Série de TD 01

Méthodes de résolution des équations non linéaires $f(x)=0$.

— **Ex. 1.1:**

Soit à résoudre l'équation suivante : $|x|e^x - 1 = 0$ pour $x \neq 0$.

1. Utiliser la méthode graphique pour trouver le nombre de racines de cette équation. Vérifier les intervalles trouvés par le calcul.
2. Utiliser la méthode de Bisection pour trouver les racines de cette équation avec une précision de 0.01.

— **Ex. 1.2:**

Soit l'équation : $f(x) = x^2 e^x - 1 = 0$.

1. Ecrire et vérifier la convergence de toutes les formes $x = g(x)$ de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $x \in [0.5, 1]$.
2. Trouver la racine de l'équation par la méthode des approximations successives si on donne $x_0 = 0.500$ et $\varepsilon = 0.001$.

— **Ex. 1.3:**

On donne l'équation : $|x| - \cos(x) = 0$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (x en radian)

1. Trouver graphiquement le nombre de racines de cette équation et vérifier par le calcul les intervalles trouvés.
2. Vérifier les conditions de convergence pour la méthode de Newton-Raphson pour l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. Trouver la racine qui appartient à cet intervalle avec une précision 0.001 et un estimé initial $x_0 = 0.500$.
4. En déduire les autres racines.

— **Ex. 1.4:(a domicile)**

Reprendre l'équation de l' **Ex. 1.1:** est essayé de calculer la racine négative $\bar{x} \in [0.25, 1.00]$ par la méthode de Newton-Raphson.

- a. Vérifier les conditions de convergence de la méthode.
- b. Calculer la racine si on donne $x_0 = 0.500$ et $\varepsilon = 0.001$.

Série de TD 02

Interpolation polynomiale

- Polynôme de LAGRANGE
- Polynôme de NEWTON

Ex. 2.1 :

On donne la fonction : $f(x) = 2^x x - 1$,

1. Trouver le polynôme de **Lagrange** pour la fonction f basé sur les points 0, 1, 2 et 3.
2. Trouver le terme d'erreur d'interpolation $\varepsilon(x)$.
3. Calculer l'erreur d'interpolation pour f(1.5) et f(4).

Ex. 2.2:

Soit la fonction : $f(x) = |x| - \cos(x)$ avec x en radians.

1. Calculer la table des différences divisées pour la fonction f aux points $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, et 1$.
2. Calculer les polynômes de **Newton** de la fonction f.
3. Trouver le terme d'erreur d'interpolation.

Ex. 2.3: (a domicile) :

On donne la table suivante:

x	0	1	2	3
F(x)	1.00	0.87	0.50	0.00

1. Dresser la table des différences divisées pour f(x).
2. Trouver le polynôme de Newton basé sur cette table.
3. Calculer P(1.5) et P(2.1).
4. Sachant que $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, avec x en radians. Trouver le terme d'erreur $\varepsilon(x)$ et évaluer l'erreur commise lors du calcul de P(1.5) et P(2.1).

Remarque: Prenez trois chiffres après la virgule

Série de TD 03

- Méthode des Trapèzes
- Méthode de Simpson
- Formules de quadrature

Ex. 3.1 :

Un sous-marin se déplace avec une vitesse $V(t)$ donnée par la table suivante.

T en heures	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
V(t) en Km/h	6.00	7.50	8.00	9.00	8.50	10.5	9.5	7.0	6.0

Calculer la distance parcourue par le sous-marin durant deux heures, en utilisant :

- La Méthode de Trapèze.
- La Méthode de Simpson.
-

Ex. 3.2

Trouver le nombre de tranche et le pas h , pour que la valeur absolue de l'erreur dans les formules de trapèze et de Simpson ne dépasse pas $5 \cdot 10^{-9}$ si on calcule l'intégrale.

$$I = \int_2^7 \frac{dx}{x} = \ln(7) - \ln(2) \approx 1.252762968$$

Ex. 3.3

Soit à calculer les intégrales ci-dessous en utilisant une formule de quadrature qui a les formes A et B:

$$\int_0^1 \sin(x) dx, \int_0^1 e^x dx, \int_0^1 x dx \quad x \text{ en radians.}$$

- A. $\int_0^1 f(x) dx = A_0 f(0) + A_1 f(1)$.
B. $\int_0^1 f(x) dx = A_0 f(0) + A_1 f(1/2) + A_2 f(1)$.

❖ Que peut-on dire des deux formules ?

Ex. 3.5 (Domicile)

On donne les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^3 \frac{xdx}{1+x^2}, \quad I_2 = \int_1^3 \frac{xdx}{7-2x}$$

Calculer ces intégrales en utilisant :

- La Méthode des Trapèzes avec 1, 2,4 et 8 tranches
- La Méthode de Simpson avec 2, 4,6 et 8 tranches

Série de TD 04

Résolution directe des systèmes d'équations linéaires

- Méthode d'éliminations de GAUSS
- Algorithme de TOMAS(TDAMA)
- Méthode de Crout-Doolittle (LU)

Ex. 4.1

On donne le système suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\ 2x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle $AX=B$?
2. Trouver le nombre des opérations nécessaire pour résoudre le système par la méthode de GAUSS?
3. Résoudre le système?
4. Trouver le déterminant de la matrice?

Ex. 4.2

Soit le système suivant:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 19 \\ -3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre ce système par TDMA?

Ex. 4.3

Soit le système suivant:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre le système par la méthode de Crout-Doolittle (LU) ?

Ex. 4.4 (à domicile)

On donne le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Résoudre ce système par la méthode de GAUSS?
2. Utiliser l'élimination de Gauss pour trouver la parabole qui passe par les points (2,11),(1,6),(-1,2) ?

Série de TD 05
Résolution des équations différentielles

- Méthode d'Euler
- Méthode d'Euler modifiée
- Méthode de Runge Kutta RK

Ex.5.1

On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = t^2 - y, & t \in [0, 0.2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode d'Euler et Euler modifiée :

Calculer $y_1, y_2, y_3, \dots, y_M$ pour les trois cas **(i)** $h=0.2$, $M=1$; **(ii)** $h=0.1$, $M=2$ et **(iii)** $h=0.05$, $M=4$

Comparer la solution exacte $y(0.2)$ avec les trois approximations dans 1

Ex. 5.2

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode de Range Kutta :

$$\begin{cases} y' = -ty, & t \in [0, 0.2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calculer $y_1, y_2, y_3, \dots, y_M$ pour les deux cas **(i)** $h=0.2$, $M=1$;

(ii) $h=0.1$, $M=2$.

Comparer la solution exacte $y(0.2)$ avec les deux approximations dans 1

Ex. 4.3

Dans une réaction chimique, une molécule de A se combine avec une de B pour donner une molécule du produit C. on a trouvé que la concentration $y(t)$ de C, au temps t , est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = k(a - y)(b - y) & t \in [0, 20] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$k=0.01$, a et b concentrations initiales respectivement de A et B en millimole/litre, $a=70$ et $b=50$. utiliser la méthode de Runge-Kutta pour trouver $y(t)$ sur $[0, 20]$ avec $h=2$.

Ex. 4.4 (Domicile)

Résoudre les équations 1,2et 3 en utilisant la méthode d'Euler, d'Euler modifiée et de range-Kutta

$$1) y' = 3y + 3t, \quad 2) y' = e^{-2t} - 2y, \quad 3) y' = 2ty^2$$

avec $t \in [0,2]$ et $y(0) = 1$ pour 1,3 et $y(0) = 0.1$ pour 2. Prendre $h=0.2$