جـامـعة الـــوادي		كـلـيـة العــــلوم الدقيـــــقة
قسم الرياضيات	السنة الثانية رياضيات	2020/2019
سلسلة الأعمال التطبيقية في مقياس دوال المتغير المركب - السلسلة -V-		

التمرين الأول:

برهن أن متتاليتي الدوال المركبة $(f_n(z))$ ، $(g_n(z))$ متقاربتين بانتظام في كل من النطاقين D ، D' على الترتيب نحو الدالة المعدومة حيث $f_n(z)=\sqrt{n}ze^{-n^2z^2}$ ، $g_n(z)=\dfrac{1}{1+nz^2}$

و $D=\{z\in C/|\arg z|\leq\alpha, 0<\alpha<\pi/4\}$ ، $D'=\{z\in C/|z|\geq 2\}$

التمرين الثاني:

1) اثبت أن كل من السلسلتين متقاربتين في النطاق الخاص بكل منهما:

$$D=\{z\in C/|z|<1\} ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z(z+n)}{n}\right)^n ،\ D=\{z\in C/\operatorname{Re}z\geq\sigma>1\} ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nz}$$

2) برهن أن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1}/2^n$ تتقارب من أجل $|z|<2$ ، ثم اوجد مجموعها

3) ليكن المجموعين $T_n=z+z^2+......+z^n$ و $S_n=z+2z^2+......+nz^n$

أثبت أن $S_n=(T_n-nz^{n+1})/(1-z)$, أوجد قيم z لكي تتقارب $\sum_{n=0}^{+\infty}nz^n$ ثم استنتج دالة مجموعها

التمرين الثالث : حدد منطقة التقارب أو التقارب المطلق للسلاسل التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 3^n}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!} ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{2inz}}{(n+1)^{3/2}}$$

التمرين الرابع:

اختبر التقارب المنتظم للسلاسل التالية في المناطق المشار إليها:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}};|z|\leq 1 ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+z^2};1<|z|<2 ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nz}{n^2};|z|\leq 1$$

التمرين الخامس*: عين منطقة التقارب المنتظم للسلاسل التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n+1} ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{n^2} ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)z^n} ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$$

التمرين السادس:

ليكن التابع $f(z)=Log(z+1)$ باعتبار أن التفرع الذي له القيمة الصفر عند $z=0$

1) أعط نشرا للتابع $f(z)$ في جوار الصفر على شكل سلسلة تايلور

2) حدد منطقة التقارب للسلسلة السابقة

3) في جوار الصفر استنتج نشر تايلور للتابع $Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

التمرين السابع:

انشر إلى سلسلة صحيحة كل من الدوال التالية و ذلك حسب النقطة المرفقة بها:

$$\frac{z+3}{(z+1)(z-4)}, z=2 \quad ، \quad Log(1+1/z), z=+\infty \quad ، \quad \cos z, z=\pi/2 \quad ، \quad e^{-z}, z=0$$

التمرين الثامن: اوجد حلقة التقارب للسلاسل التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2+1} \quad ، \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{-n^2} z^n \quad ، \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n}(z+1)^n$$

التمرين التاسع:

انشر إلى سلسلة لوران حسب $z-a$ في النطاقات المناسبة للدوال التالية:

$$\frac{z}{z^2+2z+1}, a=0 \quad ، \quad \cos\frac{1}{z}+\frac{z}{z-1}, a=0 \quad ، \quad \frac{ze^{2z}}{z-1}, a=1$$

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)}, \left(a=0,-\frac{3}{2}\in D\right) \quad ، \quad \frac{z^2-1}{z^2+1}, (a=1,2i\in D)$$

التمرين العاشر*:

انشر إلى سلسلة لوران التوابع التالية و ذلك حسب المنطقة المرفقة بكل منها:

$$g(z)=\frac{z}{z^3-1}, C_2=(r,r'), 0<r<r'<\sqrt{3} \quad ، \quad f(z)=\frac{1}{z^2+1}, C_1=\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

التمرين الحادي عشر:

أوجد سلسلة لوران في جوار النقطة الشاذة المبينة لكل من الدوال التالية ثم عين نوعها في كل حالة ومنطقة تقارب كل سلسلة:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z=-1 \quad ، \quad \sin\frac{1}{z+2}, z=-2 \quad ، \quad \frac{e^z}{(z-1)^2}, z=1$$

$$z^2e^{-z^4}, z=0 \quad ، \quad z^{-1}\cosh z^{-1}, z=0 \quad ، \quad \frac{1-\cos z}{z}, z=0$$

$$\frac{z}{e^{1/z}-1}, z=+\infty \quad ، \quad z\sinh\sqrt{z}, z=1 \quad ، \quad \frac{1}{z^2(z-3)^2}, z=3$$

التمرين الثاني عشر*:

جد نشر كل دالة من الدوال التالية في جوار النقطة الشاذة المعطاة مع تحديد نوعها

$$\frac{Log(z+1)}{z+1}, |z|<1 \, ، \, \frac{\sin^2 z-1}{3z^2}, z=0 \quad ، \quad \frac{\cos z+\cos 2z}{z^6}, z=0 \quad ، \quad \frac{e^{1/z}}{z-1}, z=0$$

$f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ اعط نشر للدالة f في الحالات $|z|<1$ ، $|z|>1$ ، $z_0=+\infty$