المصفوفات

I- عموميات على المصفوفات

تعريف: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m \times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تسمّى عناصرها، ومرتّبة على شكل صفوف وأعمدة، حيث أنّ عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n.

اصطلاح: المصفوفات من الرتبة 1×1 هي أعداد حقيقية.

ملاحظة: الكتابة العامّة للمصفوفة A من الرتبة $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث a_{mn}: العنصر الذي يقع في الصف m والعمود n.

أمثلة:

المصفوفة	$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & -5 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2,5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$E=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$
من الرتبة	2×3	3×2	4×1	1×5	3×3

تساوي مصفوفتين:

تتساوى المصفوفتين A و B إذا وفقط إذا كانتا من نفس الرتبة، وكل عنصر من A يساوي العنصر الذي يوافقه في الوضعية (بنفس السطر ونفس العمود) من B.

منقول مصفوفة: منقول المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ هو المصفوفة التي نرمز لها بالرمز ${}^tA$ من الرتبة $n \times m$، حيث صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى.

مثلا: منقول المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&7\end{pmatrix}$ هو المصفوفة ${}^tA=\begin{pmatrix}1&0\\3&5\\2&7\end{pmatrix}$

بعض المصفوفات الخاصة:

- **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

مجموع عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة A يسمى أثر A و يرمز له بالرمز $Tr(A)$، $(Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{mm})$

مثلا: المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-2&3\\1&4\end{pmatrix}$ مربعة من الرتبة 2×2، وأثرها

$$Tr(A) = -2+4 = 2$$

- **مصفوفة الوحدة:** هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 و بقية عناصرها تساوي الصفر، و يرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n\times n$ أو بالرمز I.

مثلاً: $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ، $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

- **المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ليست كلها معدومة، و بقية عناصرها تساوي الصفر.

مثلا: $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&7&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية من الرتبة 3×3.

- **المصفوفة المثلثية العلوية:** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها أسفل القطر الرئيسي معدومة.

مثلا: $A=\begin{pmatrix}9&\frac{1}{2}&7\\0&5&-\frac{1}{2}\\0&0&-2\end{pmatrix}$ مصفوفة مثلثية علوية.

- **المصفوفة المثلثية السفلية:** هي مصفوفة مربعة كل عناصرها أعلى القطر الرئيسي معدومة.

مثلا: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\14&6&0\\\sqrt{2}&2&8\end{pmatrix}$ مصفوفة مثلثية سفلية.

العمليات على المصفوفات :

- **الجمع والطرح** : جمع (أو طرح) مصفوفتين من نفس الرتبة هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو جمع (أو طرح) العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثلا، $A=\begin{pmatrix}2&4&7\\-6&3&-1\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-2&0&1\\3&4&7\end{pmatrix}$

لنحسب كل من $A+B$ ، $B-A$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+(-2)&4+0&7+1\\-6+3&3+4&-1+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&8\\-3&7&6\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}-2-2&0-4&1-7\\3-(-6)&4-3&7-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4&-6\\9&1&8\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة بعدد حقيقي** : ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي α هو المصفوفة αA، عناصرها هي ضرب عناصر المصفوفة A بالعدد α.

مثلا : إذا كانت $A=\begin{pmatrix}2&4&7\\-6&3&-1\end{pmatrix}$ فإن $3A=\begin{pmatrix}6&12&21\\-18&9&-3\end{pmatrix}$

- **ضرب مصفوفتين** : حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m\times k$ في مصفوفة B من الرتبة $k\times n$ (يعني عدد أعمدة الأولى يساوي عدد أسطر الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m\times n$، كل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب السطر الموافق له من المصفوفة A في العمود الموافق له من المصفوفة B.

دراسة مثال : $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\5&-1&3\end{pmatrix}$ ؛ $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\3&-2\end{pmatrix}$

لنحسب AB ، BA.

$$AB=\begin{pmatrix}(2\times1)+(1\times(-1))+(0\times3)&(2\times1)+(1\times2)+(0\times(-2))\\(5\times1)+((-1)\times(-1))+(3\times3)&(5\times1)+((-1)\times2)+(3\times(-2))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\15&-3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}(1\times2)+(1\times5) & (1\times1)+(1\times(-1)) & (1\times0)+(1\times3)\\ ((-1)\times2)+(2\times5) & ((-1)\times1)+(2\times(-1)) & ((-1)\times0)+(2\times3)\\ (3\times2)+((-1)\times5) & (3\times1)+((-1)\times(-1)) & (3\times0)+((-1)\times3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3\\ 8 & -3 & 6\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

II. المحددات

تعريف: محدد المصفوفة المربعة A من الرتبة $n\times n$ هو عدد حقيقي يرمز له بالرمز $det(A)$ أو $|A|$.

تعيين $det(A)$: نتحصل على $det(A)$ باستخدام قواعد حسابية معينة.

- من أجل $n=2$: إذا كان $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ فإن $det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

مثلا: $det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\times3-4\times1=2$

- من أجل $n=3$: إذا كان $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$، فلتعيين $det(A)$

هناك طريقتان.

1. الطريقة 1:

$$det(A)=\begin{vmatrix}\overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

2. الطريقة 2 (طريقة ساروس):

$$det(A)=\left|\begin{matrix}\overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & \underset{-}{a_{33}}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\right|$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

- من أجل $n\geq3$: نعمل نفس الكيفية من أجل $n=3$.

مثلا: لنحسب محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right| = -2+0+0-(-12)-0-0 = 10$$

نتائج:

1) محدد مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية أو قطرية يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي، و كحالة خاصة $\det(I_n) = 1$.

2) إذا انعدم سطر أو عمود في مصفوفة مربعة فإن محددها معدوما.

3) إذا تساوى سطرين أو عمودين في مصفوفة مربعة فإن محددها معدوما.

مقلوب مصفوفة:

تعريف: مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} (إن وجدت) حيث يكون $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

خاصية: $(\det(A) \neq 0) \Leftrightarrow (A$ قابلة للقلب$)$

مثلا: تحقق من أنه إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

لدينا بالفعل: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

وكذا $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

طريقة حساب مقلوب مصفوفة مربعة:

لتكن A مصفوفة مربعة حيث $\det(A) \neq 0$، فمقلوبها يعطى بالشكل التالي: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^{t}C$

حيث C هي مصفوفة المرافقات (نعين كما في المثالين التاليين).

أمثلة:

1) لنحسب A^{-1} من أجل $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

لدينا $\det(A) = 3 \neq 0$، فهي قابلة القلب حيث $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}C$

مع مصفوفة المرافقات $C = \begin{pmatrix} +3 & -0 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$

وبالتالي: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

② لنحسب A^{-1} من أجل $A=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

لدينا $\det(A)=2\neq 0$ ، فهي قابلة للقلب حيث

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\,{}^{t}C$$

مع

$$C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-4 & -4\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & -4\\ -4 & 10 & 12\end{pmatrix}$$

وبالتالي :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 2 & -4 & 10\\ 3 & -4 & 12\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -2\\ 1 & -2 & 5\\ \frac{3}{2} & -2 & 6\end{pmatrix}$$

III. القيم والأشعة الذاتية

تعريف: لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$، عناصرها من $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$، نقول عن العدد λ من $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ أنه قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجد شعاع غير معدوم $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ (أو بالكتابة $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$) من $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{C}^n$

تحقق $AX = \lambda X$ ، ونقول أن X هو الشعاع الذاتي للمصفوفة A المرافق للقيمة الذاتية λ.

مثلا: $\lambda=4$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ والشعاع الذاتي المرافق لها هو $X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$، حيث أن:

$$AX=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=4X$$

خاصية: القيم الذاتية لمصفوفة مربعة A هي بالضبط الحلول λ للمعادلة $\det(A-\lambda I)=0$ حيث I هي مصفوفة الوحدة.

- تسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A.
- ويسمى كثير الحدود $\det(A-\lambda I)$ بكثير الحدود المميز للمصفوفة A.

دراسة مثال تطبيقي: المطلوب تعيين القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A حيث

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&1\\-2&2&0\end{pmatrix}$$

- تعيين القيم الذاتية:

$$(\lambda \text{ قيمة ذاتية لـ } A) \Longleftrightarrow (\det(A-\lambda I)=0)$$

ولدينا:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&-1\\-1&1-\lambda&1\\-2&2&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(4-\lambda^2)$$

وبالتالي :

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda=0 \vee \lambda=2 \vee \lambda=-2$$

فالقيم الذاتية لـ A هي : $\{-2;0;2\}$

- تعيين الأشعة الذاتية :

نفرض $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ شعاع ذاتي لـ A مرافق للقيمة الذاتية λ

معناه $AX=\lambda X$ فينتج :

$$\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=\lambda x_1\\-x_1+x_2+x_3=\lambda x_2\\-2x_1+2x_2=\lambda x_3\end{cases}$$

. من أجل $\lambda=-2$ فإن $\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=-2x_1\\-x_1+x_2+x_3=-2x_2\\-2x_1+2x_2=-2x_3\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\-x_1+3x_2+x_3=0\\-2x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases}$

وهذه الجملة تكافئ $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\-x_1+3x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$ فينتج $\begin{cases}x_2=0\\x_3=x_1\end{cases}$

ولهذه الجملة عدد غير منتهي من الحلول

$$S=\{(x_1,0,x_1),\ x_1\in\mathbb{R}\}=\{x_1(1,0,1),\ x_1\in\mathbb{R}\}$$

فنختار $X=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية (-2)

. من أجل $\lambda=0$ فإن $\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=0\\-x_1+x_2+x_3=0\\-2x_1+2x_2=0\end{cases}$ نجد $\begin{cases}x_3=0\\x_2=x_1\end{cases}$

ويصبح $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

ومنه $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ هو الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية (0)

. من أجل $\lambda=2$ فإن $\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=2x_1\\-x_1+x_2+x_3=2x_2\\-2x_1+2x_2=2x_3\end{cases}$ نجد $\begin{cases}-3x_1+x_2-x_3=0\\-x_1-x_2+x_3=0\\-2x_1+2x_2-2x_3=0\end{cases}$

فينتج $\begin{cases}x_1=0\\x_3=x_2\end{cases}$ ويصبح $X=\begin{pmatrix}0\\x_2\\x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ومنه $X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ هو الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية (2).

IV قابلية التأقطر لمصفوفة مربعة

تعريف 1: لتكن A و B مصفوفتان مربعتان من الرتبة $n\times n$.
نقول أن A و B متشابهتين إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P من الرتبة $n\times n$ بحيث يكون $B=P^{-1}AP$
أو بالكتابة $AP=PB$

تعريف 2: لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$.
نقول أن A قابلة للتأقطر إذا وجدت مصفوفة قطرية D من الرتبة $n\times n$ مشابهة لها، أي إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P من الرتبة $n\times n$ بحيث $D=P^{-1}AP$ ، تسمى P مصفوفة العبور أو الانتقال.

خواص:

- القيم الذاتية لمصفوفة قطرية هي عناصر قطرها الرئيسي.
- إذا كانت A و B مصفوفتين من الرتبة $n\times n$ متشابهتين فإن A و B لهما نفس القيم الذاتية.
  وكنتيجة لذلك، عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة D في التعريف 2 هي القيم الذاتية للمصفوفة A.
- لتكن A مصفوفة من الرتبة $n\times n$، عندئذ:

(A تقبل n شعاعا ذاتيا مستقلا خطيا) $\Longleftrightarrow$ (A قابلة للتأقطر)

(A قابلة للتأقطر) $\Longrightarrow$ (A تملك n قيمة ذاتية مختلفة)

طريقة تعيين المصفوفة القطرية D المرافقة للمصفوفة A:
لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$ وقابلة للتأقطر، فيوجد مصفوفة قطرية D من الرتبة $n\times n$ بحيث $D=P^{-1}AP$
حيث P هي مصفوفة الانتقال التي نحصل عليها باستعمال الأشعة الذاتية الموافقة لـ A.

مثال①: لنعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

- تعيين القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة A:

$(\det(A-\lambda I)=0) \Leftrightarrow (\lambda$ قيمة ذاتية لـ $A)$

و $\det(A-\lambda I)=\lambda^2-3\lambda+2$

ومنه: $(\det(A-\lambda I)=0) \Leftrightarrow (\lambda=1 \vee \lambda=2)$

A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين وهي من الرتبة 2x2 فهي قابلة للتقطير.

- الأشعة الذاتية:

من أجل $\lambda=2$، الشعاع الذاتي المرافق لها $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

ومن أجل $\lambda=1$، الشعاع الذاتي المرافق لها $X=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

فإذا أخذنا مصفوفة الانتقال $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ لنجد $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

نحصل على $D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

مثال②: لنعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

يمكن التأكد من أنها تقبل قيمة ذاتية واحدة $\lambda=1$،

ومن أجل هذه القيمة نحصل على شعاع ذاتي واحد هو $X=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$،

فبما أن A تقبل شعاعا ذاتيا واحدا وهي من الرتبة 2x2 فهي غير قابلة للتقطير.

مثال③: لنعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$

يمكن التأكد من أنها تقبل قيمتين ذاتيتين $\lambda=-2$ و $\lambda=1$،

ومن أجل القيمة $\lambda=-2$ نحصل على الشعاع الذاتي $V_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

ومن أجل القيمة $\lambda=1$ نحصل على الشعاع الذاتي $V_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

فبما أن A تقبل شعاعان ذاتيان وهي من الرتبة 3x3 فهي غير قابلة للتقطير.