جمل المعادلات الخطية

تعريف: نسمي الجملة:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \ldots(1)$$

جملة m معادلة خطية لـ n مجهول، اختصارا
جملة معادلات خطية.

- يمكن كتابة الجملة (1) على الشكل المصفوفي التالي:

$$AX = B \quad \ldots(2)$$

حيث:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ تدعى بمصفوفة المعاملات

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ تدعى بمصفوفة المجاهيل

و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ تدعى بمصفوفة الثوابت.

طرائق الحل:

1- طريقة كرامر: القول أن الجملة لكرامر إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل و محددها لا يساوي الصفر، بمعنى مصفوفة المعاملات مربعة و محددها لا يساوي الصفر.

- فإذا كان $\Delta = \det(A) \neq 0$ فإن الجملة (1) تقبل حلاً وحيدًا، و نحصل على الحل بالقاعدة $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$
حيث Δ_i هو المحدد الناتج عن المحدد Δ بتبديل العمود i بعمود الثوابت B.

- وإذا كان $\Delta = 0$ فالجملة (1) ليست لكرامر
ونميز حالتين :
أ- إذا كان أحد المحددات Δ_i على الأقل غير معدوم فإن الجملة (1) مستحيلة الحل.
ب- إذا كان جميع المحددات Δ_i معدومة فإن الجملة (1) عدداً غير منتهي من الحلول.

مثال : أوجد الحل بطريقة كرامر لجملة المعادلات :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x + 3y - 6z = -1 \\ -x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

مصفوفة المعاملات لهذه الجملة هي : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

ومصفوفة الثوابت $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

• نحسب المحدد $\Delta = \det(A)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

فبما أن مصفوفة المعاملات A مربعة ومحددها $\Delta \neq 0$
فالجملة لكرامر، وهي تقبل حلاً وحيداً $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

حيث : $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ مع $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6$

نجد $x = 2$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ مع $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

نجد $y = 3$

و $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$ مع $\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10$

نجد $z = \frac{10}{3}$

ومجموعة الحلول هي $S = \left\{ \left(2, 3, \frac{10}{3}\right) \right\}$

2. طريقة مقلوب مصفوفة:

شروطها هي نفس شروط كرامر، والاختلاف في كيفية تعيين الحل.

- إذا كان $\Delta = \det(A) \neq 0$ فالجملة (1) تقبل حلاً وحيدًا يعطى بالقاعدة التالية: $X = A^{-1}B$

- إذا كان $\Delta = \det(A) = 0$ فإن هذه الطريقة لا تعطي جواب عن الحالات الأخرى (كون A^{-1} غير موجود).

مثال: تعيين الحل بطريقة مقلوب مصفوفة في المثال السابق.

- تعيين A^{-1}: لدينا $\det(A) = 3 \neq 0$ ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} {}^{t}\begin{pmatrix} -3 & -9 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

عندئذ الحل هو:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

إذن $S = \left\{ \left(2, 3, \frac{10}{3}\right) \right\}$

3. طريقة غوص لحذف المجاهيل:

تتلخص هذه الطريقة بتحويل جملة المعادلات الخطية المفروضة إلى جملة مكافئة لها بإجراء تحويلات أولية سطرية إلى شكل مدرج.

دراسة مثال : حل الجملة في المثال السابق بطريقة غوص

$$\begin{cases} 2x - y + 0z = 1 \\ 5x + 3y - 6z = -1 \\ -x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{إلى الشكل}]{\text{نحويلها}} \left(\begin{cases} \square x + \square y + \square z = \square \\ \square y + \square z = \square \\ \square z = \square \end{cases}\right)$$

المرحلة الأولى

$$\begin{cases} 2x - y + 0z = 1 \\ 5x + 3y - 6z = -1 \\ -5y + 6z = 5 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ (السطر 1) + 2×(السطر 3)

المرحلة الثانية

$$\begin{cases} 2x - y + 0z = 1 \\ -11y + 12z = 7 \\ -5y + 6z = 5 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ 5(السطر 1) − 2(السطر 2)

المرحلة الثالثة

$$\begin{cases} 2x - y + 0z = 1 \\ -11y + 12z = 7 \\ -6z = -20 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ 5(السطر 2) − 11(السطر 3)

ومنه

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = \frac{10}{3} \end{cases}$$

إذن

$$S = \left\{ \left(2,\ 3,\ \frac{10}{3}\right) \right\}.$$