Chapitre I : Concepts Généraux de la Fiabilité

I.1 Définition

La fiabilité caractérise l'aptitude d'un système ou d'un matériel à accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant un intervalle de temps donné.

I.2. Fonction de fiabilité R(t) – Fonction de défaillance F(t)

Considérons un matériel dont on étudie la fiabilité. Soit Z la variable aléatoire qui à chaque matériel associe son temps de bon fonctionnement. On choisit un de ces matériels au hasard. Soit les événements A : « Le matériel est en état de bon fonctionnement à l'instant t » et B : « Le matériel est défaillant à l'instant t +Δt » On a alors :

$$p(A) = p(T > t) \quad \text{et} \quad p(B) = p(T \leq t + \Delta t)$$

Donc $$p(A \cap B) = p(t < T < t + \Delta t)$$
$$= F(t + \Delta t) - F(t)$$
$$= (1 - R(t + \Delta t)) - (1 - R(t))$$
$$= R(t) - R(t + \Delta t)$$

On en déduit que $$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

Tel que T représente la durée de vie d'un matériel.

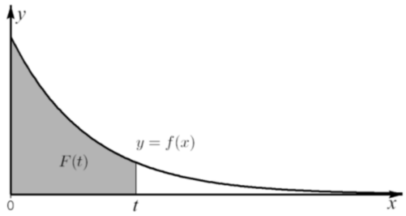


Figure I.1. Fonction de défaillance

On appelle fonction de défaillance la fonction *F* définie pour tout $t \geq 0$ F(t)= P(T ≤ t) Le nombre F(t) représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard ait une défaillance avant l'instant t. La figure I.1 donne l'allure de cette fonction.

Cette fonction nous amène naturellement une fonction associée : la fonction de fiabilité *R* définie pour tout $t \geq 0$ par :
R(t)= 1-F(t). Le nombre R(t) représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de défaillance avant l'instant *t*. La figure I.2 montre les deux fonctions associées.

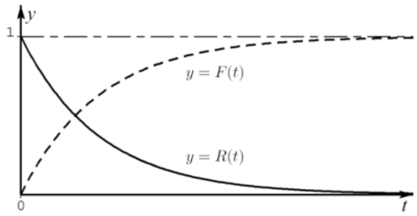


Figure I.2. Fonction associée

I-3 Taux d'avarie (ou taux de défaillance)

Le taux d'avarie d'un intervalle quelconque est la proportion de machines qui tombent en panne dans cet intervalle de temps, par rapport à celles qui étaient en état de bon fonctionnement au début de la période.

$$\lambda = (N_i - N_f)/N_i \qquad \text{(I-3)}$$

On peut dire $\lambda = \frac{Nombre\ total\ de\ défaillance\ pendant\ le\ service}{Durée\ total\ de\ bon\ fonctionnement}$

Tel que

N_i : Nombre de éléments au début de l'intervalle ; N_i : Nombre de éléments à la fin de l'intervalle.

I-3-1 Taux d'avarie moyen entre les instants t et t+h :

$$\frac{Nombre\ d'\text{éléments}\ tomb\text{és}\ en\ panne\ entre\ t+h}{Nombre\ d'\text{éléments}\ en\ \text{état}\ de\ marche\ \text{à}\ t}$$

C'est la probabilité pour qu'un dispositif en état de marche à l'instant t, tombe en panne entre les instants t et t+h.

$$\frac{P(t<T<t+h)}{P(T>t)}=\frac{F(t+h)-F(t)}{R(t)}=\frac{(1-R(t+h))-(1-R(t))}{R(t)}=\frac{R(t)-R(t+h)}{R(t)}. \quad \text{(I-4)}$$

I-3-2 Taux d'avarie moyen par unité de temps

On divise par h : $\frac{R(t)-R(t+h)}{R(t)h}$ (I-5)

I-3-3 Taux de défaillance instantané

On calcule la limite lorsque h tend vers 0

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(t)-R(t+h)}{R(t)h}=\lim_{h\to 0}-\frac{R(t+h)-R(t)}{h}\times\frac{1}{R(t)}=\frac{-R'(t)}{R(t)}$$

Donc $\lambda(t)=-\frac{R'(t)}{R(t)}$ (I-6) où R est la fonction fiabilité de ce matériel.

Si λ est connu, la résolution d'équation différentielle linéaire du 1er ordre (I-6) donne la fonction de la fiabilité R (I-7) du matériel. Donc la fonction de défaillance F qui est la fonction de répartition de la variable x puis la densité de la probabilité f qui est la dérivée de F.

$$R'(t)+\lambda(t)R(t)=0 \quad (I-6) \ ; R(x)=e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \Rightarrow F(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \ (I-7)$$

I.4 Indicateurs de fiabilité (MTBF Temps moyen de bon fonctionnement) :

Le MTBF (Mean Time Between Failure) est souvent traduit comme étant la moyenne des temps de bon fonctionnement mais représente la moyenne des temps entre deux défaillances. En d'autres termes, Il correspond à l'espérance de la durée de vie **t**.

$$MTBF=\int_0^\infty R(t) \quad \text{(I-7)}$$

Le MTBF peut être exprimé par le rapport des temps.

$$MTBF=\frac{somme\ des\ temps\ de\ fonctionnement\ entre\ les\ (n)d\acute{e}faillances}{nombre\ d'intervention\ de\ maintenance}$$

Si λ est constant :$MTBF = {}^{1}/_{\lambda}$ (I-8)

Par définition le MTBF est la durée de vie moyenne du système.

Exemple : un compresseur industriel a fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 pannes dont les durées respectives sont : 7, 22, 8.5, 3.5 et 9 heures. Déterminer son MTBF.

$$MTBF = \frac{8000 - (7 + 22 + 8.5 + 3.5)}{5} = 1590\ heures$$

Si λ est supposé constante donc $\lambda = \frac{1}{MTBF} = 6.289 * 10^{-4}\ défaillance/heure$

I-5 L'évolution du taux des défaillances pour les différentes entités (courbe en baignoire) :

A. en mécanique.
B. en électromécanique.
C. en électronique.

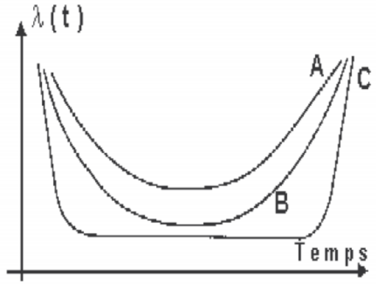


Figure I.3. Courbes caractéristiques du taux de défaillance

I.5-1 Les différentes phases du cycle de vie d'un produit :

L'évolution du taux de défaillance d'un produit pendant toute sa durée de vie est caractérisée par ce qu'on appelle en analyse de fiabilité la courbe en baignoire Figure I.4. Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps (taux de défaillance décroissant), cette phase de vie est appelée période de jeunesse. Après, il se stabilise à une valeur qu'on souhaite aussi basse que possible pendant une période appelée période de vie utile (taux de défaillance constant). A la fin, il remonte lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets, c'est la période de Vieillissement (taux de défaillance croissant).

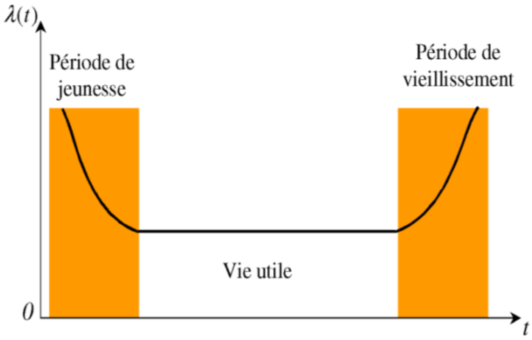


Figure 1.4. La courbe en baignoire.

I-5-2 Taux de défaillance pour des composants mécaniques

Les composants mécaniques sont soumis, dès le début de leur vie, au phénomène d'usure ou de vieillissement. Si on trace la courbe du taux de défaillance, en fonction du temps, on obtient une courbe qui ne présente pas le plateau de la figure I.4 la période de vie utile (taux de défaillance constant) n'existe pas ou elle est réduite. Le taux de

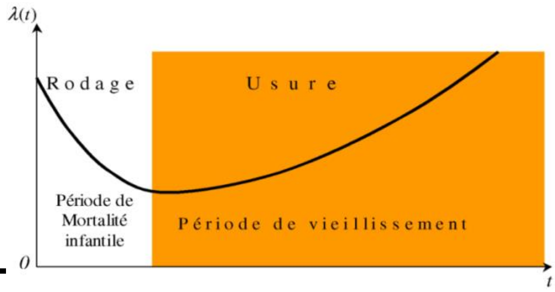


Figure I.5. Courbe du taux de défaillance en mécanique.

défaillance du dispositif est une fonction non linéaire du temps et ceci dans chaque phase de sa vie (voir figure I.5):

Exemple : On étudie une génératrice suite à son déclassement après 16500 heures. Pendant cette période, la génératrice a cumulée 218 arrêts. Les données sont résumées dans le tableau ci-dessous. On veut savoir quelle est l'évolution de la fiabilité de la génératrice et sa phase d'usure en fonction des intervalles d'arrêts.

heures	MTBF	Taux de défaillance
1000	66.7	0.015
2000	100	0.01
3000	250	0.004
4000	500	0.002
5000	400	0.0025
6000	555.6	0.0018
7000	416.7	0.0024
8000	526.32	0.0019
9000	500	0.002
10000	476.2	0.0021
11000	555.6	0.0018
12000	512	0,001953125
13000	200	0.005
14000	111.1	0.009
15000	100	0.01

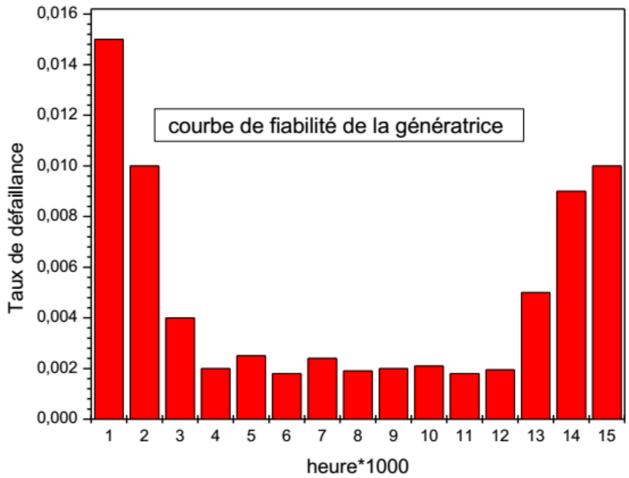
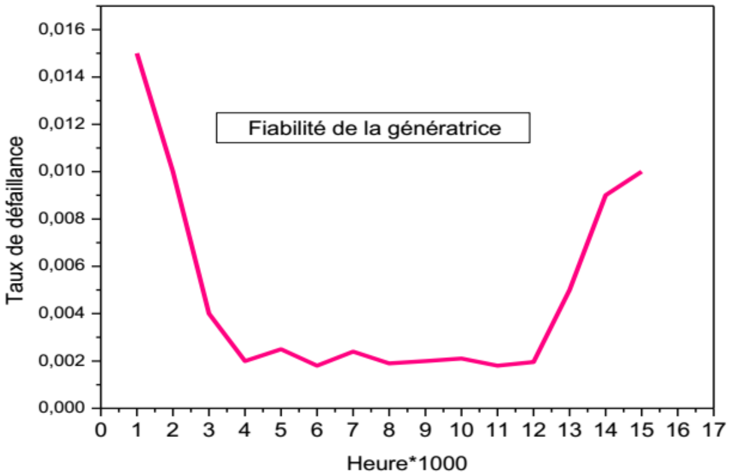


Figure 1.6 : Fiabilité de la génératrice et courbe en baignoire



I-6 Fiabilité d'un système

La détermination de la fiabilité d'un système électronique, mécanique ou autre nécessite tout d'abord de connaître la loi de la fiabilité (ou la loi de défaillance) de chacun des composants intervenant dans le système.

I-6-1 Fiabilité de système constitué de plusieurs composants

a- En série

La fiabilité Rs d'un ensemble de n constituants connectés en série est égale au produit des fiabilités respectives R_A, R_B, R_C, R_n de chaque composant.

$$R_s = R_A * R_B * R_C \dots * R_n \qquad \text{(I-9)}$$

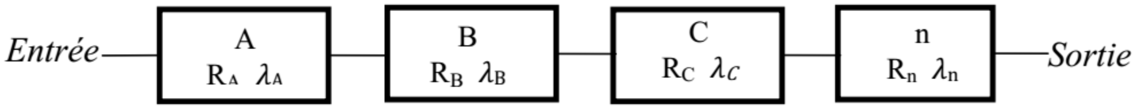


Figure I.6. Composants en série.

Si les taux de défaillances sont constants au cours du temps la fiabilité sera calculée suivant la formule:

$$R_s = R^{-\lambda_A t} * R^{-\lambda_B t} * \cdots * R^{-\lambda_n t} \qquad \text{(I-10)}$$

Avec $$MTBF = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + \cdots + \lambda_n} \qquad \text{(I-11)}$$

Exemple 1

Soit un poste de radio constitué de quatre composants connectés en série, une alimentation R_A=0.95, une partie récepteur R_B=0.92 ; un amplificateur R_C=0.97 et haut-parleur R_D= 0.89 ; déterminer la fiabilité R_S de l'appareil.

R_S= R_A. R_B .R_C. R_D=0.95x 0.92x0.97x0.89=0.7545 (soit une fiabilité de 75% environ)

Exemple 2

Soit une imprimante constituée de 2000 composants montés en série supposés tous de même fiabilité, très élevée R= 0.9999, Déterminer la fiabilité de l'appareil.
$R(s)=R^n = 0.9999^{2000} = 0.8187$ (soit une fiabilité environ de 82 %) .
Si on divise par deux le nombre des composants :
$R(s)=R^n = 0.9999^{1000} = 0.9048$ (soit une fiabilité environ de 90.5 %).
Si on souhaite avoir une fiabilité de 90 % pour l'ensemble des 2000 composants montés en série, déterminons la fiabilité que doit avoir chaque composant.
$R_s = 0.9000 = R^{2000} \Rightarrow lnR_s = ln0.9 = 2000lnR \Rightarrow R = 0.999945.$

Exemple 3

Une machine de production dont la durée totale de fonctionnement est de 1500 heures, se compose de quatre sous-systèmes A, B, C et D montés en série et ayant les MTBF respectifs suivants : MTBFA = 4500 heures MTBFB= 3200 heures MTBFC= 6000 heures MTBFD= 10500 heures. Déterminons les taux de pannes et le MTBF global MTBFS. Quelle est la probabilité que le système parvienne sans pannes jusqu'à 5000 heures.

1- Taux de pannes de l'ensemble

$\lambda_A = \frac{1}{MTBFA} = 0.000222\ défaillance\ par\ heure$.

$\lambda_B = \frac{1}{MTBFB} = 0.000313\ défaillance\ par\ heure.$

$\lambda_C = \frac{1}{MTBFC} = 0.000167\ défaillance\ par\ heure.$

$\lambda_D = \frac{1}{MTBFD} = 0.000065\ défaillance\ par\ heure.$

$\lambda_S = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 0.000767\ panne\ par\ heure.$

2- MTBFS ?

$MTBFS = \frac{1}{\lambda_s} = 1303\ heures\ entre\ deux\ pannes\ \ .$

3- La probabilité que le système parvienne sans pannes jusqu'à 5000 heures est :

$R_s(5000) = e^{-0.000767*5000} = 0.0186\ \Rightarrow\ 2\%.$

b- En parallèle

La fiabilité d'un système peut être augmentée en plaçant les composants en parallèle. Un dispositif constitué de **n** composants en parallèle ne peut tomber en panne que si les **n** composants tombent en panne au même moment.

Si **Fi** est la probabilité de panne d'un composant, la fiabilité associée **Ri** est son complémentaire:

$$F_i = 1 - R_i$$

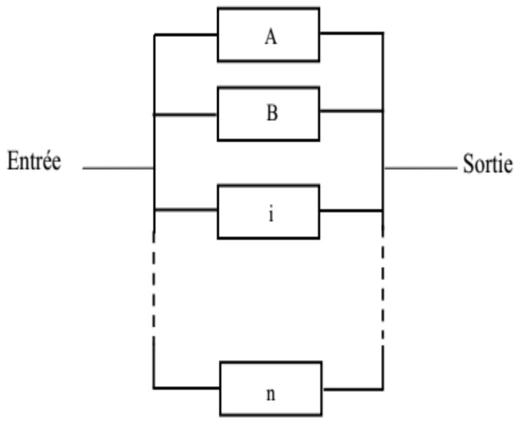


Figure I.7. Composants en parallèle.

Soit les "n" composants de la figure ci-dessous montés en parallèle. Si la probabilité de panne pour chaque composant repéré (i) est notée Fi alors:

$R(S) = 1 - (1 - R_A) \cdots (1 - R_n).$ (I-12)

Exemple

Trois dispositifs A, B et C de même fiabilité $R_A = R_B = R_C = 0.75$ sont connectés en parallèle.

a) Déterminons la fiabilité la fiabilité de l'ensemble

$$R(S) = 1 - (1 - R_A)^3 = 0.984$$

c- Cas des systèmes connectés en parallèle et dis en attente

➢ **Cas de deux composants en attente**

Pour le système proposé, le composant A est en service actif et le composant B en attente. Si B tombe à tour en panne, il est automatiquement remplacé par C, etc.

Si tous les composant sont identique avec λ constant, la fiabilité du dispositif est donnée par :

$R(t) = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} = (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}.$ (I-13)

Si A et B ne sont pas identiques la relation devient :

$R(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) + e^{-\lambda_A t}.$

➢ **Cas de n composants en attente**

$\lambda_A = \lambda_B = \cdots = \lambda_n = \lambda$=constatnte

$R(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^n}{n!}\right].$ (I-14)

- **Cas où m composants sur les n sont nécessaires au succès du système**

Si on suppose que le système se compose de n composants K, tous de même fiabilité R, et qu'il doit y avoir au moins deux composants en état de fonctionnement, la fiabilité de l'ensemble est donnée par la relation

$Rs = \sum_{i=m}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)R^i(1-R)^{n-1}.$ (I-15)

Exemple 1

Cas avec trois composants K avec un minimum de **deux** composants actifs sur les trois disponibles au départ. On tolère que le système de défaillance d'un seul composant sur les trois. Il doit y avoir au moins deux composants en fonctionnement ou en activité pour accomplir la mission, la relation précédente donne avec n=3 et m=2.

$Rs = R^3 + 3R^2(1-R).$

Chapitre II : Lois de Fiabilité

II-1 La loi exponentielle

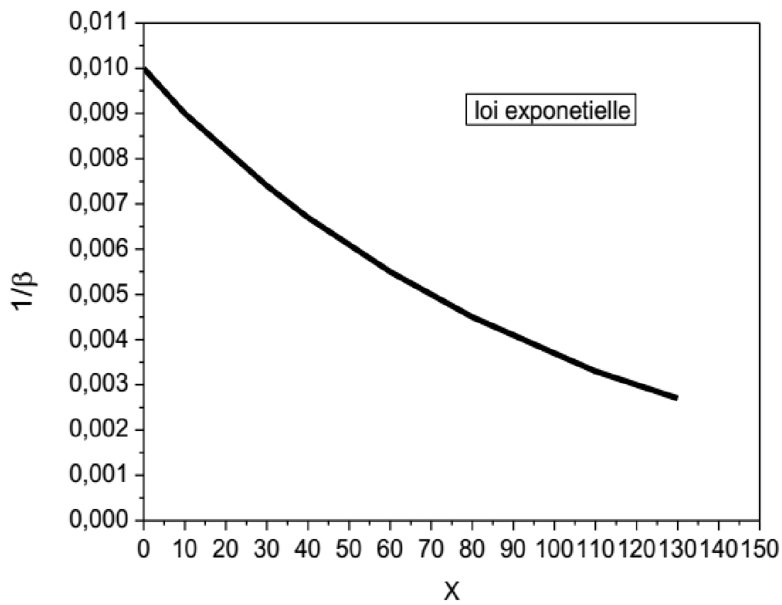
La loi exponentielle a de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénierie en particulier dans l'étude de fiabilité d'un équipement. Elle présente également diverses applications dans l'étude des phénomènes d'attentes. Exemples:

1- La durée de vie utile d'un composant électronique.
2– Le temps entre deux arrivées consécutives à un guichet automatique.
3– Le temps entre deux défaillances consécutives d'un système informatique.
4– Le temps de service à un guichet de pièces détachées d'une usine…

D'une manière générale la distribution exponentielle est donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(II-1)}$$

β	100	
$\frac{1}{\beta}$	0.01	
	x	f(x)
	0	0,0100
	10	0,0090
	20	0,0082
	30	0,0074
	40	0,0067
	50	0,0061
	60	0,0055
	70	0,0050
	80	0,0045
	90	0,0041
	100	0,0037
	110	0,0033
	120	0,0030
	130	0,0027



La fonction de réparation est donnée par l'expression suivante :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \; = \; \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} \qquad \text{(II-2)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(II-3)}$$

Avec $\lambda = \frac{1}{\beta}$ (taux de défaillance ou de pannes) et **β= MTBF,** et **x= t** (temps). L'espérance mathématique de X: **E(X) = β.** La variance et l'écart-type: **Var(X) = β^2** **σ(X) = β**

La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement.
Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t. Par exemple, pour un verre en cristal, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication ou de son âge. Loi des variables aléatoires représentant une durée de vie sans usure.

Par définition, on dit qu'une durée de vie est sans usure si la probabilité de survie à l'instant t ne dépend pas de t.

Sa fonction de fiabilité est: $R(t) = e^{-\lambda t}$ (II-4)

Sa densité de probabilité de paramètre X s'écrit**:** $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (II-5)

Exemple 1:
Un fabricant de fours à micro-ondes veut déterminer la période de garantie qu'il devrait associer à son tube magnétron, le composant le plus important du four. Des essais en laboratoire ont indiqué que la durée de vie utile (en années) de ce composant possède une distribution exponentielle avec un taux moyen de défaillance de 0.20 tube/ an.

a) Quelle est la durée moyenne de vie des tubes?
b) Quelle est la P qu'un tube opère sans défaillance pour une période excédant sa durée de vie espérée?
c) Sur 1000 tubes de ce type, combien seront défaillants au cours des cinq premières années?

Solution:
a) La durée moyenne des tubes
$E(X) = \beta$; Puisque $1/ \beta= 0.20 \Rightarrow \beta= 1/ 0.20 = 5$ ans.
b) On cherche $P(X>5) = 1 – P(X\leq5) = 1 – F(5)$
$P(X>5) = 1 – [1 – \exp(-5/ 5)] = \exp(-1) = 0.3679$ (il y a 36.8% de chances qu'un tube excède sa durée de vie moyenne)
c) Sur 1000 tubes de ce type, combien seront défaillants au cours des cinq premières années?
$P(X<5) = F(5) = 1 – \exp(-5/ 5) = 0.6321$
Sur 1000 tubes approx. 1000*0.6321 = 632 tubes seront défaillants au cours de cinq premières Années.

d) Quelle est la P que la durée de vie d'un tube soit comprise dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$?
$E(X) - \sigma(X) = 5 – 5 = 0$
$E(X) + \sigma(X) = 5 + 5 = 10$
On veut $P(0\leq X\leq10) = P(X\leq10)$
$F(10) = 1-\exp(-10/ 5) = 0.8647$
e) 50% des tubes fonctionnent sans défaillance pendant combien de temps?
$F(a) = 1-\exp(-a/ 5)=0.50$

Exp(-a/ 5) = 0.50 => Exp(a/ 5) = 1- 0.50
Ln([exp(a/ 5)=ln(0.5) => a = 5*ln(0.5) = 3.47 ans.

f) Le manufacturier veut donner une période de garantie sur le tube; toutefois, il ne veut pas remplacer plus que 10% de tubes au cours de cette période de garantie. Quelle devrait être la période de garantie?

$$\int_0^x 0.2exp^{-0.2}dt \leq 0.10 \quad \Rightarrow 1 - exp^{-0.2} \leq 0.1 \quad \Rightarrow x = ln(1/0.9)/0.2 \ = 0.527\ ans\,.$$

II-2 La loi de Weibull

L'expression loi de Weibull recouvre en fait toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissant en physique comme conséquence de certaines hypothèses. C'est en particulier, le cas de la loi exponentielle (**β = 1**) et de la loi normale (**β = 3**). Ces lois constituent surtout des approximations particulièrement utiles dans des techniques diverses alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. Une distribution à valeurs positives (ou, plus généralement mais moins fréquemment, à valeurs supérieures à une valeur donnée) a presque toujours la même allure. croît jusqu'à un maximum et décroît plus lentement. Il est alors possible de trouver dans la famille de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant β et à partir de la moyenne et la variance observées.

II-2-1 Fonction de R(t), F(t) et λ (t)

La forme générale de la fonction de fiabilité est désignée par R (t) représentant la probabilité de bon fonctionnement à l'instant t.

$$R(t) = e^{\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)} \qquad \text{(II-6)}$$

$$F(t) = 1 - e^{\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)} \qquad \text{(II-7)}$$

Son taux instantané de défaillance **λ (t)** est un estimateur de fiabilité. Il s’exprime par :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \qquad \text{(II-8)}$$

Remarque si :

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{MTBF} \qquad \text{(II-9)}$$

Sa densité de probabilité f(t) se calcul par l’expression suivante :

$$f(t) = \lambda(t)R(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)} \qquad \text{(II-10)}$$

II-2-2 Domaine d'application

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité car elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité

Un taux de panne croissant suggère une "usure ou un problème de fiabilité" : les éléments ont de plus en plus de chances de tomber en panne quand le temps passe

II-2-3 Papier de Weibull

Ce papier de Weibull sert à lire graphiquement les paramètres d'une loi de Weibull dans le cas où le paramètre γ est nul. En effet, la fonction de répartition associée à une loi de Weibull de paramètres β, γ = 0, η est définie par :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \Rightarrow \ln\big(1 - F(t)\big) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \Rightarrow -\ln\big(1 - F(t)\big) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \Rightarrow \ln\Big(-\ln\big(1 - F(t)\big)\Big) = \beta ln\left(\frac{t}{\eta}\right) \Rightarrow \ln\Big(-\ln\big(1 - F(t)\big)\Big) = \beta\ln(t) - \beta\ln(\eta) \Rightarrow Y = \beta X - \beta\ln(\eta) \quad \text{(II-11)}$$

La dernière équation obtenue est l'équation d'une droite dans le repère rouge (O ; X ; Y) où O est le point correspondant à **X = 0** et **Y = 0** soit à **t = 1** et **F (t) = 1 - 1/e**.
Le paramètre se lit directement à l'intersection de la droite précédente avec l'axe des abscisses puisque celui-ci est gradué en échelle logarithmique, ce qui est montré sur les figures III.2.a et III.2.b.
Le paramètre est le coefficient directeur de la droite précédente, il suffit de tracer une droite parallèle à la précédente et de lire directement le coefficient directeur de cette droite sur l'axe d'équation X = - 1.

II-2-4 Echelles utilisées sur le papier de Weibull :

→ Abscisse haute : échelle naturelle en X
→ Abscisse intermédiaire : échelle logarithmique (lecture du paramètre t)
→ Abscisse basse : échelle logarithmique (on fait correspondre à chaque valeur de t son logarithme népérien ln t).
→ Ordonnée gauche : on place les valeurs de F (t) en pourcentage en échelle ln (- ln (1 - F (t)))
→ Ordonnée sur l'axe X = -1 (lecture du paramètre) : ce sont les valeurs ln (- ln (1 - F (t)))

On construit tout d'abord le nuage de points (t ; F (t)) puis une droite d'ajustement D, on lit la valeur du paramètre η sur l'axe des abscisses puis on trace la parallèle D'à la droite D passant par l'origine O du repère, on lit le paramètre β sur l'axe d'équation X = -1.

II-2-5 .Signification des paramètres

- Paramètre d'échelle êta(η) : Ce paramètre permet d'utiliser le papier d'Allan Plait quelque soit l'ordre de grandeur de t. Il n'a donc pas à être interprété.

➢ <u>Paramètre de forme bêta (β)</u> : Ce paramètre donne des indications sur le mode des défaillances et sur l'évolution du taux de défaillances dans le temps. Les courbes des figures III.5.a, III.5.b et III.5.c, illustrent respectivement l'évolution de la fiabilité, de la fonction de répartition et du taux de défaillance en fonction du paramètre de forme (β).

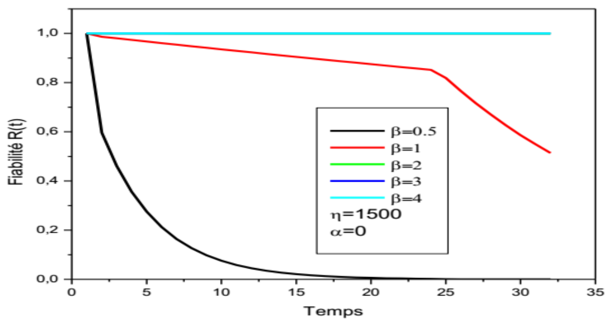


Figure III.5.a : Fiabilité

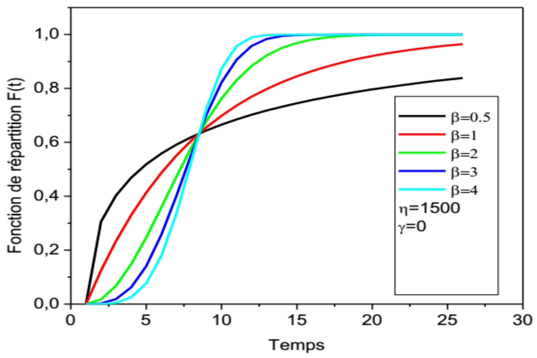


Figure III. 5. b : Fonction de répartition

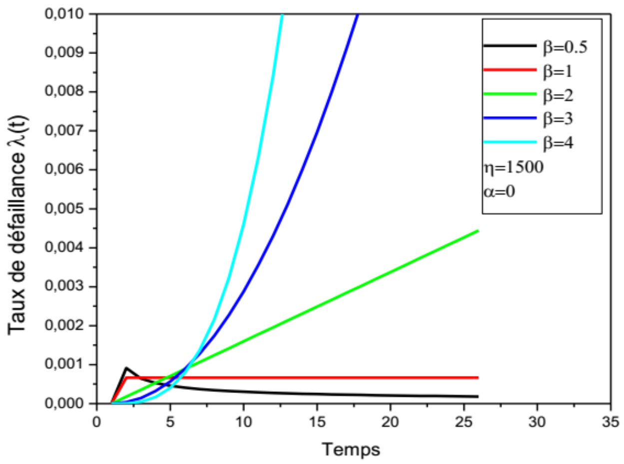


Figure III.5.c : Taux de défaillance

On peut donc remarquer que si :

$\beta < 1 \Rightarrow \ \lambda(t)\ d\acute{e}croit\ (periode\ de\ jeunne).$

$\beta = 1 \Rightarrow \ \lambda(t)\ constante\ \ (vie\ utile).$

$\beta > 1 \Rightarrow \ \lambda(t)\ croit\ (periode\ de\ vieillessement\ ).$

Remarque :

Si β = 3.5 => f (t) symétrique =>**distribution normale.**

Le paramètre de position gamma donne des indications sur le retard de la fonction f (t). La figure 3.6d montre cette variation.

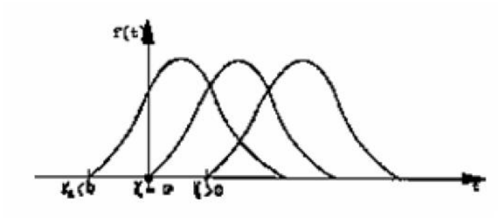


Figure 3.6d : Les courbes de f(t) [40]

☞Avec **γ < 0** ceci explique qu'une probabilité de défaillance est déjà présente au moment de l'installation du système.

☞ Avec **γ = 0** une probabilité de défaillance sera présente à partir de la mise en service du Système

☞ Avec **γ > 0** une probabilité de défaillance dans les premières utilisations du système est nulle.

II.5. Exemples d'application

II.5.1. Cas d'un réducteur de vitesse

Pour justifier notre choix de la loi de Weibull, nous considérons un exemple d'application sur un matériel mécanique. Il s'agit d'un réducteur de vitesse présenté à la figure II.7. Les différents composants et leurs paramètres sont présentés au tableau II.1.

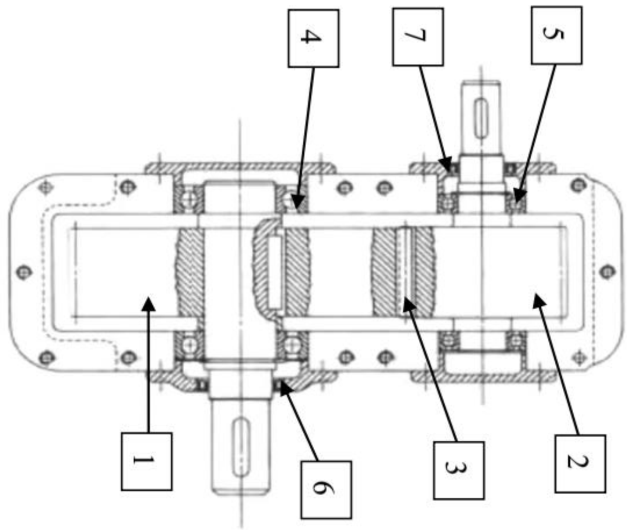


Figure III.7. Réducteur de vitesse

Les différents composants critiques vis-à-vis de la fiabilité sont les suivants: deux roues dentées, un engrenage, deux roulements et deux joints à lèvres, on propose de leurs associer comme loi de défaillance la distribution de Weibull dont les paramètres figurent dans le tableau 1 (η s'exprime en tours d'arbre d'entrée), en supposant les paramètres de décalage nuls (**γ=0**).

Tableau. II.1. Données Des composants du réducteur

Composant		η	ß
composant 1	Roue dentée 1	38000	1,4
composant 2	Roue dentée 2	70500	1,8
composant 3	Engrenage	1966600	13
composant 4	Roulement 1	9100000	1,11
composant 5	Roulement 2	15200000	1,11
composant 6	joint à lèvre radial 1	66000000	1,0
composant 7	joint à lèvre radial 2	6000000	1,0

Modélisation du système

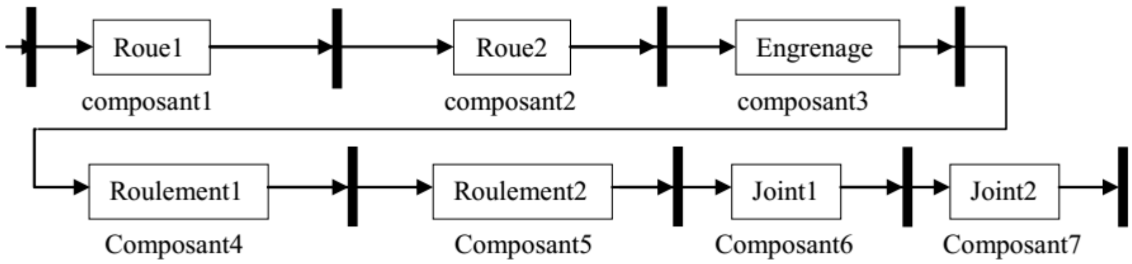


Figure III.8. Schéma bloc du réducteur

Calcul et résultats

La fiabilité du système est calculée en fonction des fiabilités des sept composants qui le constituent. On calcul les valeurs de R(t) et F(t) pour différents paramètres de la loi de Weibull à savoir :

$$R(t) = e^{\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)}$$

Composant 1 : γ=0, ß=0.1 et ŋ=38000

Composant 2 : γ= 0, ß= 0.4 et ŋ= 70500

Composant 3 : γ=0, ß=0.7 **et** ŋ=1966600

Composant 4 : γ=0, ß=1 **et** ŋ=9100000

Composant 5 : γ=0, ß=1.5 et ŋ=1520000

Composant 6 : γ=0 ß=3 et ŋ=66000000

Composant 7 : γ=0, ß=10 et ŋ=6000000

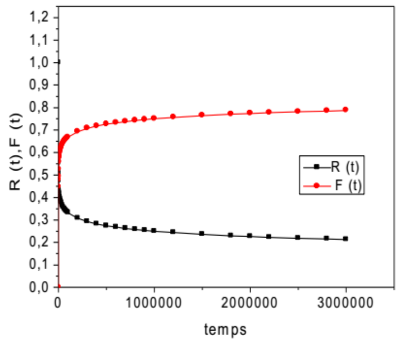


Figure III.9 courbes de R (t) et F (t) de la roue dentée 1

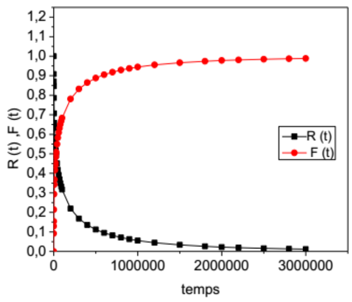


Figure III.10. courbes de R (t) et F (t) de la roue dentée 2

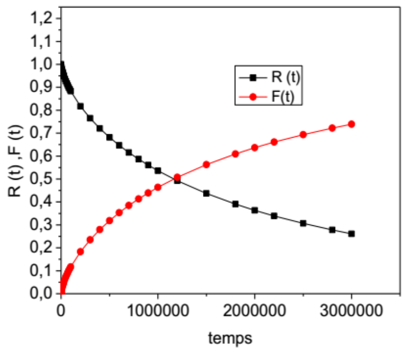


Figure III. 11 courbes de R (t) et F (t) de l'engrenage

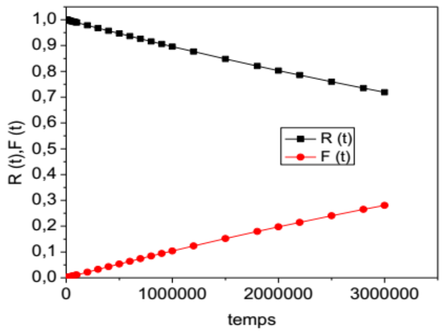


Figure III. 12 courbes de R (t) et F (t) de roulement 1

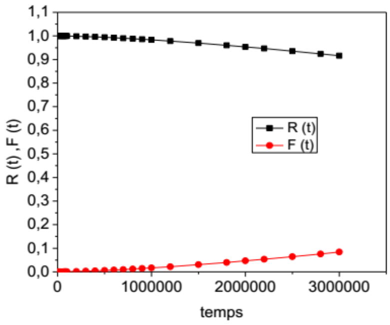


Figure III. 13 courbes de R (t) et F (t) de roulement 2

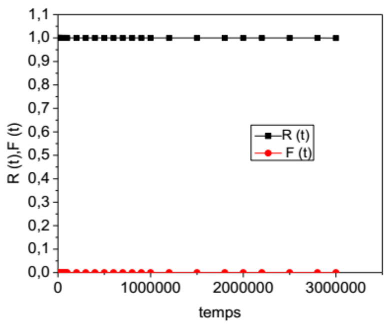


Figure III. 14 courbes de R (t) et F (t) de joint à lèvre radial 1

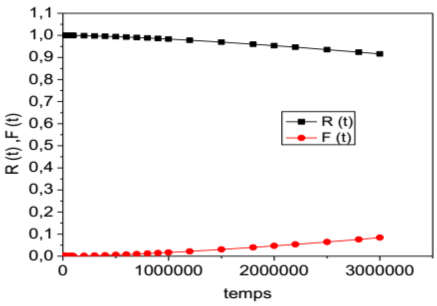


Figure III. 15 courbes de R (t) et F (t) de joint à lèvre radial 2

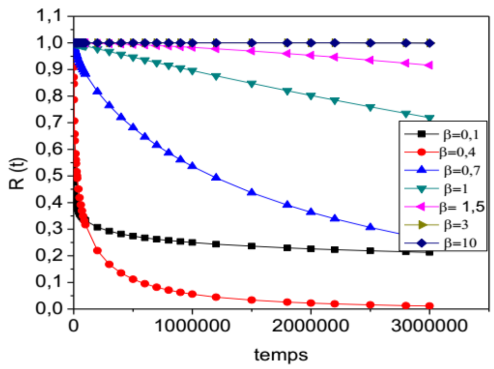


Figure IV. 16. a. Courbes R (t) pour ß = 0.1, 0.4 ,0.7 ,1 ,1.5, 3, 10

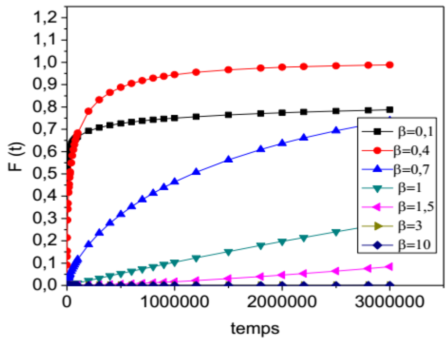


Figure IV.16.b. Courbe F (t) pour ß = 0.1, 0.4 ,0.7 ,1 ,1.5, 3, 10

Conclusion

A travers le précédant calcul, nous avons montré l'importance de l'utilisation de la loi de Weibull comme modèle pour décrire le comportement des systèmes mécaniques. Les différentes courbes obtenues pour le réducteur montrent clairement que la durée de vie du mécanisme est liée à celle de la roue dentée N° 1 et 2 en premier lieu Ce qui est à notre sens plus logique. Ceci conduit de manière générale à une bonne maîtrise de la maintenance de tout le système en mettant l'accent sur les éléments les plus pénalisants.

Maintenabilité

II-1 Définition

Dans des conditions données, la maintenabilité est l'aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits.

Maintenabilité = être rapidement dépanné

C'est aussi la probabilité de rétablir un système dans des conditions de fonctionnement spécifiées, en des limites de temps désirées, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits.

A partir de ces définitions, on distingue :

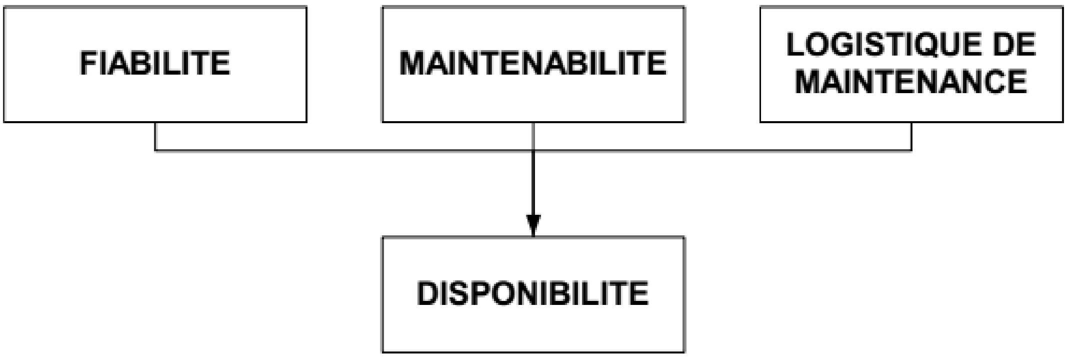
II-1-1 La maintenabilité intrinsèque : elle est « construite » dès la phase de conception à partir d'un cahier des charges prenant en compte les critères de maintenabilité (modularité, accessibilité, etc)

II-1-2 La maintenabilité prévisionnelle : elle est également « construite », mais à partir de l'objectif de disponibilité.

II-1-3 La maintenabilité opérationnelle : elle sera mesurée à partir des historiques d'interventions.

L'analyse de maintenabilité permettra d'estimer la MTTR ainsi que les lois probabilistes de maintenabilité (sur les mêmes modèles que la fiabilité).

II-2 Maintenabilité et disponibilité



Le schéma ci-dessus rappelle les composantes de la disponibilité d'un équipement. Il met en évidence :

- Que la maintenabilité est un des leviers d'action pour améliorer la disponibilité et donc la productivité d'un équipement.
- Que la fiabilité et la maintenabilité sont 2 notions parallèles de même importance (et dont les démarches d'analyse sont semblables).

II-3 Construction de la maintenabilité intrinsèque

La construction de cette maintenabilité doit prendre en compte un certain nombre de critères listés en pages suivantes et intégrés dès la phase de conception d'un nouvel équipement.

II-3-1 Modularité et interchangeabilité :

La conception modulaire d'un équipement repose sur l'idée de la simplification de sa fabrication, mais aussi de la simplification de sa maintenance grâce à l'interchangeabilité des modules.

La facilité de l'interchangeabilité (carte électronique par exemple) est un facteur favorisant le transfert de tâches vers les opérateurs, dans le cas de la TPM. Le module de remplacement peut provenir.

II-3-2 Standardisation

Elle vise à la simplification par réduction aussi bien en matière de fabrication que de logistique et de maintenance.

II-3-3 Accessibilité

Elle est caractérisée par la rapidité avec laquelle un élément peut être atteint. Elle doit être d'autant mieux maîtrisée que la fréquence probable des opérations de maintenance est grande. C'est le cas des filtres, des graisseurs, des points de réglage, de mesure, de surveillance, etc.

II-3-4 Aptitude à la pose et à la dépose :

Elle concerne les modules qui nécessitent un échange standard en préventif ou en cas de défaillance. Elle concerne les liaisons à supprimer pour isoler le module de son ensemble.

Quelques problèmes à optimiser pour améliorer l'aptitude à la pose / dépose

- réduction du nombre de liaisons ;
- réduction du nombre d'outils à utiliser (standardisation des liaisons) ;
- assurer un pré positionnement à la pose : repères, tétons de centrage, rails de guidage, détrompeurs ;
- absence de réglages, préférable à des réglages longs et délicats ;
- facilité d'accès.

II-3-5 Démontabilité

Elle concerne l'accès plus ou moins facile et plus ou moins rapide à des composants potentiellement « fragiles » et inaccessibles lorsque le sous-ensemble est monté.

II-4 Analyse de la maintenabilité opérationnelle

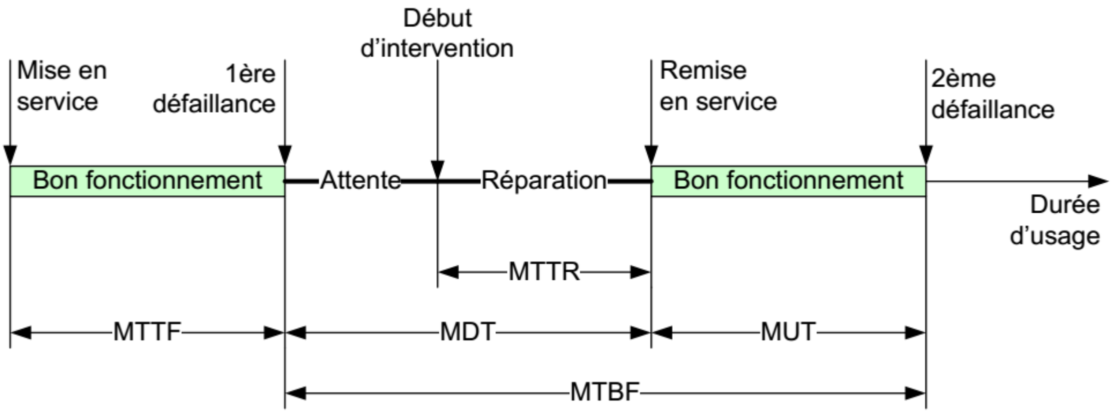
Les analyses reposent sur le traitement d'échantillons de N durées d'intervention TTR collectées sur l'historique des interventions relatives à un équipement. Comme pour la fiabilité, ces données peuvent se rapporter à un système complet ou se limiter aux seules interventions sur un module sensible en particulier.

II-5 Approche mathématique de la maintenabilité M(t)

La maintenabilité peut se caractériser par sa MTTR (Mean Time To Repair) ou encore Moyenne des Temps Techniques de Réparation.

$$\mathrm{MTTR} = \frac{\sum \text{temps d'intervention pour n pannes}}{\text{nombre de pannes}}$$

La figure ci-dessous schématise les états successifs que peut prendre un système réparable :



MTTF : temps de fonctionnement avant la première panne.

MTTR : temps entre l'instant de l'intervention et l'instant de fin de réparation.

MDT : temps entre l'instant de panne jusqu' à la fin de réparation.

MUT : temps enter l'instant de démarrage après une panne jusqu' à la panne suivante.

II-6 Analogie des analyses de fiabilité et de maintenabilité

FIABILITE	MAINTENABILITE
Probabilité « durée de bon fonctionnement »	Probabilité de « durée de réparation »
$\boldsymbol{R(t) = P(T_p > t)}$	$\boldsymbol{M(t) = P(T_R < t)}$
Variable aléatoire : temps de fonctionnement	Variable aléatoire : temps de réparation
Densité de probabilité du temps avant défaillance : f(t)	Densité de probabilité du temps de réparation : g(t)
Fiabilité : $R(t) = \int_t^{+\infty} f(t)dt = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	**Maintenabilité :** $M(t) = \int_0^t g(t)dt = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$
Taux de défaillance λ(t) : $\lambda(t)dt = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$	**Taux de réparation μ(t) :** $\mu(t)dt = \frac{g(t)}{1-M(t)}$

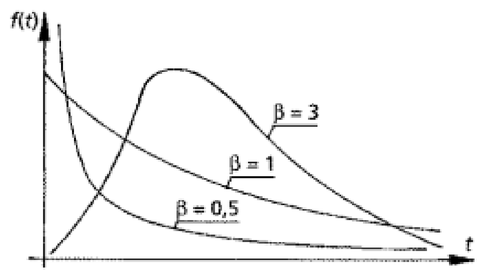
<table>
<tr>
<td>MTBF= mean time between failures :

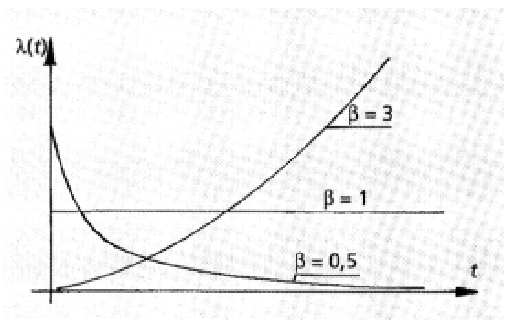
$$MTBF = \int_0^{+\infty} t.f(t)dt = \int_0^{+\infty} R(t)dt$$</td>
<td>MTTR= mean time to repair :

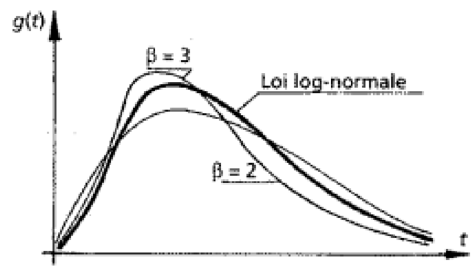
$$MTTR = \int_0^{+\infty} t.g(t)dt$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Relation fondamentale:

$$f(t) = \lambda(t).e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$</td>
<td>Relation fondamentale:

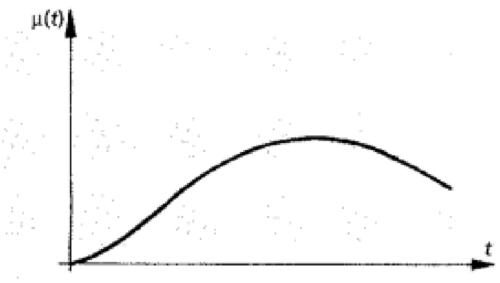
$$g(t) = \mu(t).e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Lois usuelles:
Si λ= constant, loi exponentielle:
$$R(t) = e^{-\lambda t}$$
Si λ(t) est variable, loi de Weibull (loi à 3 paramètres)




</td>
<td>Lois usuelles:
Si μ= constant, loi exponentielle:
$$M(t) = 1 - e^{-\mu t}$$
Si μ(t) est variable, loi log-normale (distribution fréquence des durées d'interventions de maintenance), paramètres m et σ



Une modélisation par la loi de Weibull avec $2 < \beta < 3$ est possible


</td>
</tr>
<tr>
<td>Application : systèmes réparables ou non</td>
<td>Application : systèmes réparables</td>
</tr>
</table>

II-7 Exemples d'application

On possède un échantillon de N=19 valeurs issues du retour de bons de travaux en clientèle, dans le cadre d'un contrat de maintenance. Ces interventions correctives se rapportent à un même module fragile de l'équipement à maintenir. Une révision des prix du contrat s'impose. Mais sur quelle base de temps ?

L'objectif est donc de déterminer, à l'aide de la loi LVE la loi de maintenabilité du module et sa MTTR.

Les TTR relevés et classés par ordre croissant sont les suivants :

Ordre i	TTR (heures)	M (ti)
1	3.4	
2	3.6	
3	4.3	
4	4.5	
5	4.8	
6	5.5	
7	5.9	
8	6.4	
9	6.8	
10	7.3	
11	8	
12	8.5	
13	9	
14	9.7	
15	10.3	
16	11.5	
17	12.7	
18	13.9	
19	16	

La loi des valeurs extrêmes LVE a pour fonction de répartition :

$$M(t) = e^{-e^{-a(t-u)}} = P(TTR < t)$$

Les paramètres « **a** » et « u » représentent respectivement **l'inverse de la pente** du « **papier fonctionnel de Gumbel** » et le « **paramètre de localisation** ».

L'espérance mathématique de la loi a pour valeur :

$$E(t) = MTTR = u + \frac{0.5778}{a}$$

Travail demandé :

1. Déterminer les valeurs des M(t_i) par approximation des rangs médians et compléter le tableau ci-dessus
2. Porter les couples de points (M(t_i), TTR_i) sur le papier fonctionnel de Gumbel
3. Tracer la droite de régression
4. Déterminer les paramètres « a » et « u » de la loi de Gumbel
5. Etablir la loi de maintenabilité
6. Calculer la MTTR

7. Calculer la probabilité associée à la MTTR
8. Calculer la probabilité de terminer en moins de 11 heures puis en moins de 5 heures
9. Refaire les questions 7 et 8 de manière graphique
10. Déterminer le TTR correspondant à une probabilité de 90%

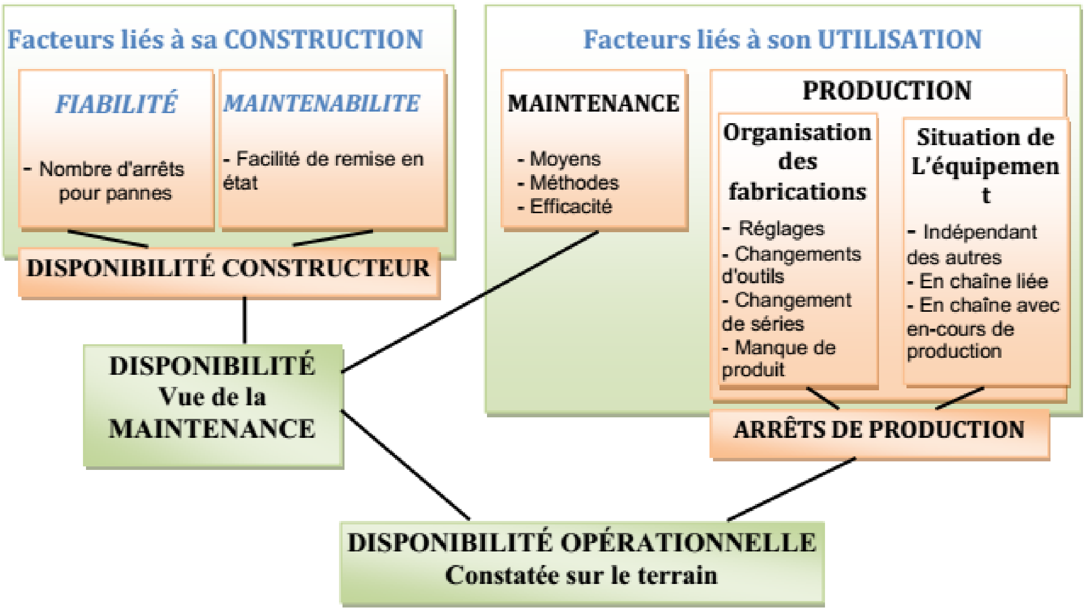
Chapitre III : Concept de Disponibilité

III-1 Introduction

La politique de maintenance d'une entreprise est fondamentalement basée sur la disponibilité du matériel impliqué dans le système de production. Pour qu'un équipement présente une bonne disponibilité, il doit :

- **Avoir le moins possible d'arrêts de production**
- **Etre rapidement remis en bon état s'il tombe en panne**

La disponibilité d'un équipement dépend de nombreux facteurs :



La disponibilité allie donc les notions de fiabilité et de maintenabilité
L'augmentation de la disponibilité passe par :

- **L'allongement de la MTBF (action sur la fiabilité)**
- **La notion de le MTTR (action sur la maintenance)**

III-2 Quantification de la disponibilité

La disponibilité peut se mesurer :

- sur un intervalle de temps donné (disponibilité moyenne),
- à un instant donné (disponibilité instantanée),

- à la limite, si elle existe, de la disponibilité instantanée lorsque t→∞ (disponibilité asymptotique)

III-2-1 Disponibilité moyenne

$$D_O = \frac{temps\ de\ disponibilité}{temps\ de\ disponibilité + temps\ de\ indisponibilité} = \frac{TCBF}{TCBF + TCI} = \frac{MUT}{MUT + TMI}$$

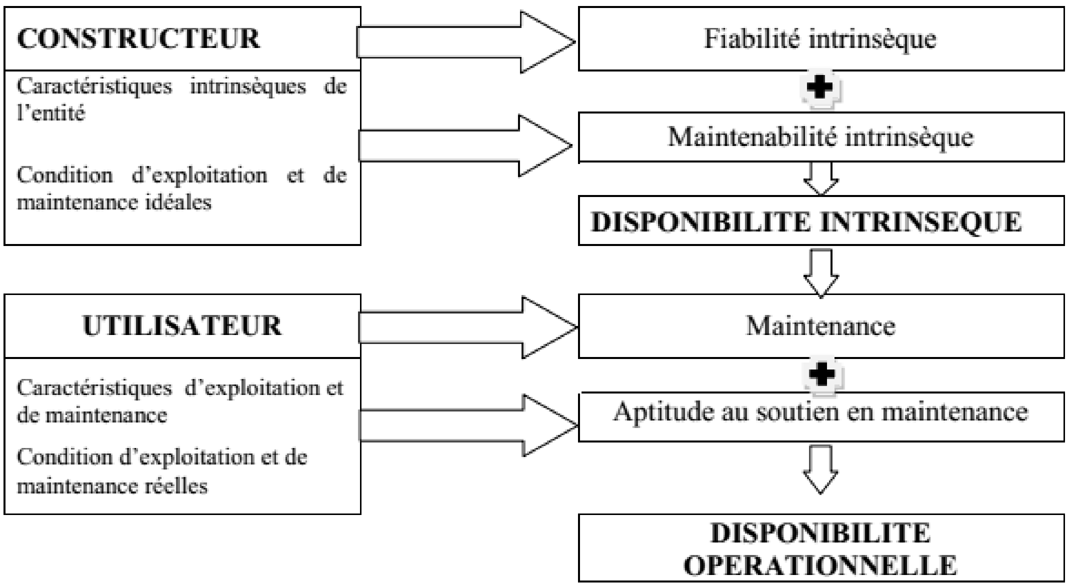
Où :

• TCBF = temps cumulé de bon fonctionnement

• TCI = Temps cumulé d'immobilisation (les temps d'intervention et les temps logistique).

III-2-2 Disponibilité intrinsèque

Elle exprime le point de vue du concepteur. Ce dernier a conçu et fabriqué le produit en lui donnant un certain nombre de caractéristiques intrinsèques, c'est à dire des caractéristiques qui prennent en compte les conditions d'installation, d'utilisation, de maintenance et d'environnement, supposées idéales.



$$D_i = \frac{TBF}{TBF + TTR + TTE}$$

⇨ TBF : temps de bon fonctionnement

⇨ TTR : temps techniques de réparation

⇨ TTE : temps techniques d'exploitation

Exemple:

Un fabricant de machines-outils prévoit en accord avec son client la disponibilité intrinsèque d'une machine en prenant compte des conditions idéales d'exploitation et de maintenance :

⇨ Temps d'ouverture mensuel = 400 heures

⇨ 1 changement de fabrication par mois = 6 heures

⇨ Maintenance corrective mensuelle : taux de défaillance = 1 pannes / mois ; TTR estimé = 4 heures
⇨ Maintenance préventive mensuelle = 3 heures

Déterminer la disponibilité intrinsèque ?

TBF=400-6-4-3=387 heures. TTE=6 heures. TTR=4+3= 7 heures . D_i=(387)/(387+6+7)=0.96

III-2-3 Disponibilité opérationnelle

Il s'agit de prendre en compte les conditions réelles d'exploitation et de maintenance. C'est la disponibilité du point de vue de l'utilisateur.
Le calcul de **Do** fait appel aux mêmes paramètres **TBF**, **TTR** et **TTE** sauf que ces 3 paramètres ne sont plus basés sur les conditions idéales de fonctionnement mais sur les conditions réelles (historiques d'exploitation).

Exemple :
Sur la machine-outil précédente, une étude d'exploitation sur un mois a conduit aux résultats réels suivants :
⇨ Temps d'ouverture mensuel = 400 heures
⇨ Changement de production = 6 heures
⇨ Manque approvisionnement matière = 3 heures
⇨ Maintenance préventive = 3 heures
⇨ Maintenance corrective = 8 heures (3 heures d'attente maintenance + 5 heures d'intervention)

TBF=400-6-3-3-8=380 heures. TTE=6+3=9 . TTR=3+8=11. D_o=380/(380+9+11)=0.95

Exemples

Machine-outil :
Le responsable maintenance d'une entreprise a le fichier historique d'un matériel équipé d'un terminal de saisie des données de production. Ces données sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

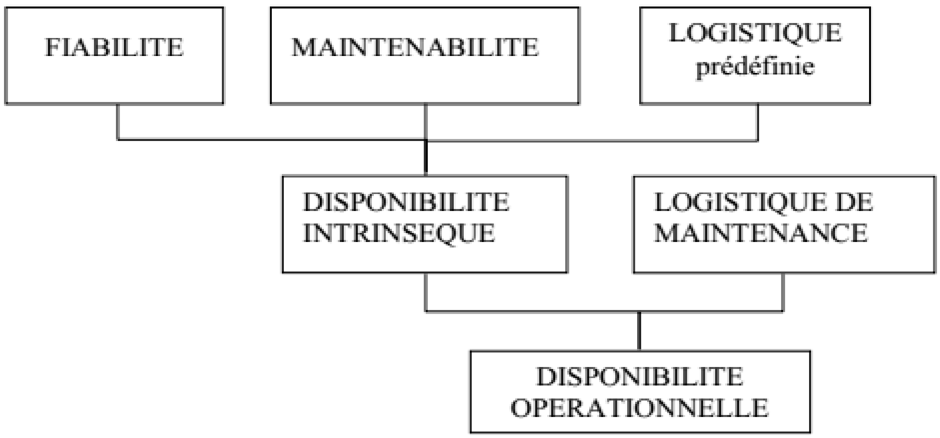
N°	Défaillance	Cause	TBF en h.	TTR en h.
1	Moteur	Electrique	80	2
2	Moteur	Electrique	40	3
3	Broche	Mécanique	50	2
4	Broche	Mécanique	100	8
5	Avance	Electrique	60	5
6	Avance	Electrique	40	2
7	Lubrification	Mécanique	20	3
8	Lubrification	Hydraulique	5	4
9	Lubrification	Hydraulique	10	3
10	Lubrification	Hydraulique	20	1.25

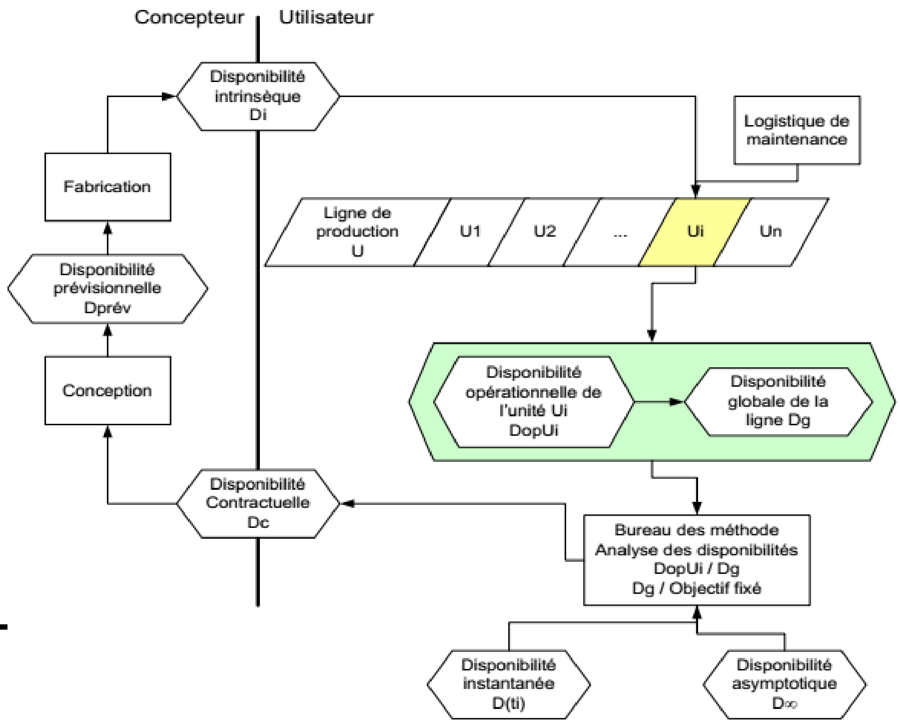
Calculer : $\sum TBF$; $\sum TTR$; $MTBF$; $MTTR$; D_i

Chapitre IV : *La Disponibilité des Systèmes Réparables*

IV-1 Différentes Formes

La disponibilité est l'aptitude d'un bien à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs est assurée. Les moyens autres que la logistique de maintenance (personnel, documentation, rechanges, etc.) n'affectent pas la disponibilité d'un bien.
La disponibilité se traduit par « ***Availability*** » et se note souvent A(t).
Seuls les temps d'arrêt intrinsèques, appelés également « temps d'arrêt propres » et caractérisés par la **MTI** (moyenne des temps d'indisponibilité), seront relevés pour évaluer la disponibilité opérationnelle d'un système.
La figure ci-dessous montre les 3 facteurs d'influence de la disponibilité intrinsèque Di.





La figure ci-après schématise les différentes formes de disponibilité et leur contexte.

IV-1-1 Disponibilité « propre » ou opérationnelle de l'unité de production Ui

Nommée **disponibilité opérationnelle** et notée ***Dop***, l'évaluation de cette disponibilité est obtenue à partir des mesures de temps saisies à partir des états de l'équipement. Elle est évaluée à partir des relevés de temps relatifs :

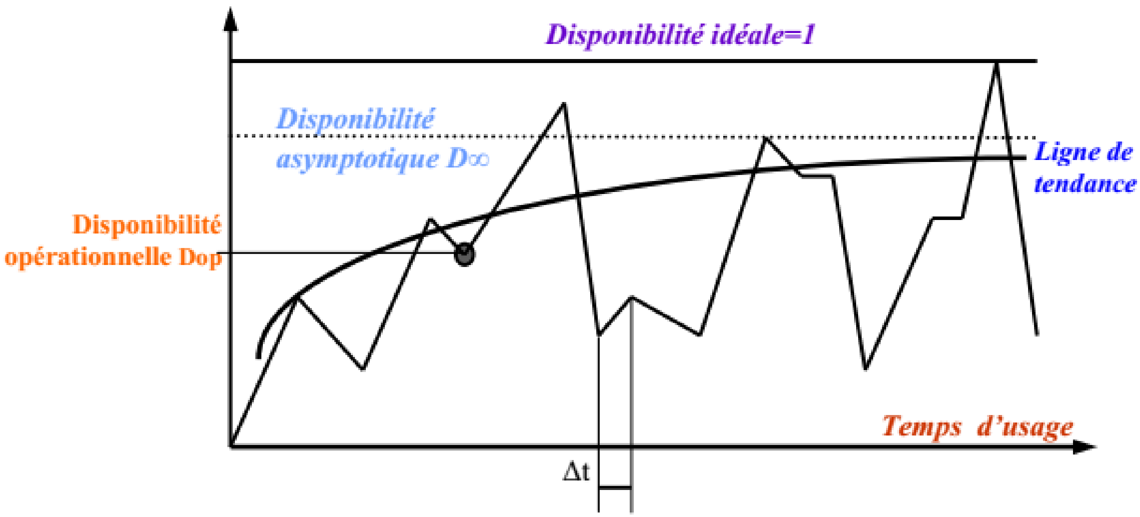
- A une période de temps (1 jour, 1 semaine, n mois, 1 an)
- A un équipement ou, s'il s'agit d'une ligne de production, d'un tronçon U_i
- Aux temps d'indisponibilité propre de moyenne MTI et des durées de bon fonctionnement de moyenne MTBF suivant le modèle :

$$D_{op} = \frac{MTBF}{MTBF + MTI} < 1$$

IV-1-2 Disponibilité intrinsèque ou asymptotique

Pour un équipement donnée, il existe une limite de disponibilité **D∞** au même titre qu'il existe une limite de performance de production (temps de cycle ou cadence) qui est mieux connue que D∞.

Cette disponibilité intrinsèque est une caractéristique initiale de l'équipement, de valeur difficile à connaître à priori ; c'est normalement vers cette valeur que doit tendre la Dop. Par contre, elle est la résultante de la prise en compte initiale des critères de fiabilité et de maintenabilité qui doivent figurer au cahier des charges de l'équipement.



IV-1-3 Disponibilité instantanée D(t_i)

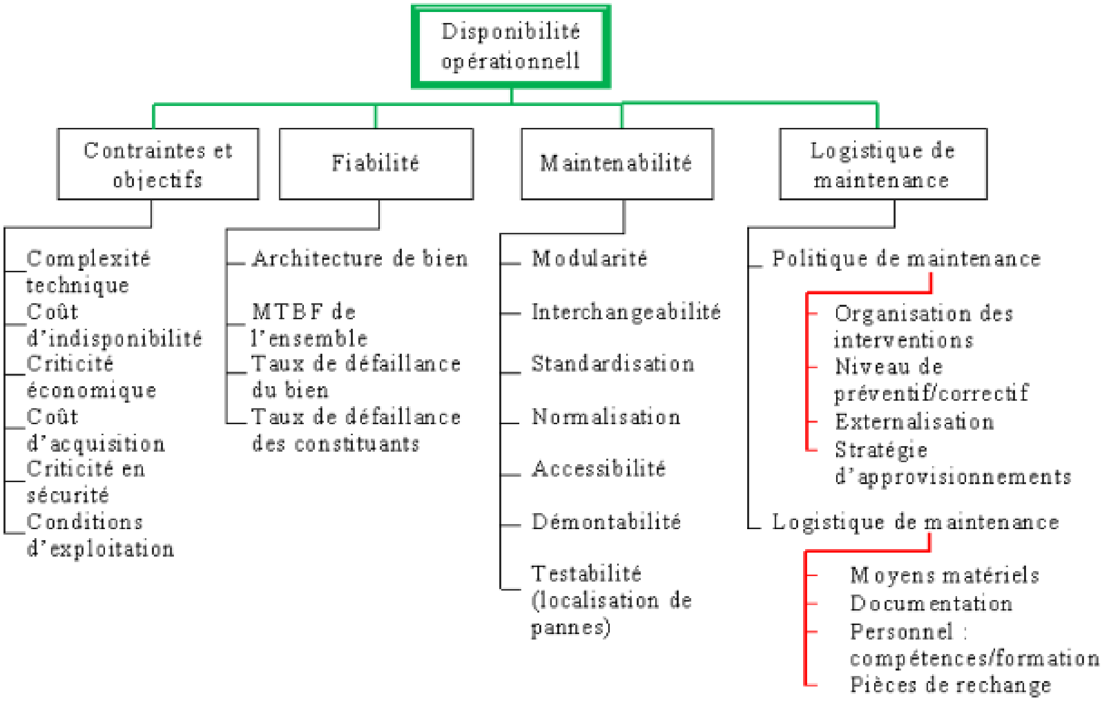
Elle permet de montrer l'existence d'une disponibilité asymptotique.

IV-1-4 Disponibilité contractuelle Dc et disponibilité prévisionnelle Dprev

Certains contrats d'achat d'équipement imposent une valeur allouée Dc qu'il appartient au concepteur de « construire » en réalisant une modélisation à partir de valeurs supposées (bases de données) de MTBF et de MTTR. Cette disponibilité prévisionnelle devra être confrontée à la Dop mesurée suivant des procédures précisées et acceptées par les 2 parties fournisseur / utilisateur – client.

IV-2 Analyse de la disponibilité opérationnelle

Facteurs influents sur la disponibilité opérationnelle



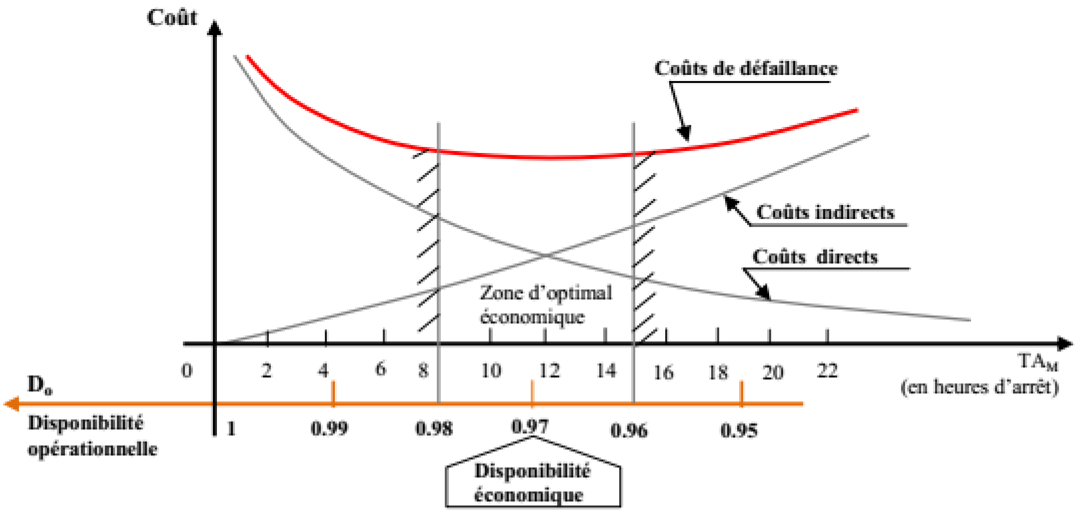
L'analyse qualitative de la disponibilité passe par l'analyse des MTI. Après avoir classé et sélectionné certaines indisponibilités critiques ou anormales, on peut analyser l'indisponibilité à 3 niveaux :

1. **Analyse de la défaillance** à l'origine de l'indisponibilité. S'il est possible de la guérir ou de la prévenir, l'analyse s'arrête là, sinon,
2. **Analyse des critères de disponibilité** (cf. ci-dessus). Il faut alors identifier le ou les critères à l'origine des temps d'arrêt propres anormalement pénalisants. On recherche ensuite des améliorations qui peuvent être de nature technique ou organisationnelle.
3. **Analyse des conditions de l'intervention ou de la série d'interventions.** Il s'agit de remettre en cause la logistique de maintenance et son organisation (ex : sur 2h d'indisponibilité, on met en évidence qu'il a fallu 1,25h pour rechercher une pièce de rechange au magasin, puis comme on ne la trouvait pas, on a été obligé de l'acheter chez le distributeur voisin).

L'analyse de la disponibilité passe aussi par une **approche économique** selon 2 objectifs possibles :

1. Obtenir la meilleure disponibilité au moindre coût pour un budget fixé
2. Obtenir une disponibilité performante, en mettant en œuvre la meilleure logistique de maintenance possible

L'environnement économique de l'entreprise et du produit concerné conditionne la politique à appliquer, donc l'objectif de disponibilité fixé à la maintenance. Cependant, la productivité dépend obligatoirement des 3 facteurs suivants : cadence de production, **Dop** et qualité des produits ; éléments qui sont à la base du calcul du TRS.



IV-3 Modèles d'évaluation de Dop

Disponibilité opérationnelle propre

$$D_{op} = \frac{MTBF}{MTBF + MTI} = \frac{MTBF + RT}{MTBF + MTTR + MTL} = \frac{MTBM}{MTBM + MMT}$$

MTBF : moyenne des temps de bon fonctionnement ; MTI : moyenne des temps l'indisponibilité ; RT : « ready time » ou temps moyens d'attente, le système étant prêt à fonctionner ; MTL : moyenne des temps logistique ; MTTR : moyenne des temps techniques de réparation ; MTBM : temps moyen entre actions de maintenance préventive ou corrective ; MMT : temps moyen des actions préventives ou correctives.

IV-4 Modélisation de la disponibilité instantanée

On se place dans l'hypothèse exponentielle, avec les taux de défaillance λ et de réparation μ constants et indépendants du temps

$$\lambda = \frac{1}{MTBF}\ ;\ \mu = \frac{1}{MTTR}$$

On définit la disponibilité instantanée d'un système réparable par :

$$D(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

- Disponibilité : D(t) =P0(t) Probabilité que le système fonctionne = probabilité qu'il y ait 0 défaillance.
- Indisponibilité : I(t)=1-D (t)=P1(t) probabilité de non fonctionnement = probabilité qu'il y ait une défaillance.
- La qualité initiale du système garantit que : P0(0)=1 et que P1(0)=0 .
- Par complémentarité, P1(t) = 1 – P0(t).

  Pour que le système fonctionne à l'instant (t+dt), avec une probabilité P0(t+dt), il faut :

⇨ Qu'il fonctionne à l'instant *t* et qu'il n'y ait pas de défaillance entre *t* et *(t + dt)* : probabilité =P0(t)* (1-λdt).

⇨ Ou qu'il ne fonctionne pas à l'instant, mais qu'il soit remis en état à *(t + dt)* : probabilité = P0(t)*µ*dt .

Equation des probabilités : $P0(t+dt) = P0(t)(1-\lambda dt) + (1-P0(t))\mu dt$

En divisant par tendant vers 0 : $P0(t) + P0(t)(\lambda+\mu) = \mu$, la solution de cette équation est :

$$D(t) = P0(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Quand t→∞ D(t) tend vers une limite asymptotique D∞ qui se traduit par les formules suivantes : $D_\infty = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{1+\frac{MTTR}{MTBF}} = \frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$

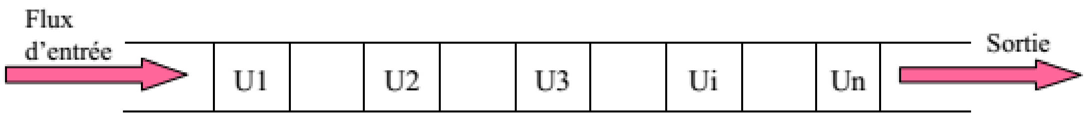
Le rapport (MTTR / MTBF) est appelé le « rapport de maintenance ».

IV-5 Composition des disponibilités asymptotiques

Cas possibles	Formule de calcul	Exemple
n unités indépendantes en série	$Dg = \prod_{i=1}^{n} DUi$	Soient 2 unités de disponibilités 0,9 et 0,8 en série : Dg = 0,9 x 0,8 = 0,72
n unités indépendantes en //	$Dg = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-DUi)$	Soient 2 unités de disponibilités 0,9 et 0,8 en // : Dg = 1-(1-0,9) x(1- 0,8) = 0,98
n unités dépendantes en série	$Dg = 1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$	
Redondance active de n unités identiques	$Dg = 1 - \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$	

IV-6 Composition des disponibilités opérationnelles

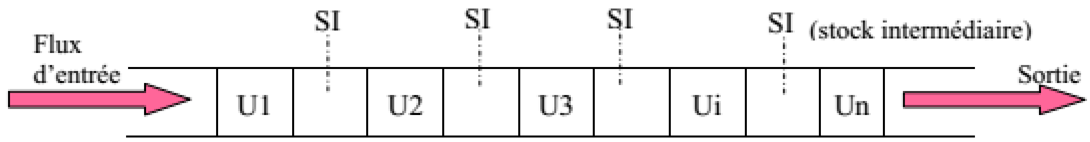
IV-6-1 Modèle « série » des lignes à unités liées (ou dépendantes)



$$D_g = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{DU_1}\right] - (n-1)}$$

IV-6-2 Unités en série indépendantes

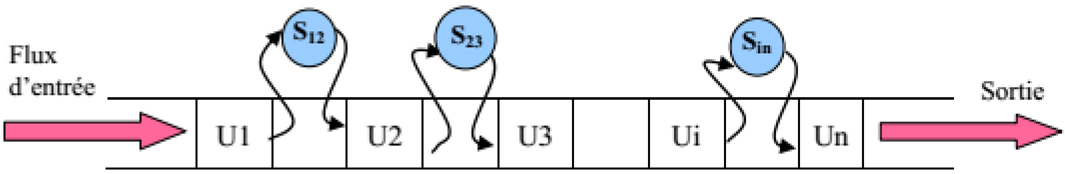
Sur ce type de ligne, l'arrêt d'une unité n'entraîne pas l'arrêt de l'ensemble de la ligne : existence d'un stock intermédiaire « **SI** » permettant d'alimenter la machine en aval de l'unité défaillante pendant une durée établie à partir du temps moyen d'arrêt le plus important enregistré en régime normal.
Les stocks intermédiaires « SI » sont reconstitués en faisant varier les cadences.



$$D_{(chaine)} = \prod_{i=1}^{n}(D_i)$$

IV-6-3 Chaînes à « rempotage – dépotage »

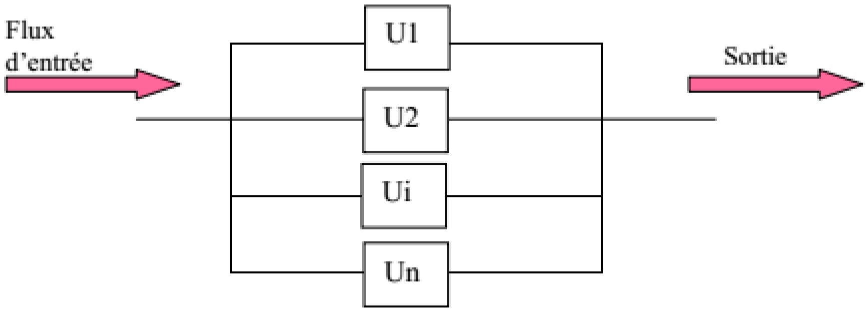
Sur ce type de ligne, il est possible, en cas de panne d'une unité de « rempoter » le stock aval et de « dépoter » le stock amont. Ceci n'est souvent possible que pour un ***court arrêt***.



$$D_{(chaine)} = \min(D_1, D_2 \dots, D_n)$$

IV-6-4 Disponibilité des chaînes à unités en redondance active ; modèle « parallèle » :

Dans ce type de ligne, toutes les unités permettant d'accomplir la fonction requise, elles fonctionnent simultanément en dessous de leur capacité théorique. En cas de panne, leurs cadences augmentent pour accomplir la fonction requise.



$$D_{(chaine)} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - D_i)$$