Université Echahid Hamma Lakhdar -El Oued-
Faculté de la technologie
Département de Génie Mécanique.
3 éme Année Maintenance Industriel

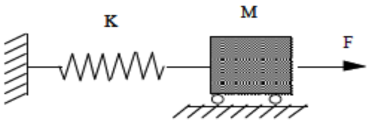
Année universitaire 2019/2020
Module : **Dynamique Des Structures**

# Série de TD 01
## Rappel PFD, Equation de Lagrange, amortissement, Fonction de Dissipation

### Exercice N°.1

Soit une masse ***M*** attachée à un ressort élastique qui s'allongerait de ***x*** sous l'action d'une force élastique ***F*** (voir Figure ).

1. Déterminer la raideur ***K*** du ressort.
2. Déterminer la période ***T*** de la masse puis la fréquence *f* du mouvement.

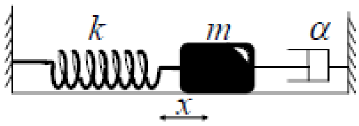



Données : ***M=1 Kg.*** ***x=0.01 m.*** ***F= 10 N.***

### Exercice.N°.2

Soit un système masse-ressort ci-contre.
Trouvez l'équation du mouvement par :

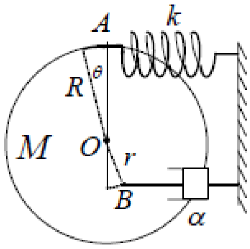
1. Lagrangien
2. Principe fondamental de la dynamique PFD




### Exercice N°.3

Soit le système disque-ressort ci-contre. Θ <<1.

1. Trouver l'équation du mouvement à l'aide du Lagrangien puis à l'aide du TMC (Théorie du Moment Cinétique).
2. Trouvez la nature du mouvement si :
   M=1Kg, K=2N/m, R=10cm, r=5cm α=8Ns/m




### Exercice N°.4

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Avec ***m*** est la masse du corps, *k* est le coefficient de rappel et ***x*** est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale $v_0 = 25cm/s$.
Donc on a : ***t=0***, ***x=0*** et $\dot{x} = v_0$

1. Calculer la période propre du système, Sachant que : ***m=150g*** et ***k=3.8N/m***.
2. Montrer que si ***α=0.6kg/s***, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
3. Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
4. Calculer la pseudo-période du mouvement.
5. Calculer le temps $t_m$ au bout duquel la première amplitude $x_m$ est atteinte. En déduire $x_m$.
6. Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

## Exercice N°.5 (Domicile)

Soient les systèmes mécaniques représentés dans les figures 5.1 et 5.2 comme suit :

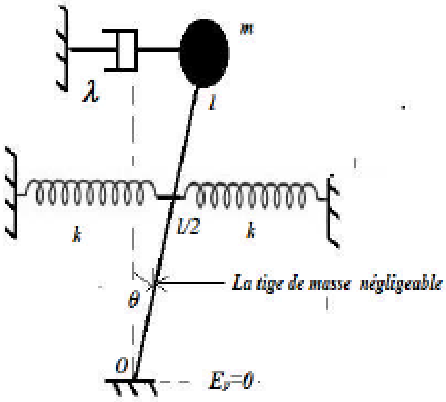



**Figure 5.1 : Mouvement oscillatoire amorti en rotation**

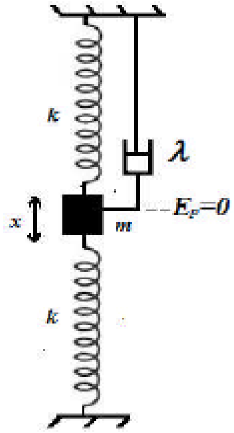



**Figure 5.2 : Mouvement oscillatoire amorti en translation**

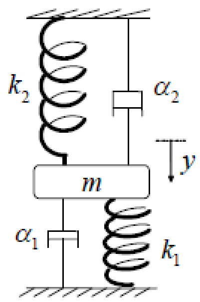
Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système :

1. Le Lagrangien
2. L'équation différentielle du mouvement.
3. La pulsation propre
4. La solution générale pour un faible amortissement.

## Exercice N°.6

Soit le système amorti ci-contre. A l'équilibre le ressort $k_1$ était comprimé et $k_2$ allongé chacun d'une distance $y_0$.

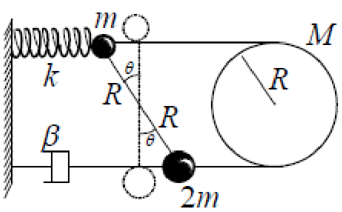
1. Trouver l'énergie cinétique $T$ et potentielle $U$ du système.
2. Simplifier $U$ à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver le Lagrangien et la fonction de dissipation $D$.
4. Déduire l'équation du mouvement.




## Exercice N°.7 (Domicile)

Soit le système amorti ci-dessous. A l'équilibre la tige était verticale (en pointillé) et le ressort au repos. Le fil autour du disque est inextensible et non glissant.

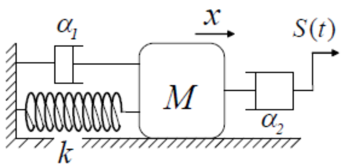
1. Trouver l'énergie cinétique $T$ du système.
2. Trouver l'énergie potentielle $U$ en fonction de $\theta \ll 1$.
3. Trouver le Lagrangien et la fonction de dissipation $D$.
4. Déduire l'équation du mouvement.



# Série de TD 02
# Vibrations forcées des Systèmes à 1 degré de liberté (avec excitation)

## Exercice N°.1

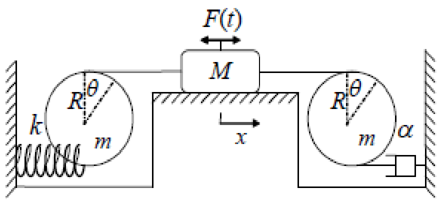
Soit le système ci-contre. Un déplacement $S(t) = S_0 \sin \Omega t$ est imposé sur l'extrémité droite de l'amortisseur $\alpha_2$.




1. Trouver T, U, et la fonction de dissipation D.
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver à l'aide de la représentation complexe la solution permanente. (Préciser son amplitude réelle A et sa phase $\phi$)
4. Trouver la pulsation de résonance $\Omega_R$.

## Exercice.N°.2

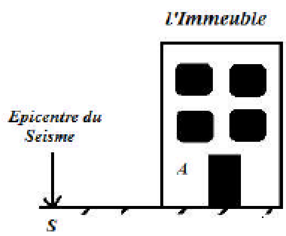
Le fil autour des disques ci-contre inextensible et non glissant. $F(t) = F_0 \sin \Omega t$.




1. Trouver T, U, et la fonction de dissipation D.
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement en fonction de x. (θ<<1)
3. Trouver à l'aide de la représentation complexe la solution permanente de l'équation (Préciser son amplitude réelle A et sa phase $\phi$)
4. Donner la pulsation de résonance $\Omega_R$.
5. Donner les pulsations de coupure $\Omega_{c1}$; $\Omega_{c2}$, et déduire la bande passante B ($\boldsymbol{\lambda \ll \omega_0}$).
6. Calculer $\Omega_R$,B ,et le facteur de qualité pour M = 2kg, m = 1kg, k = 27N/m, α= 0,6N.s/m.

## Exercice N°.3

Soit un immeuble $A$ subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude $a$ de forme $x_s(t) = a \cos \Omega t$.




1. Modéliser ce phénomène de séisme par système physique représenté par une masse *m* et un ressort de raideur *k*.
2. Quelle est la réponse du système. Justifier le résultat.

## Exercice N°.4 (Domicile)

Lorsqu'un moteur électrique fonctionne, il présente des vibrations naturelles qu'il est nécessaire d'amortir pour éviter de les transmettre à son châssis. On prévoit donc un système de suspension.

Le moteur est assimilé au point matériel ***m*** de masse ***m*** pouvant se déplacer parallèlement à l'axe vertical ***Oz***. La suspension le reliant au châssis est modélisée par un ressort de longueur à vide $\boldsymbol{l_0}$ et de raideur ***k*** en parallèle avec un amortisseur exerçant sur le moteur une force de freinage

$$\overrightarrow{f_{fr}} = -\alpha \dot{z} \overrightarrow{u_z}$$

Le châssis reste fixe dans un référencier galiléen et on note le champ de pesanteur $\vec{g}$

### *Mode A :*

Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile.

1. Déterminer dans ce cas la longueur ***l*** du ressort. On prend la référence ***z=0*** au point ***m***.

### *Mode B :*

Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre et puis on le laisse évoluer librement.

2. Déterminer le Lagrangien du système.

3. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par ***z(t).***

On pose les constantes suivantes :

$$w_0{}^2 = \frac{k}{m}\text{, et}\quad v = \frac{\alpha}{2\,m\,w_0}\ .$$

4. Donner la forme de la solution générale ***z(t)*** en fonction des paramètres $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\omega_0}$, on suppose que $\boldsymbol{v<1}$.
5. Comment appelle-t-on ce régime ?
6. Écrire l'expression de l'énergie totale $\boldsymbol{E_T}$ en fonction de ***z(t)*** et $\frac{dz(t)}{dt}$
7. Que vaut-t-il la valeur de l'expression $\frac{dE_T}{dt}$ Le système est-il conservatif ?

***Mode C :***

Le moteur fonctionne, et tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de forme : $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \sin \Omega t\, \overrightarrow{U_z}$

8. Établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par ***z(t)***
9. En régime permanent, on cherche des solutions de la forme

$$\boldsymbol{Z(t) = Z_0 \cos(\Omega t + \varphi)\quad et\quad V = V_0 \cos(\Omega t + \phi)}$$

➢ Donner l'expression de la grandeur $V = V_0 e^{i\phi}$

- Exprimer l'amplitude $\boldsymbol{V_0}$ en fonction de $\boldsymbol{\omega}$ et des paramètres $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega_0}$ et $\boldsymbol{F_0/m}$.
- Donner l'allure de $\boldsymbol{V_0(\omega)}$.

***Application numérique:***

La pulsation $\boldsymbol{\omega}$ vaut ***628 rad/s***, le moteur a une masse ***m=10kg***. On dispose de deux ressorts de raideurs $\boldsymbol{k_1=4\ 10^6\ N/m}$ et $\boldsymbol{k_2=10^6\ N/m}$.

***10.*** Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

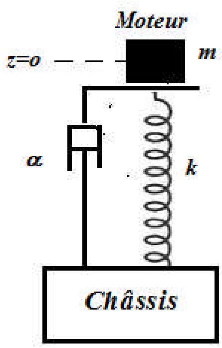



**Figure 4. 1 : Etude les vibrations d'un moteur**