0$. Soient $t \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $t + h \geq 0$. On a

$$\frac{1}{h}\left(u^{(n)}(t+h) - u^{(n)}(t)\right) = \frac{1}{h}\left(A^n T(t+h) u_0 - A^n T(t) u_0\right).$$

Notons que d'après théorème 3 $iii)$ on a pour tout $x \in D(A^n)$ et $s \geq 0$ on a

$$A^n T(s) u_0 = T(t) A^n u_0$$

et on peut écrire

$$\frac{1}{h}\left(u^{(n)}(t+h) - u^{(n)}(t)\right) = \frac{1}{h}\left(T(t+h) A^n u_0 - T(t) A^n u_0\right).$$

Puisque $A^n u_0 \in D(A)$ alors $T(t) A^n u_0 \in D(A)$ donc la limite du terme à droite existe et on a

$$\begin{aligned}\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{u^{(n)}(t+h) - u^{(n)}(t)}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(t+h) A^n u_0 - T(t) A^n u_0}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{T(h) T(t) A^n u_0 - T(t) A^n u_0}{h} = AT(t) A^n u_0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $u^{(n)}$ est differentiable et que

$$u^{(n+1)}(t) = AT(t) A^n u_0 = A^{n+1} T(t) u_0.$$

Il est facile de vérifier que $u^{(k)}(0) = A^k u_0$ pour $k = 0, 1, ..., n$. □

2.3 Propriétés spectrales du générateur infinitesimal

Définition 2.5. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$, on définit :*
a) $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A par

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A)^{-1} \textit{ existe et est continu}\}.$$

b) $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$, la résolvante de A.
c) $\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A)$ le spectre de A.

Rappelons qu'un semi-groupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$ vérifie la propriètè suivante :

$$\exists M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}; \|T(t)\| \leq M e^{t\omega}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

Lemme 2.3. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $t > 0$, les égalités suivantes sont vérifiées :*
1) $e^{-\lambda t}T(t)x - x = (A - \lambda I)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds$ *si* $x \in X$.
2) $e^{-\lambda t}T(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A - \lambda I)xds$ *si* $x \in D(A)$.

Démonstration. On définit la famille d'opérateurs $S(t) := e^{-\lambda t}T(t)$, c'est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitesimal $B = A-\lambda I$ de domaine $D(B) = D(A)$. 1) On applique le théorème 3.ii) au semi-groupe $S(t)$ on aura pour tout $x \in X$

$$\int_0^t S(s)xds \in D(B)$$

et

$$B\int_0^t S(s)xds = (A - \lambda I)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds = S(t)x - x = e^{-\lambda t}T(t)x - x.$$

2) Pour $x \in D(B)$ on applique théorème 3.iv) on aura

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Bxds = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A - \lambda I)xds.$$

□

Théorème 2.4. *Soient $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe fortement continu de générateur infinitesimal $(A, D(A))$ et M, ω les réels qui vérifient*

$$\|T(t)\| \leq Me^{t\omega},$$

alors, les propriétes suivantes sont satisfaites :
1) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$R(\lambda)x := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)\,xds$$

existe pour tout $x \in X$, alors, $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}xds$.
2) *Si $Re(\lambda) > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$,*

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)\,xds$$

et

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{M}{Re(\lambda) - \omega}\ \forall Re(\lambda) > \omega.$$

La réprésentation de $R(\lambda, A)$ donnée en 1) s'appelle la réprésentation intégrale de la résolvante, c'est une intégrale impropre

$$R(\lambda)x = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds.$$

Démonstration. 1) Si $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}xds$ existe, alors,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}xds = \lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds \in D(B) = D(A)$$

et on a

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = -\lim_{t\longrightarrow +\infty}(A-\lambda I)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds$$

et en utilisant le lemme précédent 1) on aura

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = -\lim_{t\longrightarrow +\infty} e^{-\lambda t}T(t)x + x = x,$$

car $\|T(t)\| < +\infty$. D'où

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I.$$

D'autre part, pour $x \in D(A)$ on a

$$R(\lambda)Ax = \lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)Axds = \lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}AT(s)xds.$$

En utilisant le théorème 3.*iii*) on peut écrire

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \lim_{t\longrightarrow +\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{dT(s)x}{ds}ds \\ &= \lim_{t\longrightarrow +\infty}\left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]_0^t + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)xds. \\ &= -x + \lambda R(\lambda)x, \end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I.$$

Donc

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A).$$

2)

$$\left\|\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)ds\right\| \leq M\int_0^t e^{(\omega - Re(\lambda))s}ds = \frac{M}{(\omega - Re(\lambda))}\left[e^{(\omega-Re(\lambda))s}\right]_0^t$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$ le second membre converge vers $\frac{M}{(\omega - Re(\lambda))}$ si $\omega - Re(\lambda) < 0$. □

Corollaire 2.6. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitisimal d'un semi groupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$, alors,*
pour tout $\lambda \in \mathbb{C}; Re(\lambda) > \omega$ on a

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R(\lambda, A)x$$

Démonstration. Du théorème précéedent il result que

$$\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) = I$$

par suite

$$[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]\, R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

$$R(\lambda, A)\, [\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)] = R(\lambda, A).$$

La soustraction des deux égalités donne

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

ce qui entraîne

$$\frac{R(\mu, A) - R(\lambda, A)}{\mu - \lambda} = -R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Le passage à la limite conduit à

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2$$

et on continu par récurrence. □

Chapitre 3

Semi-groupes de contractions et théorie de Hille-Yoside

3.1 Semi-groupes uniformement continu

Définition 3.1. *Un semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ est dit uniformement continu si il vérifie la propriètè suivante*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Théorème 3.1. *Un operateur A est le générateur infinitesimal d'un semi-groupe uniformément continu si est seulement si il est borné.*

Démonstration. Supposons que A est un opérateur borné défini sur$X$. On définit une famille d'opérateur $T(t)$ en posant pour $t \geq 0$

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

La série précédente est majorée par la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}$$

qui converge pour tout $t \geq 0$ vers $e^{t\|A\|}$. Donc elle converge et définit pour tout $t \geq 0$ un opérateur linéaire borné $T(t)$. Il est facile de vérifier que $T(s+t) = T(s)\,T(t)$ et que $T(0) = I$. D'autre part, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = t\,\|A\| \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right\| \\ &\leq t\,\|A\|\, e^{t\|A\|}. \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

De plus

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| = t \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{n-2} A^n}{n!} \right\|$$
$$= t \left\| A \right\|^2 \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{(n+2)!} \right\| \leq t \left\| A \right\|^2 e^{t\|A\|},$$

ce qui montre que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A$$

d'ou A est le générateur infinitisimal du semi-groupe $T(t)$. Réciproquement, Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe uniformement continu sur un espace de Banach X. Soit $\rho > 0$ suffisament petit tel que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds \right\| < 1,$$

alors, $\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds$ est inversible et par suite $\int_0^\rho T(s)\, ds$ est inversible

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(s)\, ds = \frac{\int_0^\rho T(s+h)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds}{h}$$
$$= \frac{\int_h^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds}{h}$$
$$= \frac{\int_h^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^h T(s)\, ds - \int_h^\rho T(s)\, ds}{h}$$
$$= \frac{\int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^h T(s)\, ds}{h}.$$

En multipliant par $\left(\int_0^\rho T(s)\, ds\right)^{-1}$ on obtain

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{\int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^h T(s)\, ds}{h} \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}$$

En utilisant le théorème 3.$i)$ $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds = T(\rho) - I$ et $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, ds = 0$, d'où $\dfrac{T(h) - I}{h}$ converge uniformement, donc fortement, vers l'opérateur linéaire borné

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}$$

qui est le générateur infinitisimal de semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$. □

On résume que le générateur infinitisimal d'un semi-groupe uniformement continu est un opérateur borné et que tout opérateur linéaire borné A engendre un semi-groupe uniformement continu donné par

$$T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Corollaire 3.1. *Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe uniformement continue, alors,*
1) Il existe un opérateur linéaire borné A tel que $T(t) = e^{tA},\ t \geq 0$.
2) Il existe $\omega \geq 0,$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{t\omega},\ t \geq 0$.

Démonstration. 1) D'après le théorème précédent, $\{T(t), t \geq 0\}$ admet un générateur infinitisimal A, qui est un opérateur borné, cet opérateur engendre un semi-groupe uniformement continu $S(t) = e^{tA}$, l'égalité des semi-groupes qui ont le même générateur infinitisimal entraîne que $T(t) = S(t)$. 2)$\|T(t)\| \leq e^{t\|A\|} \leq e^{t\omega}$, où $\omega = \|A\|$. □

3.2 Théorie de Hille-Yosida

Semi-groupes de contractions

Rappelons qu'un semi-groupe fortement continu $\{T(t), t \geq 0\}$ vérifie $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$, pour $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2. *Si $\omega = 0$ le semi-groupe est dit uniformement borné. Si de plus $M = 1$ le semi-groupe est dit de contractions.*

Un semi-groupe de contractions $\{T(t), t \geq 0\}$ vérifie

$$\|T(t)\| \leq 1,\ \forall t \geq 0.$$

Théorème 3.2. ***(Hille-Yosida)*** *Un opérateur (non borné) A est le générateur infinitisimal d'un C_0-semi-groupe de contractions, si et seulement si :*
1) A est fermé de domaine dense.
2) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda, A)\| = \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2. du Chapitre I, le générateur infinitisimal d'un semi-groupe fortement continu est fermé et à domaine dense. □

Démonstration. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $x \in X$ l'application

$$t \longrightarrow T(t)x$$

est continue et uniformement borné $\left(\sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \leq \|x\|\right)$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)xds$$

converge donc $\lambda \in \rho(A)$ et, d'après le théorème 7.1) du chapitre I, la résolvante $R(\lambda, A)$ est donnée par

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)xds.$$

De plus

$$\|R(\lambda, A)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \|T(s)x\| ds \leq \|x\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} \|x\|,$$

donc

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Pour montrer la suffisance des conditions $i)$ et $ii)$ du théorème on est besoin de montrer quelques lemmes □

Lemme 3.1. *Soit A un opérateur qui vérifie les conditions $i)$ et $ii)$ du théorème précédent, alors*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X.$$

Démonstration. Supposons que $x \in D(A)$, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|R(\lambda, A)(\lambda x - Ax + Ax) - x\| \\ &= \|R(\lambda, A)[(\lambda I - A)x + Ax] - x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda}\|Ax\| = 0$$

ce qui conduit à l'affirmation du théorème pour $x \in D(A)$. Comme $D(A)$ est dense dans X et la suite $\{\lambda R(\lambda, A), \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ des opérateurs linéaires bornés est uniformement borné

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

alors,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X.$$

□

Définition 3.3. *Pour tout $\lambda > 0$, on définit la régularisé Yoside de A par*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

A_λ est une approximation de A, de la manière suivante :

Lemme 3.2. *Soit A un opérateur qui vérifie les conditions $i), ii)$ du théorème précédent, alors,*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall x \in D(A).$$

Démonstration. Pour $x \in D(A)$, on a

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

□

Lemme 3.3. *Soient A un opérateur qui vérifie les conditions $i), ii)$ du théorème précédent et A_λ sa régularisé Yosida, alors A_λ est le générateur infinitisimal d'un semi-groupe de contractions uniformement continu $T(t) = e^{tA_\lambda}$ et pour tout $x \in X, \lambda, \mu > 0,$ on a*

$$\left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|, \ \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Puisque A est fermé, $A_\lambda \in \mathscr{L}(X)$ et est le générateur infinitisimal d'un semi groupe uniformement continu $T(t) = e^{tA_\lambda}$, de plus

$$\left\| e^{tA_\lambda} \right\| = \left\| e^{t\left(\lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda I\right)} \right\| = e^{-\lambda t} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} \right\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda} = 1.$$

D'après les définitions de $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ et e^{tA_μ} commute et on a

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \right) \right\| \\ &\leq \int_0^1 t \left\| e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} \left(A_\lambda x - A_\mu x \right) \right\| ds \\ &\leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|. \end{aligned}$$

□

Fin de la démonstration du théorème de Hille-Yosida *Suffisance*
Soit $x \in D(A)$ et prenons $t \in [0, \eta]$, on a

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| &\leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \\ &\leq t \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t \left\| A_\mu x - Ax \right\| \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 3.2. ci-dessus on conclu que pour tout $t \geq 0$, la suite $\left\{ e^{tA_\lambda}x \right\}$ est de Cauchy dans X, par suite elle converge vers une limite$T(t)x$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

La limite $T(t)$ détermine un opérateur linéaire

$$T(t) : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

tel que pour $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$$

uniformement dans tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Comme $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$ et $D(A)$ dense dans X, en déduit que $T(t)$ est prolongeable sur X et on a

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \ \forall x \in X.$$

et

$$\left\| T(t)x \right\| \leq \|x\|, \ \forall t \geq 0, \forall x \in X.$$

La famille d'opérateur bornés $\{T(t), t \geq 0\}$ ainsi déterminer est un semi-groupe qui vérifie

$$\|T(t)\| \leq 1.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$ et tout $x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned}\|T(t)x - x\| &\leq \|T(t)x - T(t)y\| + \left\|T(t)y - e^{tA_\lambda}y\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - y\right\| + \|y - x\| \\ &\leq \left\|T(t)y - e^{tA_\lambda}y\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - y\right\| + 2\|y - x\|.\end{aligned}$$

Soient $T > 0$ et $\varepsilon > 0$, et on choisi $y = x_\varepsilon \in D(A)$ tel que $\|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon$. Pour λ suffisament grand on a

$$\left\|T(t)x_\varepsilon - e^{tA_\lambda}x_\varepsilon\right\| < \varepsilon$$

pour tout $t \in [0, T]$, donc

$$\|T(t)x - x\| < 3\varepsilon + \left\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\right\|.$$

Puisque $\left\{e^{tA_\lambda}, t \geq 0\right\}$ est un semi-groupe uniformement continu, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left\|e^{tA_\lambda} - I\right\| < \varepsilon$$

pour tout tout $t \in [0, \delta]$, par conséquant

$$\left\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\right\| \leq \varepsilon\|x_\varepsilon\|, \forall 0 \leq t \leq \delta$$

comme $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$ alors, $\|x_\varepsilon\| < \eta$ et par suite

$$\|T(t)x - x\| < 3\varepsilon + \left\|e^{tA_\lambda}x_\varepsilon - x_\varepsilon\right\| < \varepsilon'$$

et $\{T(t), t \geq 0\}$ est fortement continu.

Montrons que A est le générateur infinitisimal de $T(t)$, notons par B le générateur infinitisimal de $T(t)$.

Soit $x \in D(A)$, rappelons que $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax$ et $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}Ax = T(t)Ax$ dans tout compact $[0, T]$ alors,

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - T(t)Ax\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x - e^{tA_\lambda}Ax\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}Ax - T(t)Ax\right\| \\ &\leq \left\|e^{tA_\lambda}\right\|\|A_\lambda x - Ax\| + \left\|e^{tA_\lambda}Ax - T(t)Ax\right\|\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}A_\lambda x = T(t)Ax.$$

Soit $h > 0$, alors,

$$T(h)x - x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty}\left(e^{hA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty}\int_0^h e^{tA_\lambda}A_\lambda x dt = \int_0^h T(t)Axdt,$$

et par suite

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(t)Axdt = Ax$$

et déduit que $x \in D(B)$ et $Bx = Ax$. Donc $A \subset B$.

Puisque B est le générateur infinitisimal d'un semi groupe de contractions en déduit de 2) que $1 \in \rho(B)$, donc $(I - B)$ est inversible par suite $(I - B)^{-1}X = D(B)$.

Comme $(I - B)D(A) = (I - A)D(A)$ et d'après 2) $1 \in \rho(A)$ on a $(I - A)D(A) = X$, en déduit que

$$(I - B)D(A) = X$$

ce qui entraîne que $(I - B)^{-1}X = D(A)$, donc $D(B) = D(A)$ ou $B = A$.

3.3 Théorème de Lumer-Phillips

Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle .,. \rangle$, alors H sera identifié avec son dual H'.

Définition 3.4. *Un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ on a*

$$\operatorname{Re} \langle Ax; x \rangle \leq 0.$$

Théorème 3.3. *Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur, alors A est dissipatif si est seulement si*

$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0$ on a

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|.$$

Démonstration. Si A est dissipatif et $\lambda > 0$ on a

$$\lambda \langle x, x \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax; x \rangle \geq \lambda \langle x, x \rangle \geq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} \langle \lambda x - Ax; x \rangle \geq \lambda \|x\|^2 \geq 0$$

et par suite

$$\lambda \|x\|^2 \leq \operatorname{Re} \langle \lambda x - Ax; x \rangle \leq |\langle \lambda x - Ax; x \rangle| \leq \|\lambda x - Ax\| \|x\|.$$

Réciproquement, si $\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$,alors

$$0 \leq \lambda^2 \|x\|^2 \leq \|\lambda x - Ax\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle + \|Ax\|^2$$

donc

$$-2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle + \|Ax\|^2 \geq 0, \ \forall \lambda > 0$$

ce qui est faux sauf que si $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$. □

Théorème 3.4. *Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(A)$ dense dans H. Alors, A est le générateur infinitisimal d'un C_0-semi-groupe de contractions si et seulement si :*

a) A est dissipatif.

b) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$. ($A$ est maximal).

Démonstration. Néssecité : Supposons que A est le générateur infinitisimal d'un semi groupe de contraction, $\{T(t), t \geq 0\}$. Alors, d'après le théorème de Hille Yosida, $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ donc, $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, c'est à dire $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$. D'autre part, pour tout $x \in D(A)$,

$$|\langle T(t)x, x \rangle| \leq \|T(t)x\| \|x\| \leq \|x\|^2.$$

Donc,

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x \rangle = \operatorname{Re} \langle T(t)x, x \rangle - \|x\|^2 \leq |\langle T(t)x, x \rangle| - \|x\|^2 \leq 0.$$

En devisant par $t > 0$ et on fait tendre t vers 0 on obtain

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x \rangle = \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

et A est dissipatif. Suffisance : Démontrons tout d'abord le lemme □

Lemme 3.4. *Soit $T \in \mathscr{L}(X)$, où X est un espace de Banach, les assertions suiventes sont équivalente : i) T est inversible, ii) $\operatorname{Im}(T)$ est dense et il existe $\alpha > 0$, tel que*

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\| .$$

Démonstration. Si T est inversible alors, $\operatorname{Im}(T) = X$ et

$$\|x\| = \left\|T^{-1}Tx\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|$$

d'où

$$\|Tx\| \geq \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \|x\| .$$

Reciproquement, soit (y_n) une suite de $\operatorname{Im}(T) = X$ et $\lim y_n = y$. On a $y_n = Tx_n$ et

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \geq \alpha \|x_n - x_m\| .$$

Puisque (y_n) est convergente, elle est de Cauchy et parsuite (x_n) est de Cauchy et elle est convergente, soit $\lim x_x = x$, donc

$$Tx = T(\lim x_n) = \lim Tx_n = \lim y_n = y.$$

$\operatorname{Im}(T)$ est donc fermé. Comme $\operatorname{Im}(T)$ est dense on aura, $\operatorname{Im}(T) = X$. D'autre part, pour $x \in \ker T$ on a

$$0 = \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$$

et par suite $x = 0$ et T est injectif. En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach on constate que T est inversible. □

Suite de la démonstration de théorème de Lumer-Phillips :

Puisque A est dissipative, alors, pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| . \tag{3.1}$$

Soit $\mu > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\mu I - A) = H$, de (3.1) on a

$$\mu \|x\| \leq \|(\mu I - A)x\|$$

alors, $\mu I - A$ est inversible et

$$\left\|(\mu I - A)^{-1} y\right\| \leq \frac{1}{\mu} \|y\|$$

ce qui signifie que $(\mu I - A)^{-1}$ est borné et par suite fermé. Il s'ensuit que $\mu I - A$ est fermé et A l'est aussi.

Pour montrer que $\operatorname{Im}(\mu I - A) = H$, pour tout $\lambda > 0$, on considère l'ensemble

$$\Gamma = \{\lambda > 0, \operatorname{Im}(\lambda I - A) = H\}$$

D'après, le lemme précédent $\lambda \in \rho(A)$ d'où $\Gamma \subset \rho(A)$.

$\rho(A)$ est ouvert, alors pour tout $\lambda \in \rho(A)$, il existe $V \subset \mathbb{C}$ voisinage de λ tel que $V \subset \rho(A)$, il est claire que $V \cap \mathbb{R}_+ \subset \Gamma$, ce qui prouve que Γ est ouvert. Soit $(\lambda_n) \subset \Gamma$ et $\lim \lambda_n = \lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in X$ il existe $x_n \in D(A)$ tel que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \tag{3.2}$$

d'où (3.1) entraîne

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|y\|$$

et comme (λ_n) est borné et structement positive, il existe existe $C > 0$ tel que

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|y\| \leq C.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\
&\leq \|\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - A x_n + A x_m\| \\
&\leq \|\lambda_m x_n - A x_n - y\| = \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n\| \\
&\leq |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \leq C |\lambda_n - \lambda_m|
\end{aligned}$$

ce qui prouve que (x_n) est de Cauchy, elle converge alors vers $x \in X$. En utilisant (3.2) on obtain

$$\lim A x_n = \lambda x - y$$

et comme A est fermé on a $x \in D(A)$ et $\lim A x_n = A x$ on aura

$$\lambda x - A x = y.$$

D'où $\lambda \in \Gamma$ et Γ est fermé. Γ est à la fois fermé et ouvert et est non vide $\mu \in \Gamma$ d'où $\Gamma =]0, 1[$.

Problème de Cauchy abstraits

Exemple 1. Considérons le problème

$$\begin{cases} A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi) \\ Au = u_{xx}, \ x \in D(A) \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

avec $D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$.

Proposition 3.1. *L'operateur A définie ci-dessus est le générateur infinitisimal d'un C_0-semigroupe de contraction.*

Démonstration. 1) Rappelons que $C_0^\infty(0,\pi) \subset H^2(0,\pi)$ et que $C_0^\infty(0,\pi)$ est dense dans $L^2(0,\pi)$ donc $H^2(0,\pi)$ est dense dans $L^2(0,\pi)$. Même chose pour $H_0^1(0,\pi)$. Le domaine $D(A)$ est donc dense dans $L^2(0,\pi)$. 2) A est dissipatif, en effet

$$\langle Au, u \rangle = \int_0^\pi u_{xx}.u dx = -\int_0^\pi |u_x|^2 dx \leq 0.$$

3) A est maximal, soit $f \in L^2(0,\pi)$, cherchons $u \in D(A)$ tel que

$$(\lambda I - A) u = f$$

pour un certain $\lambda > 0$, ceci équivaut à

$$\begin{cases} \lambda u - u_{xx} = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'équation homogène $\lambda u - u_{xx} == 0$ à pour solution

$$u(x) = c_1(x) e^{-\sqrt{\lambda} x} + c_2(x) e^{\sqrt{\lambda} x}$$

où $c_1(x), c_2(x)$ satisfaient

$$\begin{gathered} c_1'(x) e^{-\sqrt{\lambda} x} + c_2'(x) e^{\sqrt{\lambda} x} = 0 \\ -\sqrt{\lambda} c_1'(x) e^{-\sqrt{\lambda} x} + \sqrt{\lambda} c_2'(x) e^{\sqrt{\lambda} x} = f(x) \end{gathered}$$

on trouve alors,

$$u(x) = k_1 e^{-\sqrt{\lambda} x} + k_2 e^{\sqrt{\lambda} x} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi k(x,y) f(y)\, dy$$

avec

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)}, & 0 \le y \le x \le \pi \\ e^{\sqrt{\lambda}(y-x)}, & 0 \le x \le y \le \pi \end{cases}$$

$\square$

Exercice1. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$.
Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Delta u \text{ sur } \Omega \times \left]0, +\infty\right[, \\ u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega, \\ u(x,t) = 0, \text{sur } \partial\Omega \times \left]0, +\infty\right[. \end{cases} \tag{3.3}$$

1) Montrer que (3.3) admet une solution unique $u \in C\left(\left]0, +\infty\right[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(\left]0, +\infty\right[, L^2(\Omega)\right)$.

Solution. Considérons l'opérateur $A = \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, de domaine

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

1) A est dissipatif.

$$\langle Au, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} u = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\, u = \int_{\partial\Omega} (\nabla u.\eta)\, u - \int_\Omega (\nabla u)^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \le .0$$

2) A est maximal
soit $f \in L^2(\Omega)$ et considérons l'équation

$$(\lambda I - A)\, u = f$$

pour $\lambda = 1$ on obtient

$$\int_\Omega (u - \Delta u)\, v = \int_\Omega f v,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui peut écrire

$$\int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f v,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

et on applique Lax-Milgram le dernier problème admet une solution.

Exercice

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \end{cases}$$
$$u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x).$$

Pour toutes $(u_0, u_1) \in (H^2 \cap H_0^1) \times H_1^1$, le problème admet une solution forte unique

$$u \in C\left(0,\infty,\left(H^2 \cap H_0^1\right)\right) \cap C^1\left(0,\infty,H_0^1\right) \cap C^2\left(0,\infty,L^2\right).$$

1) **Hille Yosida**
2) **Lumer-Phillips**

3.4 Théorie spectrale d'un operateur fermé

Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach X.

Définition 1. On dit que A est fermé si son graphe

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$$

est fermé dans $E \times E$.

Proposition 1. Un opérateur A est fermé si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ qui converge vers x telle que (Ax_n) converge vers y, on a $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Preuve. Montrons tout d'abord que si $x_n \longrightarrow x$ dans E et $(x_n, Ax_n) \longrightarrow (x', y)$ alors, $x = x'$.Supposons que A est fermé et soit (x_n) est une suite de $D(A)$ qui converge vers x, alors, (x_n, Ax_n) est une suite de $\Gamma(A)$ qui est fermé, elle converge donc vers une limite $(z, y) \in \Gamma(A)$.

$$\lim \|(x_n, Ax_n) - (z, y)\|_\Gamma = \|x_n - z\|_{D(A)} + \|Ax_n - y\|_E = 0,$$