مقياس رياضيات 4 خاص بـالسنة الثانية (هندسة ميكانيكية+ ري + هندسة مدنية + أشغال عمومية)

قابلية اشتقاق تابع عقدي:

- نقول عن تابع عقدي f إنه قابل للاشتقاق عند النقطة z_0 من داخل منطقة ما اذا كانت النهاية

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{أو} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

موجودة ومحدودة . ونرمز للنهاية في حال وجودها بـ $f'(z_0)$ أو $\frac{df}{dz}(z_0)$.

- نقول عن تابع عقدي إنه قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة $A \subseteq C$ اذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من A ويسمى التابع الذي يقرن كل نقطة z من A بـ النهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

بالتابع المشتق للتابع f ونرمز له ب f' او $\frac{df}{dz}$.

مثال: إذا كانت $f(z)=z^2$ فإن :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2-{z_0}^2}{z-z_0}=2z_0$$

نلاحظ أن هــذه الدالة قابلة للاشتقاق في جميع النقاط . فعلى سبيل المثال

$$f'(-\sqrt{2}i)=-2\sqrt{2}\,i \ ، \ f'(3)=6 \ ، \ f'(3-2i)=6-4i$$

مثال: . إذا كانت $f(z)=\bar{z}$ فإن

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}}{z}$$

وهــذه النهاية غير موجودة(لماذا؟) لذا تكون الدالة $f(z)=\bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق عندما $z_0=0$.

ملاحظة: عادة ما تستخدم الرموز التالية للتعبير عن مشتقة الدالة :

$$\frac{df}{dz},\ \frac{dw}{dz},\ Df$$

ملاحظة : ان الصيغة $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ تعبر عنم مشتقة الدالة في أي نقطة اختيارية z .

مثال : اذا كانت $f(z)=z^2$ فإن $f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=2z$

قواعد الاشتقاق (Differentiation Rules):

كما أسلفنا فإن هناك الكثير من القواعد التي يمكن تعميمها من التحليل الحقيقي إلى التحليل المركب حتى أنه وفي كثير من الأحيان يكون الإثبات هو نفسه . من هذه القواعد قواعد الاشتقاق التالية:

$$1.\ \frac{d}{dz}c=0;$$

$$2.\ \frac{d}{dz}z^r=rz^{r-1}\qquad \forall r\in R;$$

$$3.\ \frac{d}{dz}[f(z)\pm g(z)]=\frac{df}{dz}\pm\frac{dg}{dz}$$

$$4.\ \frac{d}{dz}[f(z)g(z)]=g\frac{df}{dz}+f\frac{dg}{dz}$$

$$5.\ \frac{d}{dz}[f(z)/g(z)]=\frac{\frac{d}{dz}f(z)g(z)-f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{g^2(z)}$$

صيغ كوشي ـ ريمان (Cauchy-Riemann Equations):

في هذا الجزء سندرس شروط تفاضل الدوال المعطاة على الشكل :

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

وسنحصل علىالشرط الضروري والكافي لقابلية التفاضل والذي يتطلب دراسة بسيطة للمشتقات الجزئية v_x,v_y,u_y,u_x مما يسهل اختبار قابلية التفاضل لهذه الدالة .

نظرية (الشرط الضروري) : إذا كانت $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ وكانت $f'(z_0)$ موجودة في النقطة $z_0=(x_0+iy_0)$. فإن المشتقات الجزئية v_x,v_y,u_y,u_x يجب أن تكون موجودة في النقطة (x_0,y_0) وتحقق معادلات كوشي – ريمان التالية :

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

في هذه النقطة . كما أن $f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$.

مثال: إذا كانت $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ فإن شروط كوشي – ريمان $u_y=-v_x, u_x=v_y$ تتحقق في جميع النقاط لذلك

$$f^{/}(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=e^x(\cos y+i\sin y)$$

أي أن

$$f^{/}(z_0)=f(z)$$

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z)=\overline{z}$ قابلة للاشتقاق.

الحل:

بما أن

$$f(z)=\overline{z}=x-iy$$

فإن

$$v_x=0\ ,\ v_y=-1\ ,\ u_y=0\ ,\ u_x=1$$

لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق في أي من النقاط وعليه تكون المشتقة $f^{/}(z)$ غير موجودة.

مبرهنة : ليكن $f=u+vi$ تابع عقدي و $z_0=x_0+iy_0$ نقطة من **داخل** منطلق f .

يكون f قابل للاشتقاق عند z_0 $\Leftrightarrow$

1) v,u قابلان للاشتقاق التام عند (x_0,y_0)

2) v,u يحققان شرطي كوشي – ريمان عند (x_0,y_0) أي :

$$u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \quad \text{و} \quad u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$$

مبرهنة : ليكن $f=u+vi$ قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة $A\subseteq C$ اذا وفقط اذا تحقق الشرطان

1) v,u قابلان للاشتقاق التام على A

2) v,u يحققان شرطي كوشي ريمان على A أي

$$u_y=-v_x \quad \text{و} \quad u_x=v_y \quad : \quad \forall(x,y)\in A$$

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z)=\operatorname{Re} z$ قابلة للاشتقاق.

الحل: بما أن $f(z)=x+i0$ فإن $v_x=0\ ,\ v_y=0\ ,\ u_y=0\ ,\ u_x=1$
لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق في أي من النقاط وعليه تكون المشتقة $f'(z)$ غير موجودة.

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z)=|z|^2$ قابلة للاشتقاق.

الحل: بما أن $f(z)=(x^2+y^2)+i0$ فإن

$$v_x=0\ ,\ v_y=0\ ,\ u_y=2y\ ,\ u_x=2x$$

لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق إلا في نقطة واحدة وهي $z=(0,0)$. وبناءً على ذلك نجد أن $f'(0)=0$.

التابع التوافقي

نقول عن **تابع حقيقي** $u(x,y)$ لـ متحولين حقيقين إنه توافقي على مجموعة مفتوحة $A\subseteq R^2$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

- u من الصف C^2 على A
- أن يحقق u معادلة لابلاس على A أي:

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0\quad :\quad \forall(x,y)\in A$$

إن الصف C^n على مجموعة Aهو صف التوابع التي لها مشتقات جزئية حتى المرتبة n و هذه المشتقات **مستمرة** على A
(كحالة خاصة هنا n=2)

مبرهنة $f=u+vi$ تحليلي على مجموعة مفتوحة $A\subseteq C$ يقتضي أن u,v توافقيان على $A\subseteq R^2$.

نتيجة : اذا كان أحد الجزأين –الحقيقي أو التخيلي - للتابع العقدي على الأقل غير توافقي على مجموعة مفتوحة A فإن f لن يكون تحليلياً على A .

ملاحظة : العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة بمعنى أخر أنه قد يكون كل من الجزء الحقيقي والتخيلي لـ تابع عقدي توافقيين ولا يكون التابع تحليلياً .

مثال : $f(z) = x^2 - y^2 - 2xyi$

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = -2xy$$

من الواضح أن u من الصف C^2 على $\mathbb{R}^2$ (له مشتقات جزئية حتى المرتبة الثانية على $\mathbb{R}^2$ و مستمرة عليها)
و معادلة لابلاس:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \qquad (*)$$

$$u_x = 2x \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = 2$$

$$u_y = -2y \quad \Rightarrow \quad u_{yy} = -2$$

نعوض في $*$ نجد أن $\Delta u = 2 - 2 = 0$ وبالتالي u توافقي على $\mathbb{R}^2$ ومن جهة أخرى

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \qquad *$$

$$v_x = -2y \quad \Rightarrow \quad v_{xx} = 0$$

$$v_y = -2x \quad \Rightarrow \quad v_{yy} = 0$$

نعوض في $*$ نجد أن $\Delta v = 0 - 0 = 0$ وبالتالي v توافقي على $\mathbb{R}^2$
ولكن: لنلاحظ أن $\{u_x = v_y \Leftrightarrow 2x = -2x \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; u_y = -v_x \Leftrightarrow y = 0\}$
و بالتالي هو غير تحليلي لأنه قابل للاشتقاق فقط عند نقطة واحدة .

- **تساؤل :** نعلم انه اذا كان تابع عقدي $f = u + vi$ قابلاً للشتقاق على مجموعة مفتوحة A فإن اشتقاقها يعطى بـ أحد مساوتان التاليتان

$$f'(z) = u_x - u_y i$$
$$f'(z) = v_y + v_x i$$

هل هذا يعني أن معرفتنا للجزء الحقيقي (التخيلي) فقط لتابع عقدي كافياً لمعرفة التابع العقدي ؟؟

- في الحقيقية إن الإجابة على هذا التساؤل هي (نعم) ذلك لأنه إذا كان v الجزء التخيلي لـ تابع عقدي f معلوم نرى انه إن كان للجملة

$$\begin{cases} u_y = -v_x \\ u_x = v_y \end{cases}$$

حلاً على مجموعة مفتوحة من R^2 فإنه بحل هذه الجملة نحصل على u و من ثم نحصل على التابع f

تمرين : هل يمكن للتابع $u = e^x \cos y$ أن يكون جزء حقيقياً لتابع تحليلي على C ؟؟

الحل

لإيجاد تابعاً تحليلاً يقبل u كجزء حقيقي له لنلاحظ أولاً أن u من الصف C^2 على R^2 لأن لـ u مشتقات جزئية حتى المرتبة الثانية مستمرة على R^2

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_{xx} = e^x \cos y$$
$$v_y = e^x \sin y \quad , \quad v_{yy} = -e^x \cos y$$
$$\Longrightarrow \Delta u = 0$$

ومنه فإن u توافقي على R^2
لايجاد التابع تحليلي على C يقبل $u = e^x \cos y$ جزء حقيقي له نبحث عن حل الجملة التالية

$$v_x = -u_y \quad و \quad v_y = u_x$$
$$v_x = e^x \sin y \quad (1) \quad , \quad v_y = e^x \cos y \quad (2)$$

لنوجد حل المعادلتين من 1 نجد أن

$$v = \int e^x \sin y \ dx$$

فإن

$$v = e^x \sin y + g(y)$$
$$\Longrightarrow v_y = e^x \cos y + \frac{dg(y)}{dy}$$

وبمقارنة هذه المعادلة ب 2 نجد أن

$$e^x \cos y + \frac{dg}{dy} = e^x \cos y$$
$$\frac{dg(y)}{dy} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = c$$

حيث c ثابت حقيقي كيفي اختياري

$$\Longrightarrow v = e^x \sin y + c$$

وجميع التوابع التحليلية التي تقب u جزءاً حقيقياً هي من الشكل

$$f(z) = e^x \cos y + (e^x \sin y + c)i$$

توابع تحليلية على C يقبل $u = e^x \cos y$ جزء حقيقي له وهل يحقق شرط $f(0) = i$ ؟؟

لا يوجد تابع يحقق شرط $f(0)$

مثال: إذا علمت أن الدالة $f(z) = (x^2 - y^2) + iv(x, y)$ تحليلية فأوجد الدالة $v(x, y)$.

الحـــــل: بمـــــا أن $u=(x^2-y^2)$ فـــــإن $u_x=2x=v_y$ و
$u_y=-2y=-v_x$ ومن هنا نجد أن $v_y=2x$ و $v_x=2y$
عندها وبحل المعادلة الأولى نحصل على $v=2xy+h(x)$
وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن $2y+h'(x)=2y$ إذن
$h'(x)=0$ أي أن $h(x)=c$ إذن $v(x,y)=2xy+c$

وعليه تكون
$$f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+c).$$

مثال ا

اوجد المرافق التوافقي للدالة $u=x^3-3xy^2+y$.

الحل

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$$

ومنها نحصل على

$$v=3x^2y-y^3=g(x)$$

ومن معادلة كوشي الثانية نجد أن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+g'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy-1$$

وبالتالي فإن $g(x)=-x+C$. وعليه تكون الدالة على الصورة

$$f(z)=\left(x^3-3xy^2+y\right)+i\left(3x^2y-y^3-x\right)+C$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$f(z)=(x^3-iy^3-3xy^2+3ix^2y)-i(x+iy)+C=z^3-iz+C$$

التوابع العقدية المألوفة

1- **كثير الحدود العقدي :**

هو تابع قاعدة ربطه $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

حيث $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ ثوابت عقدية.

و أنّ توابع كثيرات الحدود العقدية **تحليلية** على $\mathbb{C}$.

تحليلي ==> اشتقاقي ==>مستمر==> معرف فكثير الحدود العقدي معرف على C

2- **التوابع الكسرية العقدية :**

هي توابع قاعد ربطها من الشكل $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث $P(z), Q(z)$ كثيرات حدود عقدية و هو تحليلي على المجموعة $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$

3- **التابع الأسي العقدي :**

من المعلوم لدينا في التحليل الحقيقي أن $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ لأجل كل $x \in R$

لنستبدل المتحول الحقيقي x بالمتحول العقدي z في المتسلسلة فنحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

و قد درسنا في مقرر التحليل العقدي (1) أن هذه المتسلسلة متقاربة بإطلاق على كامل المستوي العقدي ((أي نصف قطر تقاربها $+\infty$)) و بالتالي يكون التابع الممثل بهذه المتسلسلة و الذي سنرمز له بـ e^z سيكون تحليلي على $\mathbb{C}$ حسب مبرهنة سابقة ، أي أنّ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow (e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \underset{n \leftrightarrow n+1}{\underbrace{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

أي أن التابع الأسي يساوي مشتقه.

طويلة التابع الأسي العقدي و زاويته:

إن طويلة العدد العقدي هي :

$$|e^z| = e^x = e^{Rez} > 0 \quad : \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow e^z \neq 0 \quad : \quad \forall z \in C$$

هذا يعني أن معادلة $e^z = 0$ مستحيلة

أما زاوية التابع الأسي العقدي : $\quad arg\, e^z = y$

فمثلاً $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$ (أي أن طويلة العدد العقدي e^{iz} هي الجزء الحقيقي للأس)

تمرين : أثبت أن التابع الأسي العقدي تحليلي على C باستخدام معادلتي كوشي ريمان .

لدينا

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$u = e^x \cos y \qquad \text{الجزء الحقيقي}$$

$$v = e^x \sin y \qquad \text{الجزء التخيلي}$$

بما أننا أوجدنا القسم الحقيقي والتخيلي أصبح من السهل استخدام كوشي ريمان :

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$
$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

فنلاحظ أن معادلتي كوشي ريمان محققتين على $\mathbb{C}$ و منه التابع الأسي العقدي تحليلي على $\mathbb{C}$

مثال : حل المعادلة $e^{iz} = -1 + i\sqrt{3}$

$$e^{i(x+iy)} = \left[\underbrace{\left|-1 + i\sqrt{3}\right|}_{\text{طويلة}}, \underbrace{Arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right)}_{\text{زاوية}}\right]$$
$$e^{-y+ix} = \left[2, Arctan\left(-\sqrt{3}\right)\right]$$
$$[e^{-y}, x] = \left[2, Arc\tan\left(-\sqrt{3}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow [e^{-y}, x] = \left[2, -\frac{\pi}{3} + \pi\right]$$
$$\Leftrightarrow e^{-y} = 2 \quad , \quad x_k = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$
$$\Leftrightarrow z_k = x_k + iy = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k + i(-ln2)$$

و هي مجموعة حلول المعادلة الأسية (كل قيمة صحيحة لـ k تقابل حلاً للمعادلة المعطاة)

تابع اللوغارتم العقدي

تعريف : نقول عن عدد عقدي b انه لوغارتم لعدد عقدي غير معدوم a ونكتب $b = log\ a$.

إذا وفقط إذا كان : $e^b = a$.

ملاحظة :

- $log(0)$ غير معرف
- اذا كان $b = log\ a$ فإن $k \in \mathbb{Z}$: $b + 2\pi ki = log\ (a)$

أي أن لـ Log عدد عقدي غير المعدوم عدد غير منته من القيم و لـ برهان ذلك

$$e^{b+2\pi ki} = e^b = a$$

$$\ln a = b + 2\pi ki : \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

التابع اللوغارتمي : نعرف التابع اللوغارتمي الذي يقرن كل z من $\mathbb{C}^*$ بلوغارتمه أي أن

$$log\ :\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$

$$z \to w = Log\ z$$

من الواضح هنا أن هذا التابع متعدد القيم بل أنه لانهائي القيم .

مثال أوجد $\ln(1+i)$.

الحل

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi n)$$

نوجد أولاً r و θ حيث $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ و $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ وذلك لأن العدد يقع في الربع الاول.

والآن يكون

$$\ln(1+i) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi n)$$

التوابع المثلثية العقدية :

تعرف هذه الدوال بالعلاقات الآتية :

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad , \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

هذه العلاقات لا ترتبط بالمثلث كما في حالة المتغير الحقيقي حيث z عدد مركب ومع ذلك فإنها تعطى متطابقات مشابهة تماما للمتطابقات الهندسية (المثلثية) في الحالة الحقيقية .

نلاحظ أن الدوال السابقة هي دوال دوريه فمثلا كل من الدالتين $\cos z$, $\sin z$ دوريه دورتها 2π أي

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

ملاحظة : توجد بعض الفروق عن المتغير الحقيقي

١ ـنعلم مثلا :

$$|\sin x| \leq 1 \quad , \quad |\cos x| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

في حين أنه في مجال الأعداد المركبة من الممكن أن يكون

$$|\sin x| \to \infty \quad , \quad |\cos x| \to \infty$$

ثانيا : الدوال الزائدية المركبة :

Hyperbolic functions

تعرف الدوال الزائدية المركبة تماما كما في الحقيقي بالعلاقات الآتيه :

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad , \quad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad ,\ldots$$

وتصح هنا جميع المتطابقات المعروفة التي تحقق نظيراتها في المجال الحقيقي على سبيل المثال :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

ولكن في المجال المركب نلاحظ أنه يوجد ارتباط بين الدوال الزائدية المثلثية المركبة والدوال الزائدية المركبة كالآتي :

$$\sin(iz) = i\sinh z \quad , \quad \cos(iz) = \cosh z \quad , \quad \tan(iz) = i\tanh z$$

$$\sinh(iz) = i\sin z \quad , \quad \cosh(iz) = \cos z \quad , \quad \tanh(iz) = i\tan z$$

مثال حل المعادلة : $\cos(z) = 2$

الحل:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

نضع : $w = e^{iz},$ فنجد

$$w + \frac{1}{w} = 4,$$
$$w^2 - 4w + 1 = 0.$$

إذن

$$w = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

و منه $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i2\pi k}$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

إذن

$$\log e^{iz} = \log[(2 \pm \sqrt{3})e^{i2\pi k}]$$

$$z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k.$$

مثال:

اثبت أن $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

الحل :

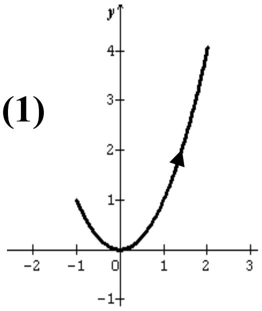
$$\begin{aligned}
\overline{\sin z} &= \overline{\sin(x+iy)} \\
&= \overline{\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)} \\
&= \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} \\
&= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y \\
&= \sin x \cos(iy) - \cos x \sin(iy) \\
&= \sin(x - iy) \\
&= \sin \overline{z}
\end{aligned}$$

I. **المنحنيات:** ليكن γ منحن في المستوي المركب تمثيله الوسيطي $z(t)=x(t)+iy(t)\,,\ t\in[a,b]$

أ. **تعاريف:**

1. يسمى γ قوسا(منحن مستمرا) إذا كانت الدالة $z:t\mapsto z(t)$ مستمرة أي $x:t\mapsto x(t)$ و $y:t\mapsto y(t)$ مستمرتان على $[a,b]$
2. يسمى γ قوسا بسيطا أو قوس جوردان إذا كان مستمرا و لم يقطع نفسه أي: $z:t\mapsto z(t)$ مستمرة على $[a,b]$ وتحقق: $\left(t_1\neq t_2\Rightarrow z(t_1)\neq z(t_2),\ t_1,t_2\in]a,b[\right)$ و إضافة إلى هذا إذا كان $z(a)=z(b)$ فإن γ يسمى قوسا بسيطا مغلقا.
3. يسمى γ قوسا أملسا إذا كانت الدالة $z':t\mapsto z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ موجودة و مستمرة و $z'(t)\neq 0$ من أجل كل $t\in[a,b]$
4. يسمى γ كفافا إذا كان قوسا أملسا إلاّ عند عدد منته من النقط.

أمثلة:

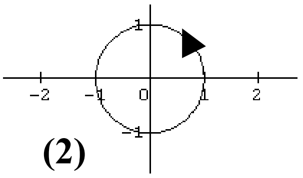


(1)

(1) $z(t)=t+it^2\,,\ t\in[-1,2]$ تمثل قوسا و هو جزء من قطع مكافئ(1) معادلته: $y=x^2$ لأن: $x:t\mapsto t$ و $y:t\mapsto t^2$ مستمرتان على $[-1,2]$.

(2) $z(t)=e^{it}\,,\ t\in[0,2\pi]$ تمثيل وسيطي لدائرة الوحدة في الاتجاه المباشر وهي قوس بسيط مغلق.

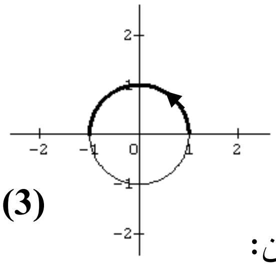
لأن: الدالة: $z:t\mapsto e^{it}$ مستمرة على $[0,2\pi]$ و لدينا $e^{t_1 i}\neq e^{t_2 i}\,,\ \forall t_1,t_2\in]0,2\pi[$ و $e^{0i}=e^{2\pi i}=1$



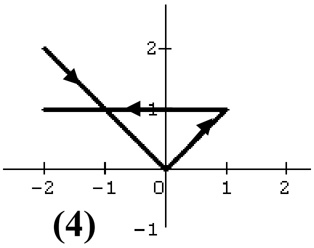
(2)

(3) $z(t)=e^{it}\,,\ t\in[0,3\pi]$ تمثيل وسيطي لدائرة في الاتجاه المباشر وهي قوس ليس بسيطا .

لأن: $e^{\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{5\pi}{2}i}$: $t_1=\dfrac{\pi}{2}\,,\ t_2=\dfrac{5\pi}{2}$



(3)



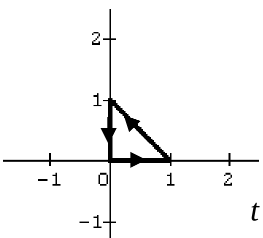
(4)

(4) $z(t)=\begin{cases} t-it & -2\le t\le 0\\ t+it & 0\le t\le 1\\ 2-t+i & 1\le t\le 4\end{cases}$ يمثل قوسا ليس بسيطا لأن: $z(-1)=z(3)=-1+i$

(5) دائرة الوحدة في الاتجاه المباشر هي قوس أملس و مغلق لأن:

$z:t\mapsto e^{it}$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $[0,2\pi]$ و $z':t\mapsto ie^{it}$ مستمرة وغير معدومة على $[0,2\pi]$

(6) $z(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1\\ 2-t+(t-1)i & 1\le t\le 2\\ (3-t)i & 2\le t\le 4\end{cases}$ يمثل كفافا مغلقا



(6)

ب. **طول منحني:** إذا كانت الدالة $z':t\mapsto z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ موجودة ومستمرة من أجل كل $t\in[a,b]$

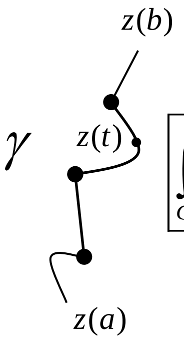
فإن L طول المنحني γ يعطى بالعلاقة: $L=\int_a^b |z'(t)|\,dt$

برهان: من المساواة $z(t)=x(t)+iy(t)$ نجد $y=f(x)$ ونعلم أن $L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

و لدينا $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ وأخيرا نكتب: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\,x'(t)dt=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_a^b |z'(t)|\,dt$

مثال: أحسب L طول القوس الممثل وسيطيا بـ: $z(t)=e^{-it}\,,\ t\in[0,\pi]$

لدينا $z'(t)=-ie^{-it}$ ومنه $L=\int_0^\pi |z'(t)|\,dt=\int_0^\pi \left|-ie^{-it}\right|dt=\int_0^\pi 1.dt=\pi$



II. التكامل المركب: سندرس في هذا المحور تكامل الدوال المركبة لمتغير مركب على طول كفاف γ معطى.

1. تعريف: ليكن γ كفافا تمثيله الوسيطي $z = z(t)\ ,\ t \in [a,b]$ و f دالة مستمرة عند كل z من γ.

يعرف تكامل الدالة f على طول الكفاف γ كما يلي:
$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{z(a)}^{z(b)} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)dt}$$

مثال1: أحسب التكامل $\int_\gamma z^2dz$ حيث γ الكفاف المعرف بـ: $z(t) = 2t + it\ ,\ t \in [0,1]$

الحل:
$$\int_\gamma z^2dz = \int_0^1 (2t+it)^2(2+i)dt = (2+i)^3\int_0^1 t^2dt = (2+11i)\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(2+11i) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

ملاحظة: نرمز للتكامل على كفاف مغلق γ موجه في الاتجاه المباشر (عكس اتجاه عقارب الساعة) بالرمز $\oint_\gamma$

مثال2: أحسب التكامل $\oint_\gamma z\operatorname{Re} z^2dz$ حيث γ دائرة الوحدة $\left(z(t) = e^{it}\ ,\ t \in [0,2\pi]\right)$

الحل: $f(z(t)) = e^{it}\operatorname{Re}(e^{2it}) = e^{it}\cos 2t$ و $z'(t) = ie^{it}$ ونكتب:
$$\oint_\gamma z\operatorname{Re} z^2dz = \int_0^{2\pi} ie^{2it}\cos 2t\, dt = i\int_0^{2\pi}(\cos 2t + i\sin 2t)\cos 2t\, dt = i\int_0^{2\pi}\cos^2 2tdt - \int_0^{2\pi}\sin 2t\cos 2t\, dt$$
$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 4t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\, d(\sin 2t) = \frac{i}{2}\left[t + \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = i\pi$$

ب. خواص: ليكن γ كفافا ، f و g دالتان مستمرتان عند كل z من γ و k عدد مركب ثابت.

1) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$　　2) $\int_\gamma \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$

3– إذا كان الكفاف γ مكون من كفافين γ_1 و γ_2 حيث نهاية γ_1 هي بداية γ_2 فإن: $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

مثال: لنحسب التكامل $\int_\gamma z^2dz$ حيث γ هو الكفاف المكون من القوسين البسيطين γ_1 و γ_2 حيث:
$$\gamma_1 : z(t) = t,\ \ t \in [0,2] \quad \text{و} \quad \gamma_2 : z(t) = 2 + ti, t \in [0,1]$$

الحل:
$$\int_\gamma z^2dz = \int_{\gamma_1} z^2dz + \int_{\gamma_2} z^2dz = \int_0^2 t^2 1dt + i\int_0^1 (2+it)^2dt = \int_0^2 t^2dt + i\int_0^1 (4+4it-t^2)dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

4– إذا كان $|f(z)| \le M$ من أجل كل z من γ و L طول الكفاف γ فإن $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le ML$

مثال: أثبت أن: $\left|\oint_\gamma e^zdz\right| \le 2\pi e$ حيث γ دائرة الوحدة $|z| = 1$

لدينا طول الدائرة γ هو $L = 2\pi$ ، $|e^z| = e^x \le e^1 = e$ و بالتالي حسب الخاصية (4) نجد: $\left|\oint_\gamma e^zdz\right| \le 2\pi e$

5– إذا كان γ^- هو الكفاف γ باتجاه معاكس فإن: $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

مثال: أحسب $\int_{\gamma} \bar{z}dz$ و $\int_{\gamma^-} \bar{z}dz$ حيث γ الكفاف المعرف بـ: $z(t)=t+i(t-1),\ t\in[1,2]$

الحل: لدينا $\gamma: z(t)=t+i(t-1), t\in[1,2],\ \ z'(t)=1+i$ وبالتالي:

$$\int_{\gamma}\bar{z}dz=(1+i)\int_1^2[(t-i(t-1)]dt=(1+i)[(1-i)\frac{t^2}{2}+it]_1^2=[t^2+(i-1)t]_1^2=[4+2(i-1)]-[1+(i-1)]=2+i$$

لدينا كذالك $\gamma^-: z(-s)=-s+i(-s-1),\ \ 1\le -s\le 2$ ونكتب: $\gamma^-: z(-s)=-s+i(-s-1),\ \ -2\le s\le -1,\ z'(-s)=-1-i$ ومنه

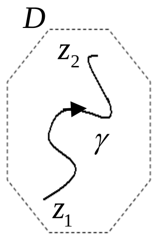
$$\int_{\gamma^-}\bar{z}dz=-(1+i)\int_{-2}^{-1}[(-s-i(-s-1)]ds=(1+i)\int_{-2}^{-1}[(s-i(s+1)]ds=[s^2-(i-1)s]_{-2}^{-1}=[1+(i-1)]-[4+2(i-1)]=-2-i$$

2. التكامل المركب بحساب دالة أصلية:

النظرية الأساسية للتكامل المركب:

– إذا كانت f دالة مستمرة على نطاق $D\subseteq \mathbb{C}$ و تملك دالة أصلية F أي $(F'(z)=f(z)\ ,\ \forall z\in D)$ فإنه من أجل كل

كفاف γ بدايته z_1 و نهايته z_2 و داخل النطاق D يكون: $\boxed{\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)}$



– إذا كان الكفاف γ مغلقا فإن $\int_{\gamma} f(z)dz=0$

برهان: لدينا $\frac{dF(z(t))}{dt}=F'(z(t))z'(t)$ و نكتب :

$$\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma} F'(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt=\int_a^b \frac{d[F(z(t))]}{dt}dt=F(z(t))|_a^b=F(z(b))-F(z(a))=F(z_2)-F(z_1)$$

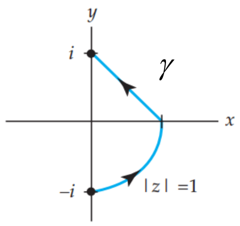
نتيجة: تحت شروط النظرية السابقة نستنتج أن التكامل $\int_{\gamma} f(z)dz$ لا يتعلق بالكفاف γ.

أمثلة:

1– باستعمال دالة أصلية لنحسب التكامل $\int_{\gamma} z^2dz$ حيث γ الكفاف المعرف بـ: $z(t)=2t+it,\ t\in[0,1]$

الحل: $\int_{\gamma} z^2dz=\int_0^{2+i} z^2dz=\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{2+i}=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$

2– لنحسب التكامل $\int_{\gamma}\frac{\ln z}{z}dz$ و $-\pi<\arg z\le\pi$ حيث γ الكفاف المعرف بالشكل المقابل



الحل:

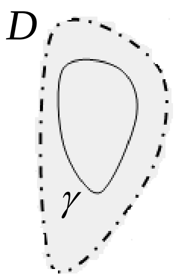
$$\int_{\gamma}\frac{\ln z}{z}dz=\int_{\gamma}\ln z\, d(\ln z)=\frac{1}{2}\left[(\ln z)^2\right]_{-i}^{i}=\frac{1}{2}\left[(\ln e^{i\frac{\pi}{2}})^2-(\ln e^{-i\frac{\pi}{2}})^2\right]=\frac{1}{2}\left[\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=0$$

3– لنحسب التكامل $\oint_{\gamma}\bar{z}dz$ حيث γ الدائرة الممثلة وسيطيا بـ: $\left(z(t)=e^{-it}\ ,\ t\in[0,2\pi]\right)$

الحل: $\oint_{\gamma}\bar{z}dz=i\int_0^{2\pi}e^{it}e^{-it}dt=2\pi i\neq 0$

III. نظريات كوشي:

1. نظرية كوشي1 لنطاق بسيط الترابط:

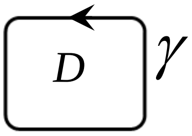


إذا كانت f دالة تحليلية في نطاق بسيط الترابط D فإنه من أجل كل كفاف مغلق γ داخل D يكون: $\int_{\gamma} f(z)dz=0$

مثال: $\oint_{|z|=2} e^z dz=0$

نتيجة: إذا كانت f دالة تحليلية في نطاق بسيط الترابط D فإنها تملك دالة أصلية F في D.

2. نظرية كوشي2 لنطاق بسيط الترابط:



ليكن D نطاقا بسيط الترابط حده γ كفافا مغلقا بسيطا و إذا كانت f دالة تحليلية في $\bar{D}$ أي $(D\cup\gamma)$
فإن: $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$

أمثلة:

1- لنثبت أن $\oint_{\gamma}\frac{z}{z-2}dz=0$ حيث γ دائرة الوحدة $|z|=1$.

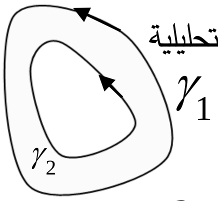
الحل: الدالة $f:z\mapsto\frac{z}{z-1}$ تحليلية في المجموعة $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|\le 1\}$ وبالتالي حسب النظرية السابقة $\oint_{|z|=1}\frac{z}{z-2}dz=0$

2- لنثبت أن $\oint_{\gamma}\frac{1}{z}dz\neq 0$ حيث γ الدائرة $|z|=3$ الموجهة في الاتجاه المباشر. الحل: $\oint_{\gamma}\frac{1}{z}dz=i\int_{0}^{2\pi}e^{-it}.e^{it}dt=2\pi i\neq 0$

3- – لنحسب $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2}dz$. الحل: $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2}dz=i\int_{0}^{2\pi}e^{-2it}.e^{it}dt=0$

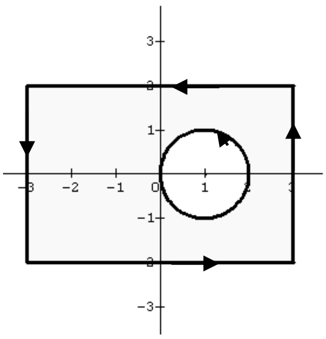
3. نظرية كوشي لنطاق متعدد الترابط:

ليكن γ كفافا بسيطا مغلقا في الاتجاه المباشر ولتكن $\gamma_n,...\gamma_2,\gamma_1$ كفافات بسيطة مغلقة في الاتجاه المباشر ونقاطها الداخلية غير متقاطعة مثنى مثنى وتقع داخل γ، إذا كانت f دالة تحليلية على الكفاف γ وعلى النطاق متعدد الترابط الذي حده γ باستثناء النقاط داخل الكفافات $\gamma_n,...\gamma_2,\gamma_1$ فإن: $\int_{\gamma} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz$



نتيجة: ليكن γ_1 و γ_2 كفافين بسيطين مغلقين في الاتجاه المباشر حيث γ_2 يقع داخل γ_1، إذا كانت f دالة تحليلية على الكفافين γ_1 و γ_2 و في المنطقة الواقعة بينهما فإن: $\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz$

مثال: أحسب التكامل $\int_{\gamma}\frac{z^3}{(z-1)^2}dz$ حيث γ الكفاف المكون من حدود المستطيل الذي أضلاعه $y\pm 2\ ,\ x=\pm 3$

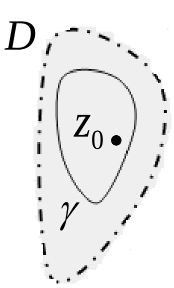


الحل:

ليكن γ_1 الدائرة في الاتجاه المباشر المعرفة بـ: $z(t)-1=e^{it}\ ,\ t\in[0,2\pi]$

الدالة $f:z\mapsto\frac{z^3}{(z-1)^2}$ تحليلية على γ و γ_1 و في المنطقة الواقعة بينهما وبالتالي:

$$\int_{\gamma}\frac{z^3}{(z-1)^2}dz=\int_{\gamma_1}\frac{z^3}{(z-1)^2}dz=\int_{0}^{2\pi}\frac{(1+e^{it})^3}{e^{2it}}ie^{it}dt=i\int_{0}^{2\pi}(e^{3it}+3e^{2it}+3e^{it}+1)e^{-it}dt=0$$



4. صيغة تكامل كوشي:

نظرية: إذا كانت f دالة تحليلية في نطاق بسيط الترابط D و γ كفافا بسيطا مغلقا داخل D
ومن أجل كل نقطة z_0 داخل γ فإن: 1) $\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

2) المشتق النوني للدالة f عند $z=z_0$ يعطى بالعلاقة: $\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$ حيث $n=1,2,...$

أمثلة:

1− لنحسب التكامل $\oint_\gamma \frac{\sin z}{z+1}dz$ حيث γ المربع في الاتجاه المباشر و المعرف بـ: $-3\le y\le 3\ ,\ -3\le x\le 3$

الحل: الدالة $z\mapsto \sin z$ تحليلية(صحيحة) في $\mathbb{C}$ و على γ و النقطة $z_0=-1$ داخل γ وبالتالي:

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z+1}dz = 2\pi i\sin(-1) = 2\pi i\sin(1)$$

2− لنحسب التكامل $\oint_\gamma \frac{z\,dz}{(z^2+4)(z-1)}$ حيث γ الدائرة في الاتجاه المباشر و المعرف بـ: $|z-2|=2$

الحل: الدالة $z\mapsto \frac{z}{(z^2+4)}$ تحليلية في $\mathbb{C}-\{-2i,2i\}$ و على γ و النقطة $z_0=1$ داخل γ وبالتالي: $\oint_\gamma \frac{z\,dz}{(z^2+4)(z-1)} = 2\pi i\left(\frac{1}{1^2+4}\right)$

3− لنحسب التكامل $\oint_\gamma \frac{\cos\pi z}{(2z+1)^2(z-2)}dz$ حيث γ دائرة في الاتجاه المباشر و معرفة بـ: $|z+1|=2$

الحل: لدينا $\frac{\cos\pi z}{(2z+1)^2(z-2)} = \frac{\cos\pi z}{4(z+\frac{1}{2})^2(z-2)} = \frac{\cos\pi z}{4(z-2)}\cdot\frac{1}{(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{f(z)}{(z+\frac{1}{2})^2}$ حيث $f(z)=\frac{\cos\pi z}{4(z-2)}$

الدالة $z\mapsto f(z)$ تحليلية في $\mathbb{C}-\{2\}$ و على γ و النقطة $z_0=-\frac{1}{2}$ داخل γ ولدينا $f'(z)=\frac{-4\pi(z-2)\sin\pi z-4\cos\pi z}{16(z-2)^2}$

وبالتالي: $\oint_\gamma \frac{\cos\pi z}{(2z+1)^2(z-2)} = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z+\frac{1}{2})^2} = \frac{2\pi i}{1!}f'(-\frac{1}{2}) = 2\pi i\left(-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-\pi^2}{5}i$

4− لنحسب التكامل $\oint_\gamma \frac{z^3+2z+1}{z(z-2i)^3}dz$ حيث γ مستطيل في الاتجاه المباشر و معرف بـ: $-1\le x\le 1\ ,\ 1\le y\le 4$

الحل: $\frac{z^3+2z+1}{z(z-2i)^3} = \frac{z^3+2z+1}{z}\cdot\frac{1}{(z-2i)^3} = \frac{f(z)}{(z-2i)^3}$ حيث $f(z)=\frac{z^3+2z+1}{z}$ و بالتالي:

$\oint_\gamma \frac{z^3+2z+1}{z(z-2i)^3}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-2i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(2i)$ ولدينا $f(z)=z^2+2+\frac{1}{z}$ ، $f'(z)=2z-\frac{1}{z^2}$ ، $f''(z)=2+\frac{2}{z^3}$

ومنه: $\oint_\gamma \frac{z^3+2z+1}{z(z-2i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(2i) = \pi i\left(2+\frac{2}{(2i)^3}\right) = 2\pi i-\frac{\pi}{4}$

5. نظريات مهمة: هذه النظريات هي نتائج لصيغة تكامل كوشي:

نظرية موريرا:

إذا كانت f دالة مستمرة في نطاق بسيط الترابط D و من أجل كل كفاف مغلق γ داخل D : $\int_\gamma f(z)dz=0$ فإن: f تحليلية في D .

متباينات كوشي:

إذا كانت f دالة تحليلية في القرص المغلق الذي حده $\gamma: |z-z_0|=r$ فإن: $|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{Mn!}{r^n}\ ,n=0,1,2...$ حيث:

$M=\max_{x\in\gamma}|f(x)|$.

نظرية ليوفيل: كل دالة f صحيحة (تحليلية على $\mathbb{C}$) ومحدودة من أجل كل عدد مركب z $(|f(z)|<M)$ هي دالة ثابتة.

النظرية الأساسية للجبر: لكل كثير حدود $P_n(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n\ (a_n\ne 0,\ n\ge 1)$ جذر واحد على الأقل.

نظرية غوص للقيمة المتوسطة:

إذا كانت f دالة تحليلية في القرص المفتوح الذي حده $\gamma: |z-z_0|=r$ فإن: $f(z_0)$ هي القيمة المتوسطة للدالة f على γ

أي: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$

<u>نظرية أكبر مقياس</u>: إذا كانت f دالة غير ثابتة و تحليلية داخل وعلى نطاق بسيط γ فإن: $|f(z_0)|$ تأخذ أكبر قيمة لها على γ.

<u>نظرية أصغر مقياس</u>: إذا كانت f دالة غير ثابتة و تحليلية داخل وعلى نطاق بسيط γ و $f(z)\neq 0$ داخل γ فإن:
$|f(z_0)|$ تأخذ أصغر قيمة لها على γ.