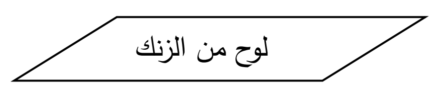
تمت مراجعة هذا الدرس بتاريخ 22-04-2020، فدخلت عليه كثير من التغييرات، The Latest

يقال أن مقطع التصادم يعبر عن شهية الهدف للقذيفة، بلفظ آخر يعبر عن مدى تفاعل الهدف والقذيفة. فكلما كان التفاعل بينهما كبيرا كان مقطع تصادمهما كبيرا، والعكس بالعكس. لهذا السبب يتعلق مقطع تصادم القذيفة بالهدف بالتأثير المتبادل بينهما V من خلال T_i^f. فهو مقياس لمدى التفاعل بين الهدف والقذيفة أو التأثير بينهما.

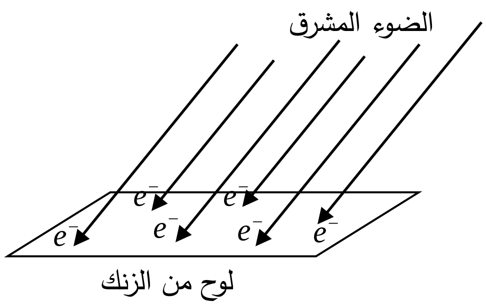
مقطع الكهرباء الضوئية

مقدمة

لاحظ هيرتز يوما حوالي سنة 1886 أنه لما يَشرُق ضوء على لوح من الزنك تطفو على سطحه إلكترونات. ولما يزول الضوء تزول معه الإلكترونات. سميت هذه الإلكترونات كهرباء ضوئية، كما يوضح الشكل(2).



الشكل1: يبين لوح من الزنك بعيد عن الضوء



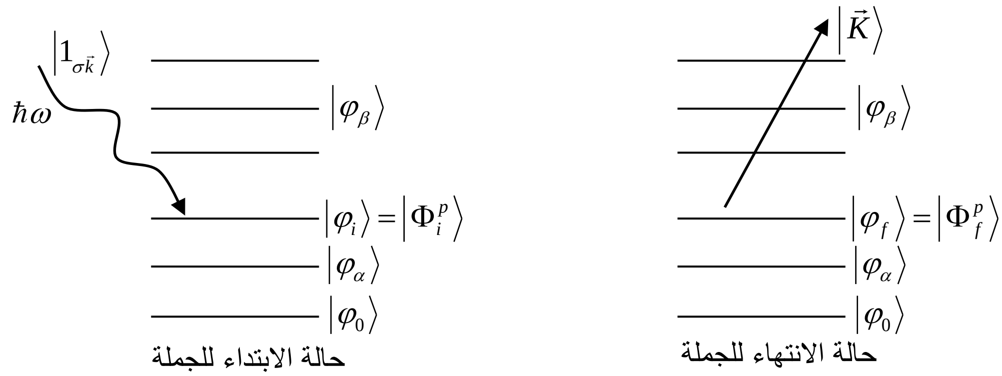
الشكل2: يبين لوح من الزنك يتعرض لضوء

يمكننا وصف هذه الظاهرة من خلال تصادم الفوتونات بالإلكترونات. تعد هذه المسألة تطبيق مباشر لنظري تكميم الأضواء على مسائل فيزيائية، وعليه نبحث عن مقطع الكهرباء الضوئية لذرة Z.

تنتج هذه الظاهرة لما تتعرض ذرة أو جزيئ لوابل من الفوتونات. فيتفاعل(يتصادم) واحد منها مع إلكترون من ذرة، فتتحول كل طاقته للإلكترون، فيفنى الفوتون، ويصير لدا الإلكترون طاقة تمكنه من التحرر من ذرته، فيفلت منها، كم يوضح الشكلين(2 و3). فهذه عملية تصادم امتصاص. يترتب عليها ظهور إلكترون ناتج عن امتصاص فوتون. لهذا السبب سمي هذا الإلكترون كهرباء ضوئية.

تصور المسألة

تصور أن ضوء (فوتونات) أشرق على مادة (ذرة) فصدم فوتون إلكترونا منها مقيدا بطاقة E_a، فحرره، وصار طليقا كما يبين الشكل(3). الحالتان الإبتدائية والنهائية للجملة وطاقتاهما هما



الشكل3: يبين عملية تصادم ضوء بالمادة، هنا تصادم فوتون بإلكترون مقيد

$$\begin{aligned} &|\Phi_i\rangle = |\Phi_i^P\rangle|\Phi_i^R\rangle = |\Phi_i^P\rangle|1_{\sigma k}\rangle && |\Phi_f\rangle = |\Phi_f^P\rangle|\Phi_f^R\rangle = |\vec{K}\rangle|0_{\sigma' k'}\rangle \\ &E_i = E_a + \hbar\omega && E_f = E_{\vec{K}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

حيث $E_{\vec{K}}$ هي طاقة الإلكترون الضوئي، طليق.

ملاحظة: المقصود بحالة صفر فوتون، $|0_{\sigma'\vec{k}'}\rangle \equiv |0_{\sigma'=0,\vec{k}'=0}\rangle$، لا وجود للفوتون ولا للإستقطاب ولا لشعاع الموجة. وهذا ينطبق على كل حالة خالية من الأضواء.

وتصور أن الجملة (مادة – أضواء) موجودة في علبة مكعبة الشكل ضلعها L. يصف حالة الأضواء في العلبة الشعاع $|n_{\sigma_1\vec{k}_1} n_{\sigma_2\vec{k}_2} \dots n_{\sigma_\lambda\vec{k}_\lambda} \dots\rangle$. فشعاع حالة الابتداء للضوء هو $|\Phi_i^R\rangle = |1_{\sigma\vec{k}}\rangle$. وشعاع حالة الابتداء للمادة هو الذي يصف حالة إلكترون مقيد بالذرة Z هو $|\Phi_i^P\rangle$، يحدد لاحقا. أما شعاع حالة الأضواء النهائي، فهو شعاع حالة الفوتون الزائل (الممتص) فهو $|\Phi_f^R\rangle = |0_{\sigma'\vec{k}'}\rangle$، وشعاع حالة المادة النهائي، فهو شعاع حالة إلكترون طليق فهو $|\Phi_f^P\rangle = |\vec{K}\rangle$. كما يوضح الشكلان (3).

تأثير الضوء على المادة

تأثير الضوء على المادة يتمثل في الجزء H^{PR} من مؤثر طاقة الجملة، وهو

$$H^{PR} = -\frac{q_e}{m_e c}\vec{A}(\vec{r}_e)\cdot\vec{\mathrm{P}}_e + \frac{e^2}{2m_e c^2}A^2(\vec{r}_e) \quad \text{بالشرط} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{2.3}$$

هذا في مكيال كولون($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$)، وفي نظام الوحدات(cgs). لقد أشرنا سابقا إلى أن أثار تصادم الأضواء بالأيونات مهين أمام أثار تصادمها بالإلكترونات. لهذا سنعالج هذه المسألة من خلال تصادم الأضواء بالإلكترونات.

احتمال انتقال الجملة من حالة الابتداء إلى حالة الإنتهاء في واحدة الزمن

إن احتمال انتقال الجملة من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال واحدة الزمن متعلق بعنصر مصفوفة مؤثر سلسلة الاضطراب Γ على النحو

$$T_i^f = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle \Phi_f \left|\Gamma\right|\Phi_i\right\rangle\right|^2 \delta\left(E_i - E_f\right) \tag{3.3}$$

حيث Γ هو مؤثر يعطى بالسلسلة

$$\Gamma = V + VG_0V + VG_0VG_0V + ... \tag{4.3}$$

حيث $V = H^{PR}$ هو الاضطراب، اما G_0 فيرمز للمؤثر

$$G_0 \equiv \frac{1}{E - H_0 + \Delta E} \tag{5.3}$$

لقد نبهنا مرارا أننا نكتفي بأول مساهمة من السلسلة. إدخال عبارة V وشعاعي حالتي الابتداء والانتهاء في عنصر المصفوفة، يفضي للعلاقة

$$\left\langle \Phi_f \left|V\right|\Phi_i\right\rangle = \left\langle \Phi_f^p \left|\left\langle 0_{\sigma_f k_f}\left| -\frac{q}{m_e c}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{P}}_e + \frac{q^2}{2m_e c^2}\vec{A}\cdot\vec{A}\right| 1_{\sigma_i \vec{k}_i}\right\rangle\right|\Phi_i^p\right\rangle \tag{6.3}$$

حيث

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\sigma\vec{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{L^3 k}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\left(a_{\sigma\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\sigma\vec{k}}^{+}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{7.3}$$

وعند ادخال عبارة $\vec{A}$ في عنصر المصفوفة (6.3) تنتج ستة حدود تتضمن المؤثرات التالية

$$a_{\sigma\vec{k}}^{+}\ ,\ a_{\sigma\vec{k}}\ ,\ a_{\sigma'\vec{k}'}^{+}a_{\sigma\vec{k}}^{+}\ ,\ a_{\sigma'\vec{k}'}^{+}a_{\sigma\vec{k}}\ ,\ a_{\sigma'\vec{k}'}a_{\sigma\vec{k}}^{+},\ \ a_{\sigma'\vec{k}'}a_{\sigma\vec{k}} \tag{8.3}$$

يلاحظ أن المؤثر $a_{\sigma\vec{k}}a_{\sigma\vec{k}}$ يزيل فتونين من الوسط، فالنتيجة تنعدم بالتعامد.

وأن المؤثرين $a_{\sigma\vec{k}}^{+}a_{\sigma\vec{k}}$ و $a_{\sigma\vec{k}}a_{\sigma\vec{k}}^{+}$ لا يغيران حالة الفتونات، لكن يبدلان ادوارا فحسب، فهما مؤثري تشتت.

وأن المؤثر $a_{\sigma\vec{k}}^{+}a_{\sigma'\vec{k}'}^{+}$ ينشئان فوتونين في الوسط، فالنتيجة تنعدم بالتعامد.

وأن المؤثر $a_{\sigma\vec{k}}^{+}$ يحدث فوتونا ذا σ و $\vec{k}$ في الوسط، والنتيجة تنعدم بالتعامد.

وأن المؤثر $a_{\sigma\vec{k}}$ يتلف فوتون ذا σ و $\vec{k}$ من الوسط، وهو ما نحتاجه. فعنصر مصفوفة V (6.3) غير المعدوم هو

$$\left\langle \Phi_f \left|V\right|\Phi_i\right\rangle = -\frac{q_e}{m_e c}\sum_{\sigma\vec{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left\langle \Phi_f^p\left|\left\langle 0_{\sigma_f\vec{k}_f}\left|a_{\sigma\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|1_{\sigma_i\vec{k}_i}\right\rangle\right|\Phi_i^p\right\rangle \tag{9.3}$$

اعلم أن متغيرات المادة لا تؤثر على متغيرات الأضواء، وبالتالي العلاقة

$$\left\langle 0_{\sigma_f\vec{k}_f}\left|a_{\sigma\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|1_{\sigma_i\vec{k}_i}\right\rangle \equiv \left\langle 0_{\sigma_f\vec{k}_f}\left|a_{\sigma\vec{k}}\right|1_{\sigma_i\vec{k}_i}\right\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e$$

والنتيجة هي

$$\left\langle \Phi_f \left|V\right|\Phi_i\right\rangle = -\frac{q}{m_e c}\sum_{\sigma\vec{k}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left\langle \Phi_f^p\left|\left\langle 0_{\sigma_f\vec{k}_f}\left|\delta_{\sigma\sigma_i}\delta_{\vec{k}\vec{k}_i}\right|0_{\sigma_i\vec{k}_i}\right\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|\Phi_i^p\right\rangle$$

ملاحظة: الحالتين الخاليتين $\left\langle 0_{\sigma_i\vec{k}_i}\right|$و $\left|0_{\sigma_f\vec{k}_f}\right\rangle$ متطابقتين، كما سبقت الإشارة. وبالتالي $\left\langle 0_{\sigma_f\vec{k}_f}\left|0_{\sigma_i\vec{k}_i}\right\rangle = \delta_{\sigma_f\sigma_i}\delta_{\vec{k}_f\vec{k}_i}\right.$.

من ثم

$$\left\langle \Phi_f \left|V\right|\Phi_i\right\rangle = -\frac{q}{m_e c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left\langle \Phi_f^p\left|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|\Phi_i^p\right\rangle \tag{10.3}$$

لاحظ أن الكمية $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}$ بدت مؤثر، الجزء $\vec{\mathrm{P}}$ هو مؤثر الدفع الخطي القانوني للإلكترون، والجزء $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ هو مؤثر مصدره الإشعاع يعني الكمون الشعاعي $\vec{A}$.

الأشعة الخاصة والقيم الخاصة لمؤثر طاقة المادة H^P

معادلة القيم الخاصة للجزء الخاص بالمادة إلكترون مقيد بذرة هي

$$H^P = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad , \quad H^P\left|\Phi_i^P\right\rangle = E_i^P\left|\Phi_i^P\right\rangle \tag{11.3}$$

الذرة Z متعددة الإلكترونات، لذلك سنحدد في هذه المسألة الإلكترون الذي سيقلع من الذرة. واليكن إلكترونا من الحالة S، فالدالة التي تصف حالته هي

$$\left\langle \vec{r}\left|\Phi_i^P\right.\right\rangle = \left\langle \vec{r}\left|\Phi_{10}^P\right.\right\rangle = Y_0^0(\theta,\phi)R_1(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a} \tag{12.3}$$

الموافقة للقيمة الخاصة(الطاقة) $E_i^P = E_e = -Z^2E_0 \quad , \quad E_0 = 13,6\,eV$

وفي حالة النهائية الإلكترون لم يعد مقيدا، بل صار طليقا. معادلة القيم الخاصة لـ H^P هي

$$H^P = \frac{p^2}{2m_e} \quad , \quad H^P\left|\Phi_f^P\right\rangle = E_f^P\left|\Phi_f^P\right\rangle \tag{13.3}$$

حلها(تأكد) يعطى بالعلاقة

$$\left\langle \vec{r}\left|\Phi_f^P\right.\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}}e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} = \left\langle \vec{r}\left|\vec{K}\right.\right\rangle \tag{14.3}$$

وهي موجة مستوية، الموافقة للقيمة الخاصة(الطاقة) $E_f^P = E_{\vec{K}} = \frac{\hbar^2K^2}{2m_e}$

أيضا يلزم التنبيه إلى أن العلاقة بين نصف قطر بوهر وطاقة الإلكترون المقيد هي

$$a \equiv \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\left|E_e\right|}} \tag{15.3}$$

إدخال عبارتي $\left|\Phi_i^p\right\rangle$ و $\left|\Phi_f^p\right\rangle = \left|\vec{K}\right\rangle$ من (12.3) و (14.3) في عنصر المصفوفة V(10.3)، فيصبح

$$\left\langle \psi_f\left|V\right|\psi_i\right\rangle = -\frac{q}{m_ec}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left\langle \vec{K}\left|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|\Phi_{10}^p\right\rangle = -\frac{q}{m_ec}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\int d^3r\,\frac{1}{\sqrt{L^3}}e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$$

وبعد بعض الترتيب والتعديل نجد

$$\left\langle \Phi_f\left|V\right|\Phi_i\right\rangle = -\frac{q}{m_ec}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left\langle \vec{K}\left|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right|\Phi_{10}^p\right\rangle = -\frac{q}{m_ec}\frac{1}{\sqrt{L^3}}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\int d^3r\,e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right)e^{-r/a} \tag{16.3}$$

يستحسن جعل المؤثر $\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right)$ يؤثر على الشعاع $\left|\vec{K}\right\rangle$ بدل تأثيره على الحالة $e^{-r/a}$، وهذا يتم باستخدام العلاقة

$$\int d^3r\,\psi^*Q\Phi = \left[\int d^3r\,\Phi^*Q^+\psi\right]^* \tag{17.3}$$

بناء عليه تغدو العلاقة (17.3) العلاقة

$$\int d^3r\ e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right)e^{-r/a}=\left[\int d^3r\ e^{-r/a}\vec{\mathrm{P}}_e e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}\right]^*=\left[\int d^3r\ e^{-r/a}\vec{\mathrm{P}}_e e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}\right]^*=\hbar\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\left[\int d^3r\ e^{-r/a}e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}\right]^*$$

ويمكن عرضها على الصورة الأبسط

$$\int d^3r\ e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\mathrm{P}}_e\right)e^{-r/a}=\left[\int d^3r\ e^{-r/a}\vec{\mathrm{P}}_e e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}\right]^*=\hbar\vec{q}\left[\int d^3r\ e^{-r/a}e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right]^*=\hbar\vec{q}\int d^3r\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}e^{-r/a}=\hbar\vec{q}J$$

وضعنا $J\equiv\int d^3r\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}e^{-r/a}$ و $\vec{q}\equiv\vec{K}-\vec{k}=$

إدخال ذلك في عنصر المصفوفة (16.3)، يصير

$$\left\langle\Phi_f\left|V\right|\Phi_i\right\rangle=\frac{e}{m_ec}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kL^3}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\left\langle\vec{K}\left|e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\cdot\vec{\mathrm{P}}_e\right|\Phi_{10}^p\right\rangle=\frac{e\hbar}{m_ec}J\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{\pi a^3kL^6}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\qquad(18.3)$$

واحتمال الانتقال من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية خلال وحدة الزمن هو

$$T_i^{\,f}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle\Phi_f\left|V\right|\Phi_i\right\rangle\right|^2\delta\left(E_i-E_f\right)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\frac{e\hbar}{m_ec}J\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{\pi a^3kL^6}}\,\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2\delta\left(E_i-E_f\right)\qquad(19.3)$$

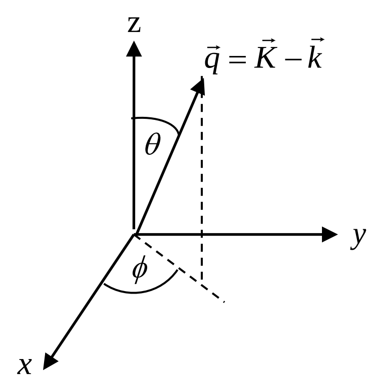
وبعد الترتيب والاختصار والتعديل، تصير العلاقة(19.3)، العلاقة

$$T_i^{\,f}=\frac{4\pi e^2\hbar^2}{m^2c}\frac{1}{a^3kL^6}\left|J\right|^2\left|\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2\delta\left(E_i-E_f\right)\qquad(20.3)$$

حساب التكامل المبين في العلاقة (20.3)

$$J\equiv\int d^3r\,e^{-r/a}e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}=\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\ e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}\qquad(21.3)$$

واضح أنه يمكننا إجراء التكامل على زاوية السمت ϕ، إذ لا يتعلق ما بعدها بها. أيضا، نضع $\vec{q}\equiv\left(\vec{K}-\vec{k}\right)$، ثم



الشكل4: يبين كيف نختار معلم لإجراء التكامل، ليس له تداعيات على المسألة

نجري التكامل على الزوايا أولا، كما يبين الشكل(4). فتغدو العلاقة (21.3) العلاقة

$$J\equiv\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\ e^{i\left(\vec{K}-\vec{k}\right)\cdot\vec{r}}=2\pi\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\ e^{iqr\cos\theta}=-2\pi\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\int_0^\pi d\left(\cos\right)\,e^{iqr\cos\theta}$$

الخطوات التالية تشرح نفسها

$$J=-2\pi\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\int_0^\pi d\left(\cos\right)e^{iqr\cos\theta}=-2\pi\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\frac{1}{iqr}\left[e^{iqr\cos\theta}\right]_0^\pi=-2\pi\int_0^\infty drr^2e^{-r/a}\frac{1}{iqr}\left(e^{-iqr}-e^{iqr}\right)$$

$$J=\frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty drre^{-r/a}\left(e^{iqr}-e^{-iqr}\right)=\frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty drr\left(e^{(iq-1/a)r}-e^{-(iq+1/a)r}\right)=\frac{2\pi}{iq}\left(I_1-I_2\right)\qquad(22.3)$$

حيث $I_1\equiv\int_0^\infty drre^{(iq-1/a)r}$ ، $I_2\equiv\int_0^\infty drre^{-(iq+1/a)r}$

نجري تكامل العلاقة I_1 بطريقة التجزئة: الخطوات التالية تشرح نفسها

$$I_1\equiv\int_0^\infty drre^{(iq-1/a)r}=\frac{re^{(iq-1/a)r}}{iq-(1/a)}\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{iq-(1/a)}\int_0^\infty dre^{(iq-1/a)r}=-\left[\frac{1}{iq-(1/a)}\right]\left(\frac{e^{(iq-1/a)r}}{iq-(1/a)}\right)_0^\infty=\frac{a^2}{(iaq-1)^2}$$

$$I_1=\frac{a^2}{(iaq-1)^2}\qquad(23.3)$$

بالمثل، حساب I_2 يفضي للعلاقة

$$I_2\equiv\int_0^\infty drre^{-(iq+1/a)r}=\frac{re^{-(iq+1/a)r}}{\left[-(iq+1/a)\right]}\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{\left[-(iq+1/a)\right]}\int_0^\pi dre^{-(iq+1/a)r}=\frac{1}{\left[(iq+1/a)\right]}\int_0^\infty dre^{-(iq+1/a)r}$$

$$I_2=\frac{a^2}{(iqa+1)^2}\qquad(24.3)$$

أدخل (I_1) و(I_2) في العلاقة (22.3)، فتصبح العلاقة

$$J=\frac{2\pi}{iq}\left(I_1-I_2\right)=\frac{2\pi}{iq}\left(\frac{a^2}{(iaq-1)^2}-\frac{a^2}{(iaq+1)^2}\right)\qquad(25.3)$$

يمكننا تبسيط العلاقة (25.3) فتصير

$$J=\frac{2\pi}{iq}\left(\frac{a^2}{(iaq-1)^2}-\frac{a^2}{(iaq+1)^2}\right)=\frac{2\pi a^2}{iq}\left(\frac{1}{iaq-1}+\frac{1}{iaq+1}\right)\left(\frac{1}{iaq-1}-\frac{1}{iaq+1}\right)$$

أو

$$J=\frac{2\pi}{iq}\left(\frac{a^2}{(iaq-1)^2}-\frac{a^2}{(iaq+1)^2}\right)=\frac{2\pi a^2}{iq}\left(-\frac{1}{1-iaq}+\frac{1}{1+iaq}\right)\left(-\frac{1}{1-iaq}-\frac{1}{1+iaq}\right)$$

ومنه

$$J=\frac{2\pi a^2}{iq}\left(\frac{1}{1-iaq}-\frac{1}{1+iaq}\right)\left(\frac{1}{1-iaq}+\frac{1}{1+iaq}\right)\equiv\frac{2\pi a^2}{iq}\frac{2iaq}{1+a^2q^2}\frac{2}{1+a^2q^2}=\frac{8\pi a^3}{\left(1+a^2q^2\right)^2}$$

وأخيرا نجد

$$J=\frac{8\pi a^3}{\left(1+a^2q^2\right)^2}\qquad(26.3)$$

إدخال النتيجة(26.3) في العلاقة(19.3)، تغدو العلاقة

$$T_i^{\,f} = \frac{4\pi e^2\hbar^2}{m_e^2 c a^3 k L^6}\left|\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2\left[\frac{8\pi a^3}{\left(1+a^2q^2\right)^2}\right]^2\delta\left(E_i-E_f\right)$$

وبعد بعض الترتيب والتعديل تصير العلاقة

$$T_i^{\,f} = \frac{256\,\pi^3 a^3 e^2\hbar^2}{m_e^2 c k L^6\left(1+a^2q^2\right)^4}\left|\vec{\in}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2\delta\left(E_i-E_f\right)$$

هكذا تمكنا من تعيين احتمال انتقال الجملة من الحالة الابتدائية (من إلكترون مقيد + فوتون إلى إلكترون طليق) خلال وحدة الزمن.

مقطع الكهرباء الضوئية (مقطع امتصاص فوتون وخروج إلكترون)

إن غاية هذا التطبيق هو إيجاد مقطع تصادم فوتون بإلكترون فيفضي إلى قلع الإلكترون، وهو المسمى مقطع الكهرباء الضوئية. وهو معرف عبر احتمال الانتقال خلال واحدة الزمن لكل إلكترون ضوئي بالعلاقة

$$\sigma_\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K = \frac{d^3n_K}{J_0}T_i^{\,f}D_{ii} \qquad (27.3)$$

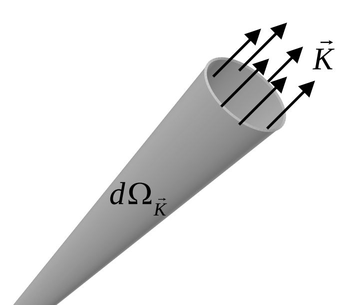
حيث J_0 يعرب عن كثافة تيار الفوتونات الوارد على المادة. وهو بالتعريف $J_0=\rho v$ ، و ρ هي كثافة الفوتونات و v سرعتها، هنا $v=c$ ، و ρ هنا عدد الفوتونات التي استقطابها σ وتنتشر وفق $\vec{k}$ وهي $\rho=\frac{n_{\sigma\vec{k}}}{L^3}$ ، سنعتبر فوتونا واحدا وارد ؛ $n_{\sigma\vec{k}}=1_{\sigma\vec{k}}$. من ثم

$$J_0 = \frac{c1_{\sigma\vec{k}}}{L^3} \equiv \frac{c}{L^3} \qquad (28.3)$$

و d^3n_K هو عدد الحالات الكمية المتاحة للإلكترون الضوئي الذي دفعه الخطي $\hbar\vec{K}$. ومعلوم أن العلاقة بين كثافة عدد الحالات الكمية d^3n_K و d^3K هي

$$d^3n_K = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3K = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dKK^2\,d\Omega_K \qquad (29.3)$$

وهو عدد الإلكترونات الضوئية التي نشأت بالدفعات $\hbar\vec{K}$ جراء تصادم الضوء بالمادة وخرجت بعد ذلك في الزاوية الصلبة $d\Omega_{\vec{K}}$ ، كما يبين الشكل (5). و D_{ii} هو احتمال الجملة في الحالة الابتدائية. يعني احتمال وجود الإلكترون مقيدا في الحالة S ، واحتمال وجود الفوتون ينتشر في اتجاه $\vec{k}$ بالاستقطاب σ . يعني في الحالة $\left|\Phi_i^P\right\rangle\left|1_{\sigma\vec{k}}\right\rangle$. لكن في المسألة قيد الدرس، قررنا أن حالة المادة هي الحالة الأساسية للذرة Z . وليس في مقدورنا معرفة حالة استقطاب الفوتون الوارد، بناء عليه نحتاج $D_{\sigma\sigma}$لتحديده. سنثير هذه النقطة عند الحاجة. إدخال كل النتائج في عبارة المقطع (27.3)، فتصبح



الشكل5: يبين تصادم فوتون بالمادة فامتصته وخروج إلكترون اثر ذلك في الزاوية الصلبة $d\Omega_{\vec{K}}$ بالدفع الخطي $\hbar\vec{K}$

$$\sigma_\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K=\frac{L^6}{(2\pi)^3 c}d^3K\,\frac{256\,a^3\pi^3e^2\hbar^2D_{\sigma\sigma}}{m^2ckL^6\left(1+a^2q^2\right)^4}\left|\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2\delta\left(E_i-E_f\right)$$

وبعد بعض الاختصارات والتعديل، يصير مقطع الكهرباء الضوئية لكل إلكترون ضوئي هو

$$\sigma_\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K=\frac{32a^3e^2\hbar^2d^3K}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\left|\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2D_{\sigma\sigma}\delta\left(E_i-E_f\right) \tag{30.3}$$

الجدير بالملاحظة أن المقطع مستقل عن أبعاد العلبة التي حصرت بها الجملة(مادة–إشعاع)، وهو ما ينبغي أن يكون.

واضح من عبارة المقطع أنها تشمل عددا كبيرا من المتغيرات. لذلك ينبغي أن نحدد المتغيرات التي نرغب في ظهورها في النتيجة النهائية. لذلك نغير المتغيرات التي لا نرغب في ظهورها. القاعدة التي تتحكم في كيفية تغييب المتغيرات هي " أن نأخذ القيمة المتوسطة للمتغيرات على الحالة التي ليست تحت رقابتنا، ونجمع المتغيرات على الحالة النهائية "

$$\sigma_\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K=\frac{32a^3e^2\hbar^2d^3K}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\left|\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}\right|^2D_{\sigma\sigma}\delta\left(E_i-E_f\right)$$

حيث $\vec{q}\equiv\vec{K}-\vec{k}$ وأن $\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{q}=\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\left(\vec{K}-\vec{k}\right)=\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{K}-\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{k}\equiv\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{K}$ وذلك بناء على المكيال

فإزالة المتغير σ يتم باعتبار القيمة المتوسطة على حالة الاستقطاب الابتدائي

$$\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K\equiv\frac{32a^3e^2\hbar^2d^3K}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\delta\left(E_i-E_f\right)\sum_{\sigma=1}^{\sigma=2}D_{\sigma\sigma}\left|\vec{\varepsilon}_{\sigma\vec{k}}\cdot\vec{K}\right|^2$$

ومنه العلاقة

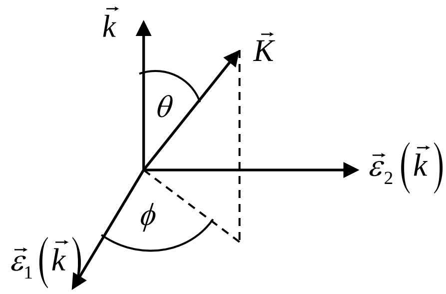
$$\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K\equiv\frac{32a^3e^2\hbar^2d^3K}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\delta\left(E_i-E_f\right)\left[D_{11}\left|\vec{\varepsilon}_{1\vec{k}}\cdot\vec{K}\right|^2+D_{22}\left|\vec{\varepsilon}_{2\vec{k}}\cdot\vec{K}\right|^2\right] \tag{31.3}$$

مع اعتبار الخاصية $TrD=1$

$$\sum_\sigma D_{\sigma\sigma}=1=D_{11}+D_{22} \tag{32.3}$$

حيث D_{11} هو احتمال وجود الفوتون في حالة الاستقطاب 1، كما أن D_{22} هو احتمال وجود الفوتون في حالة الاستقطاب 2. ليس هناك ما يميز استقطاب على الآخر، وبالتالي $D_{11} = D_{22} = 50\% = \frac{1}{2}$. بناء عليه

$$\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K \equiv \frac{16a^3e^2\hbar^2d^3K}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\delta\left(E_i - E_f\right)\left[\left|\vec{\varepsilon}_{1\vec{\varepsilon}_{1\vec{k}}}\cdot\vec{K}\right|^2 + \left|\vec{\varepsilon}_{2\vec{k}}\cdot\vec{K}\right|^2\right] \qquad (33.3)$$



الشكل6: يوضح كيفية الجمع على الاستقطاب

بالاستعانة بالشكل (6)، يكون الجمع كما يلي

$$\left|\vec{\varepsilon}_1\left(\vec{k}\right)\cdot\vec{K}\right|^2 + \left|\vec{\varepsilon}_2\left(\vec{k}\right)\cdot\vec{K}\right|^2 = K^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + K^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = K^2\sin^2\theta$$

نعوض ذلك في العلاقة(33.3)، فيصير مقطع الكهرباء الضوئية

$$\sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K = \frac{16a^3e^2\hbar^2d^3K\ K^2\sin^2\theta}{m^2c^2k\left(1+a^2q^2\right)^4}\delta\left(E_i - E_f\right) \qquad (34.3)$$

الجدير بالملاحظة أن الزاوية θ هي الزاوية المحصورة بين اتجاه ورود الفوتون واتجاه خروج الإلكترون الضوئي؛ بين $\vec{k}$ و $\vec{K}$. وهي موجودة أيضا في عبارة الشعاع $\vec{q} \equiv \vec{K} - \vec{k}$ ، حيث

$$q^2 = \left|\vec{K} - \vec{k}\right|^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\theta$$

إن مقطع الكهرباء الضوئية المتمثل في العلاقة(34.3) يتعلق بثلاثة متغيرات: بالدفع الخطي للإلكترون $\hbar\vec{K}$ أو بطاقته $E_{\vec{K}} = \hbar^2K^2/2m$ ، وبالدفع الخطي للفوتون $\hbar\vec{k}$ أو بطاقة $\hbar ck = \hbar\omega$ ، والزاوية θ بين الفوتون الوارد والإلكترون الضوئي الصادر. نود إزالة المتغير K من عبارة المقطع لعدم الاهتمام بتعلقه به. هذا سيتم بالتكامل المقطع على المتغير K أو على الطاقة E_K . يستحسن إجراء التكامل على E_K لظهوره في دالة ديراك. لذلك نصوغ المقطع (34.3) بدلالة الطاقة E_K . فنلاحظ أن

$$dK = \frac{\sqrt{2m}\ dE}{2\hbar\sqrt{E}} \quad ، \quad K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad ، \quad E_K = \frac{\hbar^2K^2}{2m} \equiv E$$

وبإظهار طاقة الإلكترون بدل K في مقطع الكهرباء الضوئية(34.3)

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;E,\hat{\Omega}_K\right)dE\,d\Omega_K \equiv \sigma\left(\vec{k},\vec{K}\right)d^3K \text{ ، حيث } \hat{\Omega}_k \equiv \frac{\vec{k}}{k} \text{ ، } \hat{\Omega}_K \equiv \frac{\vec{K}}{K} \text{ وأن } d^3K = K^2dK\,d\Omega_K \qquad (35.3)$$

$$q^2 = \left|\vec{K} - \vec{k}\right|^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\theta = 2mE/\hbar^2 + k^2 - 2k\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\theta$$

نعوض كل ذلك في العلاقة(34.3)، فتصير

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;E,\hat{\Omega}_K\right)dE\,d\Omega_K \equiv \frac{16a^3e^2\hbar^2\left(2mE/\hbar^2\right)^2\left(\sqrt{2m}dE/2\hbar\sqrt{E}\right)\sin^2\theta\ d\Omega_K}{m^2c^2k\left(1+a^2\left(\frac{2mE}{\hbar^2}+k^2-2k\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\theta\right)\right)^4}\delta\left(\hbar\omega-|E_a|-E\right)$$

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;E,\hat{\Omega}_K\right)dE\,d\Omega_K \equiv \frac{8a^3e^2\left(2m\right)^2\sqrt{2m}E\sqrt{E}dE\sin^2\theta\ d\Omega_K}{m^2c^2\hbar^3k\left(1+a^2\left(\frac{2mE}{\hbar^2}+k^2-2k\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cos\theta\right)\right)^4}\delta\left(\hbar\omega-|E_a|-E\right) \qquad (36.3)$$

لقد بينا إشارة طاقة الإلكترون المقيد صراحة؛ بكتابة $E_a=-|E_a|$. والآن قد هيأنا عبارة المقطع لمكملتها على طاقة الإلكترون الضوء. فهو من الصورة

$$\int dE\,G(E)\delta\left(\hbar\omega-|E_a|-E\right)=G\left(\hbar\omega-|E_a|\right)$$

وعليه تكامل العلاقة(36.3) يفضي للعلاقة

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)d\Omega_K \equiv \frac{8a^3e^2\left(2m\right)^2\sqrt{2m}\left(\hbar\omega-|E_a|\right)^{3/2}\sin^2\theta\ d\Omega_K}{m^2c^2\hbar^3k\left(1+a^2\left(\frac{2m\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}{\hbar^2}+k^2-2k\frac{\sqrt{2m\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}}{\hbar}\cos\theta\right)\right)^4} \qquad (37.3)$$

نذكر بأن العلاقة بين الوسيط a وطاقة الربط$|E_a|$هي

$$a\equiv\frac{\hbar}{\sqrt{2m|E_a|}} \qquad ، \qquad a^2\equiv\frac{\hbar^2}{2m|E_a|}$$

وحملها في العلاقة(37.3)، يفضي إلى العلاقة

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)d\Omega_K \equiv \frac{8e^2\frac{\left(2m\right)^2}{2m\sqrt{2m}}\sqrt{2m}\left(\frac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta\ d\Omega_K}{m^2c^2k\left(1+\frac{\hbar^2}{2m|E_a|}\left(\frac{2m\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}{\hbar^2}+k^2-2k\frac{\sqrt{2m\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}}{\hbar}\cos\theta\right)\right)^4}$$

أو

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)d\Omega_K \equiv \frac{16me^2\left(\frac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta\ d\Omega_K}{m^2c^2k\left(1+\frac{\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}{|E_a|}+\frac{\hbar^2k^2}{2m|E_a|}-\frac{k\hbar}{m|E_a|}\sqrt{2m\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}\cos\theta\right)^4} \qquad (38.3)$$

وبعد تعديل، تصبح

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)d\Omega_K \equiv \frac{16\dfrac{\hbar e^2}{mc}\left(\dfrac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta\; d\Omega_K}{\hbar\omega\left(\dfrac{\hbar\omega}{|E_a|}+\dfrac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2|E_a|}-\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\dfrac{mc^2}{|E_a|}\dfrac{(\hbar\omega-|E_a|)}{|E_a|}}\cos\theta\right)^4} \tag{39.3}$$

التوزيع الزاوي $\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)$

أحد النتائج الهامة التي توصلنا إليها هي التوزيع الزاوي لتصادم الفوتون بالإلكترون وهو الدالة

$$\sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)\equiv\sigma(\hbar\omega,\theta)=\frac{16\dfrac{\hbar e^2}{mc}\left(\dfrac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta}{\hbar\omega\left(\dfrac{\hbar\omega}{|E_a|}+\dfrac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2|E_a|}-\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\dfrac{mc^2}{|E_a|}\dfrac{(\hbar\omega-|E_a|)}{|E_a|}}\cos\theta\right)^4} \tag{40.3}$$

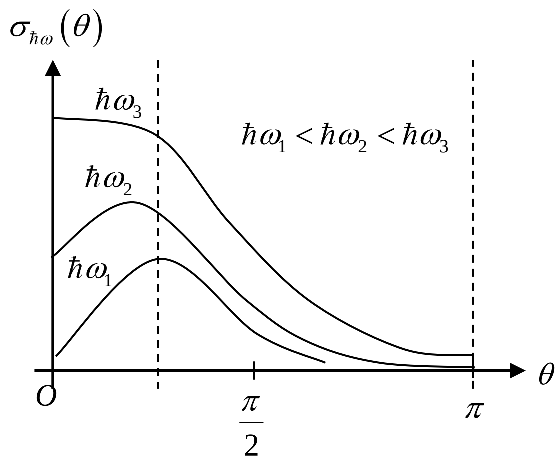
يمكننا عرضه بطريقة مضغوطة على النحو

$$\sigma(\hbar\omega,\theta)=\frac{16\dfrac{\hbar e^2}{\hbar\omega mc}\left(\dfrac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta}{\left(\dfrac{\hbar\omega}{|E_a|}+\dfrac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2|E_a|}-\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\dfrac{mc^2}{|E_a|}\dfrac{(\hbar\omega-|E_a|)}{|E_a|}}\cos\theta\right)^4}\equiv\frac{\Lambda\sin^2\theta}{(A-B\cos\theta)^4} \tag{41.3}$$

حيث

$$B\equiv\frac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\frac{mc^2}{|E_a|}\frac{(\hbar\omega-|E_a|)}{|E_a|}} \quad،\quad A\equiv\frac{\hbar\omega}{|E_a|}+\frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2|E_a|} \quad،\quad \Lambda\equiv16\frac{\hbar e^2}{\hbar\omega mc}\left(\frac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}$$

الفائدة التين نجنيها من التوزيع الزاوي $\sigma(\hbar\omega,\theta)$ هي كيفية خروج الناتج، هنا الإلكترونات الضوئية، بالنسبة الاتجاه القذائف، هنا أضواء. وعليه نرسم منحنيات بدلالة θ من أجل طاقات محددة، كما يبين الشكل(7).



الشكل7: مثال افتراضي لفوائد التوزيع الزاوي، يبين ثلاثة منحنيات افتراضية لثلاثة طاقات مختلفة.

يبين الشكل(7) الرسم البياني للتوزيع الزاوي الظاهر في العلاقة(41.3) نتيجة تأثير الضوء على المادة. وهو أحد غايات التطبيق قيد الدرس. فرسم المقطع بدلالة الزاوية من أجل طاقات مختلفة. في هذه الحال يبين الشكل(7) أن خروج الناتج أعظمي عند 45°. وكلما زادت طاقة القذائف زاد خروج الناتج إلى الأمام؛ يعني $\theta \approx 0$. ويلاحظ أن خروج الناتج إلى الخلف تافه. هذه المعلومات يتضمنها التوزيع الزاوي $\sigma(\hbar\omega,\theta)$ وهي فوائد جمّة.

مقطع الكهرباء الضوئية $\sigma(\hbar\omega)$

مقطع الكهرباء الضوئية هو

$$\int \sigma\left(k,\hat{\Omega}_k;\hat{\Omega}_K\right)d\Omega_K = \sigma(\hbar\omega) = \int \frac{16\dfrac{\hbar e^2}{mc}\left(\dfrac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\sin^2\theta\ d\Omega_K}{\hbar\omega\left(\dfrac{\hbar\omega}{|E_a|}+\dfrac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2|E_a|}-\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\dfrac{mc^2}{|E_a|}\dfrac{\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}{|E_a|}}\cos\theta\right)^4} \qquad (42.3)$$

أو على صورة مضغوطة

$$\sigma(\hbar\omega) = 2\pi\int d\theta\frac{\Lambda\sin^3\theta}{(A-B\cos\theta)^4} = 2\pi\,\Lambda\int d\theta\frac{\sin^3\theta}{(A-B\cos\theta)^4} = 2\pi\,\Lambda\ S \qquad (43.3)$$

حيث

$$S = \int d\theta\frac{\sin^3\theta}{(A-B\cos\theta)^4} \equiv \int_{-1}^{1} d\eta\frac{1-\eta^2}{(A-B\eta)^4} \qquad (44.3)$$

نجري هذا التكامل بالتجزئة، لذلك نهيئه على المنوال

$$S \equiv \int_{-1}^{1} d\eta\frac{1-\eta^2}{(A-B\eta)^4} = -\frac{1}{B}\int_{-1}^{1} d(A-B\eta)\frac{1-\eta^2}{(A-B\eta)^4} = -\frac{1}{B}\int_{-1}^{1}\frac{d(A-B\eta)}{(A-B\eta)^4}\left(1-\eta^2\right)$$

من ثم

$$S = -\frac{1}{B}\int_{-1}^{1}\frac{d(A-B\eta)}{(A-B\eta)^4}\left(1-\eta^2\right) = -\frac{1}{B}\left[\left.\frac{1-\eta^2}{-3(A-B\eta)^3}\right|_{-1}^{1} - \frac{1}{-3}\int_{-1}^{1}\frac{d\left(1-\eta^2\right)}{(A-B\eta)^3}\right] = \frac{2}{3B}\int_{-1}^{1}\frac{\eta d\eta}{(A-B\eta)^3}$$

والتكامل بالتجزئة مرة ثانية يفضي للعلاقة، الخطوات التالية تشرح نفسها

$$S = \frac{2}{3B}\int_{-1}^{1}\frac{\eta d\eta}{(A-B\eta)^3} = -\frac{2}{3B^2}\int_{-1}^{1}\frac{\eta d(A-B\eta)}{(A-B\eta)^3} = -\frac{2}{3B^2}\left[\left.\frac{\eta}{-2(A-B\eta)^2}\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{(A-B\eta)^2}\right]$$

من ثم

$$S=-\frac{2}{3B^2}\left[\frac{\eta}{-2\left(A-B\eta\right)^2}\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{\left(A-B\eta\right)^2}\right]=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{1}{\left(A-B\right)^2}+\frac{1}{\left(A+B\right)^2}-\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{\left(A-B\eta\right)^2}\right]$$

ومنه

$$S=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{1}{\left(A-B\right)^2}+\frac{1}{\left(A+B\right)^2}+\frac{1}{B}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{d\left(A-B\eta\right)}{\left(A-B\eta\right)^2}\right\}\right]$$

$$S=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{1}{\left(A-B\right)^2}+\frac{1}{\left(A+B\right)^2}+\frac{1}{B}\left\{-\frac{1}{A-B\eta}\right\}_{-1}^{1}\right]=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{1}{\left(A-B\right)^2}+\frac{1}{\left(A+B\right)^2}+\frac{1}{B}\left\{-\frac{1}{A-B}+\frac{1}{A+B}\right\}\right]$$

حيث

$$\left\{-\frac{1}{A-B}+\frac{1}{A+B}\right\}=\frac{1}{A+B}-\frac{1}{A-B}=\frac{-2B}{A^2-B^2}$$

$$S=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{1}{\left(A-B\right)^2}+\frac{1}{\left(A+B\right)^2}-\frac{2B}{B\left(A^2-B^2\right)}\right]=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{\left(A+B\right)^2+\left(A-B\right)^2}{\left(A-B\right)^2\left(A+B\right)^2}-\frac{2}{\left(A^2-B^2\right)}\right]$$

$$S=\frac{1}{3B^2}\left[\frac{2\left(A^2+B^2\right)}{\left(A^2-B^2\right)^2}-\frac{2}{\left(A^2-B^2\right)}\right]=\frac{2}{3B^2}\left[\frac{\left(A^2+B^2\right)}{\left(A^2-B^2\right)^2}-\frac{1}{\left(A^2-B^2\right)}\right]$$

$$S=\frac{2}{3B^2\left(A^2-B^2\right)}\left[\frac{\left(A^2+B^2\right)}{\left(A^2-B^2\right)}-1\right]=\frac{2}{3B^2\left(A^2-B^2\right)}\left[\frac{\left(A^2+B^2\right)-\left(A^2-B^2\right)}{\left(A^2-B^2\right)}\right]$$

$$S=\frac{2}{3B^2\left(A^2-B^2\right)}\left[\frac{\left(A^2+B^2\right)}{\left(A^2-B^2\right)}-1\right]=\frac{2\left(2B^2\right)}{3B^2\left(A^2-B^2\right)^2}=\frac{4}{3\left(A^2-B^2\right)^2}$$

$$S=\frac{4}{3\left(A^2-B^2\right)^2} \tag{45.3}$$

نعوض العلاقة(44.3) في العلاقة(43.3)، فنحصل على العلاقة

$$\sigma\left(\hbar\omega\right)=2\pi\Lambda S=2\pi\Lambda\frac{4}{3\left(A^2-B^2\right)^2}=\frac{8\pi\Lambda}{3\left(A^2-B^2\right)^2} \tag{46.3}$$

ثم نعوض عن Λ ، A ، Bفي العلاقة(46.3)، فنحصل على العلاقة

$$\sigma\left(\hbar\omega\right)=\frac{8\pi\left[16\frac{\hbar e^2}{\hbar\omega mc}\left(\frac{\hbar\omega-|E_a|}{|E_a|}\right)^{3/2}\right]}{3\left(\left[\frac{\hbar\omega}{|E_a|}+\frac{\left(\hbar\omega\right)^2}{2mc^2|E_a|}\right]^2-\left[\frac{\hbar\omega}{mc^2}\sqrt{2\frac{mc^2}{|E_a|}\frac{\left(\hbar\omega-|E_a|\right)}{|E_a|}}\right]^2\right)^2} \tag{47.3}$$

أو العلاقة

$$E_0\equiv 13.6\,eV \quad \text{،} |E_a|=Z^2E_0 \qquad \text{،} \sigma\left(\hbar\omega\right)=\frac{128\pi|E_a|^{5/2}\frac{\hbar e^2}{mc}\left(\hbar\omega-|E_a|\right)^{3/2}}{3\left(\left(1-\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\right)^2+2\frac{|E_a|}{mc^2}\right)^2\hbar^5\omega^5} \tag{48.3}$$

من ثمّ العلاقة

$$\sigma(\hbar\omega)=\frac{128\pi\frac{\hbar e^2}{mc}\left|E_0\right|^{5/2}Z^5\left(\hbar\omega-\left|E_a\right|\right)^{3/2}}{3\left(\left(1-\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\right)^2+2\frac{\left|E_a\right|}{mc^2}\right)^2\hbar^5\omega^5} \tag{49.3}$$

هذا هو مقطع الكهرباء الضوئية المنشود.

- ارسمها بدلالة طاقة الفوتون $\hbar\omega$ وناقشها.
- قارنها مع النتائج الحسارية (إن وجدت) ونتائج التجريبية.
- على ضوء ما لمسته من الحساب الذي قمت به، والنتائج التجربة، اعطي رأيك في المقاربة التي اعتمدت.
- ناقش النتيجة النظرية (49.3) بالنتيجة المخبرية أدناه، احداهما على المادة Xe: Z=54 ًّ، والمادة W:Z=74 .