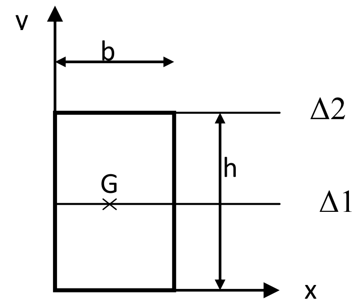
Université Hamma Lakhdar Eloued *année universitaire : 2019/2020*
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
2éme année License Génie civil, Hydraulique, Travaux publics
Module Résistance des matériaux

Série TD N°02

Caractéristiques géométriques des sections

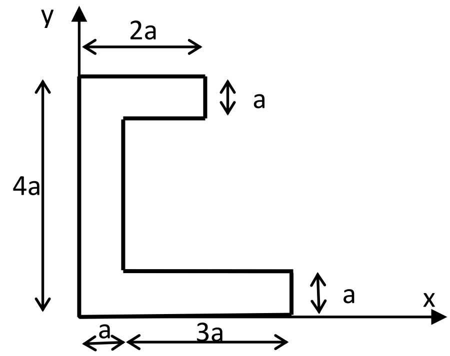
Exercice N°1 :



Soit la section plane de largeur b et de hauteur h :

1) Calculer le moment statique de cette section par rapport aux axes x, y, Δ1, Δ2
2) Calculer le moment d'inertie de la même section par rapport aux axes précédents

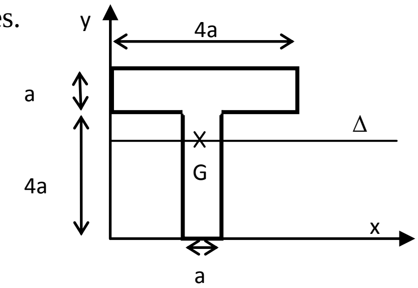
Exercice N°2 :



La figure ci-après présente la section d'un élément préfabriqué en béton armé. Calculer les coordonnées du centre de gravité (x_G , y_G) pour cette section.

Exercice N° 3:

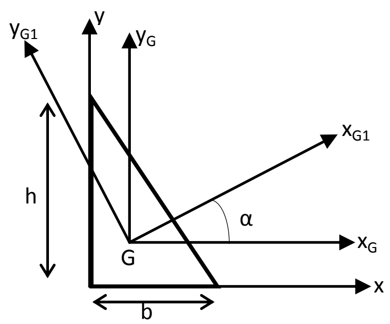
La section d'une poutre et de forme en T comme le montre la figure ci-après. Calculer le moment d'inertie de cette section par rapport aux axes x, y, Δ



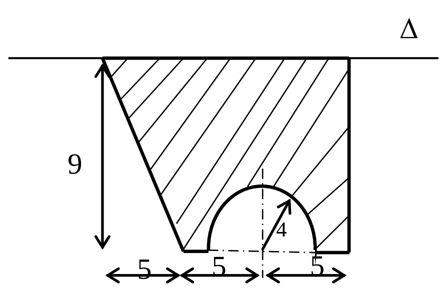
Exercice N° 4:

Soit la section suivante :

1) Calculer la surface du triangle en utilisant l'intégrale
2) Déterminer la position du centre de gravité (x_G , y_G)
3) Calculer les moments d'inertie I_x , I_y , I_{xy}
4) Déduire les moments d'inertie I_{xG} , I_{yG} , I_{xGyG}
5) Déterminer la valeur de l'angle α pour que les axes x_{G1} , y_{G1} seront des axes principaux



Exercice N°5:



Soit la section présentée dans la figure suivante (les unités en cm) :

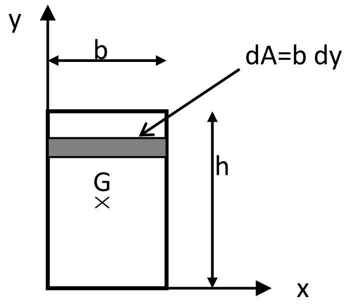
1) Déterminer la position du centre de gravité pour cette section
2) Calculer le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe horizontal qui passe Par le centre de gravité
3) Calculer le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Δ, ainsi que le rayon de giration de cette section

SOLUTION SERIE TD N°02

Exercice N°1 :

1) le moment statique de cette section par rapport aux axes :

<u>axe x :</u>

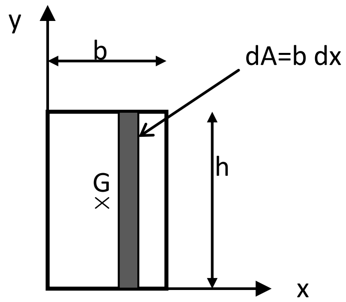


$$S_x = \int_A ydA = \int_0^h ybdy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h$$

$$S_x = \frac{bh^2}{2}$$

On peut trouver le même résultat pour Sx par :

$$S_x = Ay_G = bh\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$$



<u>axe y :</u>

$$S_y = \int_A xdA = \int_0^b xhdx = h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b$$

$$S_y = \frac{hb^2}{2}$$

On peut trouver le même résultat pour Sy par :

$$S_y = Ax_G = bh\frac{b}{2} = \frac{hb^2}{2}$$

<u>axe Δ1 :</u>

$$S_{\Delta 1} = \int_A ydA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ybdy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$S_{\Delta 1} = 0$$

<u>axe Δ2 :</u>

$$S_{\Delta 2} = \int_A ydA = \int_0^{-h} yb(-dy) = -b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-h}$$

$$S_{\Delta 2} = -\frac{bh^2}{2}$$

2) le moment d'inertie de cette section par rapport aux axes :

axe x :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

axe y :

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h dx = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

axe Δ1 :

$$I_{\Delta 1} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_{\Delta 1} = \frac{bh^3}{12}$$

On peut trouver $I_{\Delta 1}$ aussi en utilisons le théorème de Hyugens :

$$I_x = I_{\Delta 1} + Ad^2$$

$$\Rightarrow I_{\Delta 1} = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

axe Δ2 :

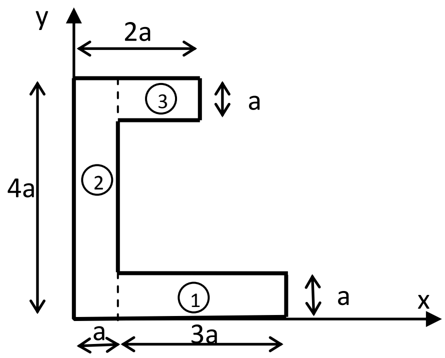
$$I_{\Delta 2} = \int_A y^2 dA = \int_0^{-h} y^2 b(-dy) = -b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{-h}$$

$$I_{\Delta 2} = \frac{bh^3}{3}$$

Exercice N°2 :

Calculer des coordonnées du centre de gravité (xG , yG) :

On divise la section en trois surfaces 1 2 3



$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum S_{iy}}{\sum A_i}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 3a^2 + 4a^2 + a^2 = 8a^2$$

$$S_y = \sum S_{iy} = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} = 3a^2\frac{5}{2}a + 4a^2\frac{a}{2} + a^2\frac{3}{2}a$$

$$S_y = 11a^3$$

$$x_G = \frac{11a^3}{8a^2} = \frac{11a}{8}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum S_{ix}}{\sum A_i}$$

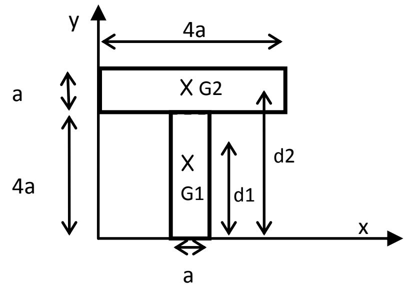
$$S_x = 3a^2\frac{a}{2} + 4a^2 2a + a^2\frac{7}{2}a = 13a^3$$

$$y_G = \frac{13a}{8}$$

Exercice N° 3:

le moment d'inertie de la section en T par rapport aux axes :

<u>axe x :</u>



D'après le théorème de Huygens

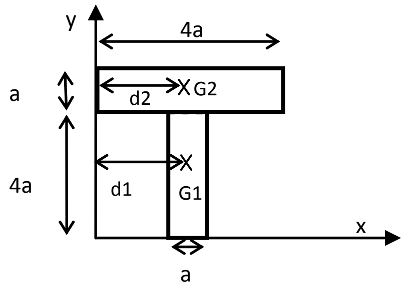
$$I_x = I_{xG1} + A_1 d_1^2 + I_{xG2} + A_2 d_2^2$$

$$I_x = \frac{a(4a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2 + \frac{(4a)(a)^3}{12} + (4a^2)(\frac{9}{2}a)^2$$

$$I_x = \frac{308}{3}a^4$$

axe y :

D'après le théorème de Huygens



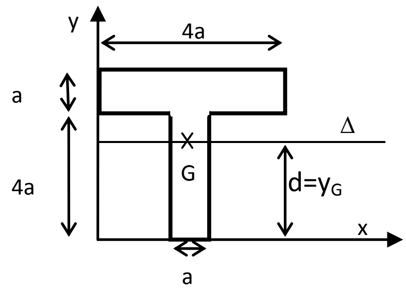
$$I_y = I_{yG1} + A_1 d_1^2 + I_{yG2} + A_2 d_2^2$$

$$I_y = \frac{4a(a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2 + \frac{(a)(4a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2$$

$$I_y = \frac{113}{3} a^4$$

axe Δ :

D'après le théorème de Huygens



$$I_x = I_\Delta + Ad^2$$

$$I_\Delta = I_x - Ad^2$$

On calcul y_G

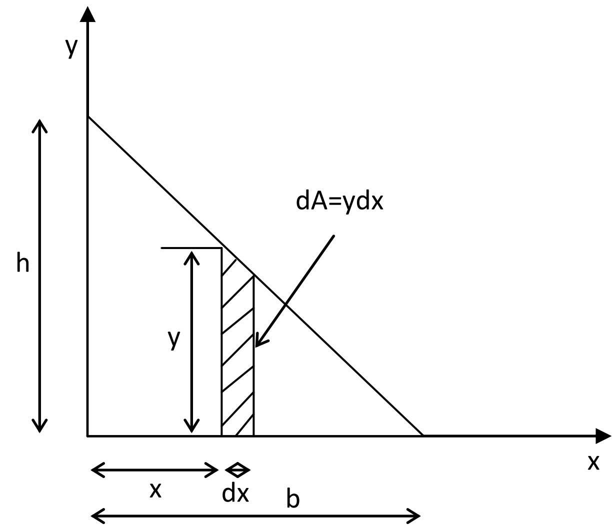
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{(4a^2)(2a) + (4a^2)(\frac{9}{2}a)}{8a^2}$$

$$y_G = \frac{13}{4} a$$

$$I_\Delta = \frac{308}{3} a^4 - (8a^2)(\frac{13}{4} a)^2$$

$$I_\Delta = \frac{109}{6} a^4$$

Exercice N° 4:



1) La surface du triangle

$$\frac{h}{b} = \frac{y}{b-x} \Rightarrow y = h\left(\frac{b-x}{b}\right)$$

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

On a :

$$A = \int_A dA = \int_0^b y dx = \int_0^b h\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = \frac{bh}{2}$$

2) position de G

$$S_y = \int_A xdA = \int_0^b xydx = \int_0^b xh\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = \frac{hb^2}{6}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{hb^2}{6}\frac{2}{bh} = \frac{b}{3}$$

$$S_x = \int_0^h yxdy = \int_0^h yb\left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{bh^2}{6}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6}\frac{2}{bh} = \frac{h}{3}$$

3) Calcule des moments d'inertie Ix Iy Ixy :

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_0^b x^2 \frac{h}{b}(b-x)dx = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^h y\left(\int_0^{b-\frac{b}{h}y} xdx\right)dy = \frac{b^2h^2}{24}$$

4) les moments d'inertie I_{xG} I_{yG} I_{xGyG}

$$I_x = I_{xG} + (y_G)^2 A$$

$$I_{xG} = I_x - (y_G)^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$I_y = I_{yG} + (x_G)^2 A$

$$I_{yG} = I_y - (x_G)^2 A = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{xGyG} = I_{xy} - x_G y_G A = \frac{b^2h^2}{24} - \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)\frac{bh}{2} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

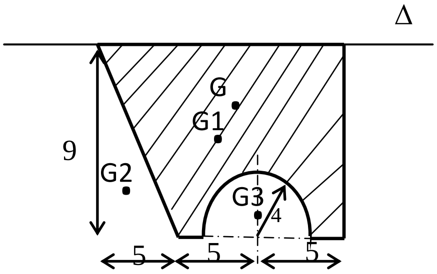
5) la valeur de l'angle α pour que les axes x_{G1} , y_{G1} seront des axes principaux

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xGyG}}{I_{yG} - I_{xG}} = \frac{bh}{h^2 - b^2}$$

$$2\theta = Arctg\left(\frac{bh}{h^2 - b^2}\right) \quad \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\, Arctg\left(\frac{bh}{h^2 - b^2}\right)$$

Exercice N°5:

1) centre de gravité x_G y_G



	A	x_G	y_G	S_x	S_y
1	135	7,5	4,5	607,5	1012,5
2	22,5	1,66	3	67,5	37,35
3	25,13	10	1,7	42,72	251,3

$$x_G = \frac{\sum S_y}{A} = \frac{1012{,}5 - 37{,}35 - 251{,}3}{135 - 22{,}5 - 25{,}13} = \frac{723{,}85}{87{,}37} = 8{,}28cm$$

$$y_G = \frac{\sum S_x}{A} = \frac{607{,}5 - 67{,}5 - 42{,}72}{135 - 22{,}5 - 25{,}13} = \frac{497{,}28}{87{,}37} = 5{,}7cm$$

2) moment d'inertie I_G

$$I_G = I_{G1} - I_{G2} - I_{G3}$$

$$I_{G1} = \frac{15(9)^3}{12} + (1,2)^2 135 = 1105,65\ cm^4$$

$$I_{G2} = \frac{5(9)^3}{36} + (2,7)^2 22,5 = 265,27\ cm^4$$

$$I_{G3} = \left[\frac{\pi(4)^4}{8} - (1,7)^2 25,13\right] + (4)^2 25,13 = 430\ cm^4$$

$$I_G = 1105,65 - 265,27 - 430 = 410,38\ cm^4$$

3) moment d'inertie I_α

$$I_\alpha = I_G + d^2 A = 410,38 + (9 - 5,7)(87,37) = 1361,84\ cm^4$$

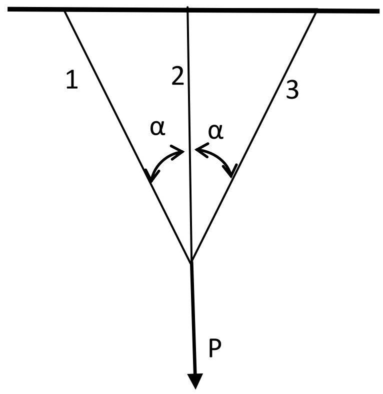
4) rayon de giration

$$i_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{A}} = \sqrt{\frac{1361,84}{87,37}} = 3,94 cm$$

Université Hamma Lakhdar Eloued
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
2éme année License Génie civil, Hydraulique, Travaux publics
Module Résistance des matériaux

année universitaire : 2019/2020

Série TD N°03
Traction et compression simple



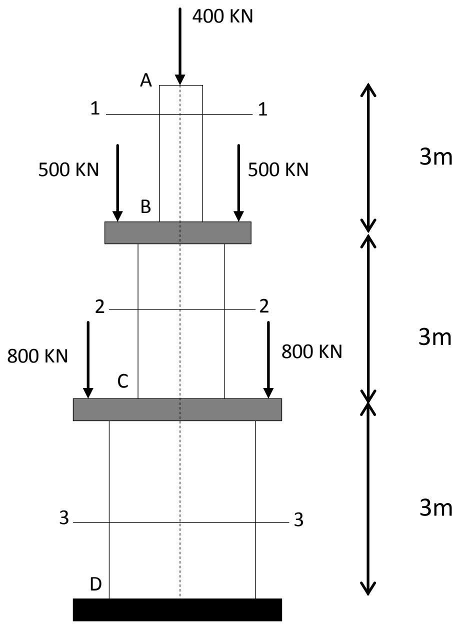
Exercice N°1 :

Soit le système de barres défini sur la figure ci-après.
Etant données: L1, L2, L3, P et α
avec L2 = L3

Déterminer les efforts dans les barres 1, 2 et 3 .

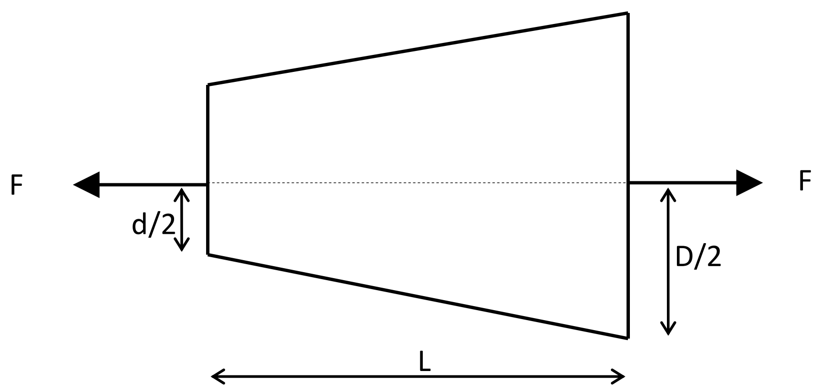
Exercice N°2 :

Déterminer les efforts, les contraintes et les raccourcissements (ΔL) dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la figure ci-dessous, sachant que $d_{1\text{-}1}$ = 50 mm, $d_{2\text{-}2}$ = 100 mm, $d_{3\text{-}3}$ = 200 mm et $E = 2.1 \times 10^5$ N/mm²



Exercice N°3 :

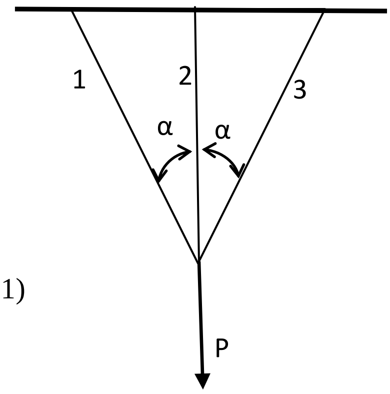
Une barre solide de forme tronconique de section circulaire se rétrécit uniformément d'un diamètre d à sa petite extrémité et D à la grande extrémité.
Déterminer l'allongement du aux forces appliquées aux extrémités de la barre.

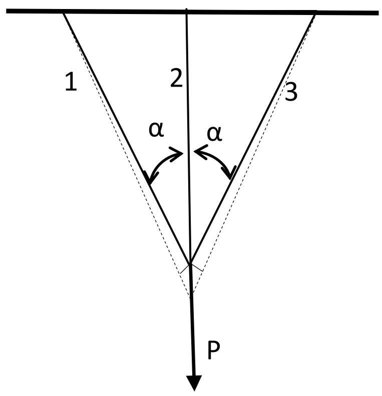


SOLUTION SERIE TD N°03

Exercice N°1 :

1- Aspect statique





$\sum$ Fx = 0

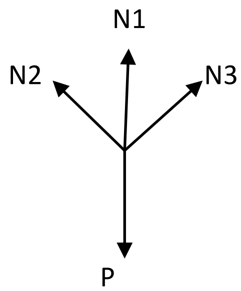
$N2 \ \sin\alpha - N3 \ \sin\alpha = 0$

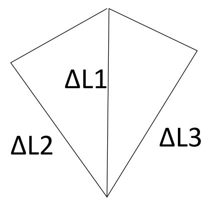
$\Rightarrow \ N2 = N3$……………………………..(1)

$\sum$ Fy = 0

$N1 + N2 \ \cos\alpha + N3 \ \cos\alpha - P = 0$

$\Rightarrow \ N1 + 2 \ N2 \ \cos\alpha = P$ ……………….(2)





2- Aspect géométrique

$\Delta L2 = \ \Delta L3 = \ \Delta L1 \cos\alpha$ ……………..(3)

3- Aspect physique:

$\Delta L1 = \dfrac{N1 \ L1}{E \ A}$ et $\Delta L2 = \dfrac{N2 \ L2}{E \ A}$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N2 \ L2}{E \ A} = \frac{N1 \ L1}{E \ A} \cos\alpha \ \Rightarrow N2 \ L2 = N1 \ L1 \ \cos\alpha$$

on tire

$$N1 = N2 \frac{L2}{L1 \ \cos\alpha}$$

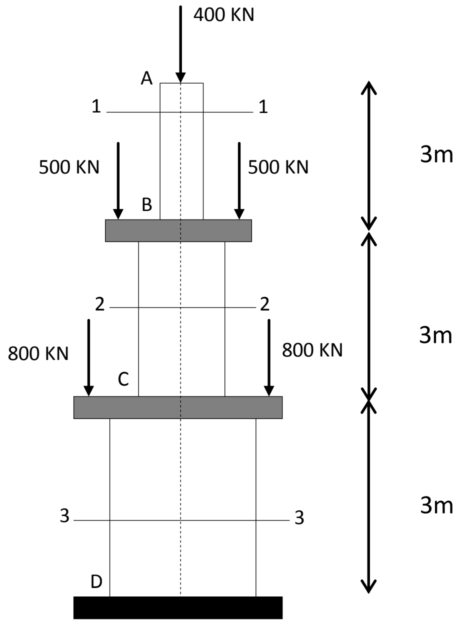
et on aussi : $N1 + 2 \ N2 \ \cos\alpha = P$ (on utilise $L1 = L2 \ \cos\alpha$)

on a donc deux équations avec deux inconnus N1 et N2 :

$$N1 = \frac{P}{1 + 2\cos\alpha^3} \qquad et \qquad N2 = N3 = \frac{P\cos\alpha^2}{1 + 2\cos\alpha^3}$$

Exercice N°2 :

Section 1-1



$$N + 400 = 0 \qquad \Rightarrow N = -400\ KN$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi(25)^2} = -203{,}7\ \ N/mm^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203{,}7 \times 3000}{2{,}1 \times 10^5} = -2{,}91mm$$

Section 2-2

$$N + 400 + 2 \times 500 = 0 \qquad \Rightarrow N = -1400\ KN$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi(50)^2} = -178{,}3\ \ N/mm^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178{,}3 \times 3000}{2{,}1 \times 10^5} = -2{,}55mm$$

Section 3-3

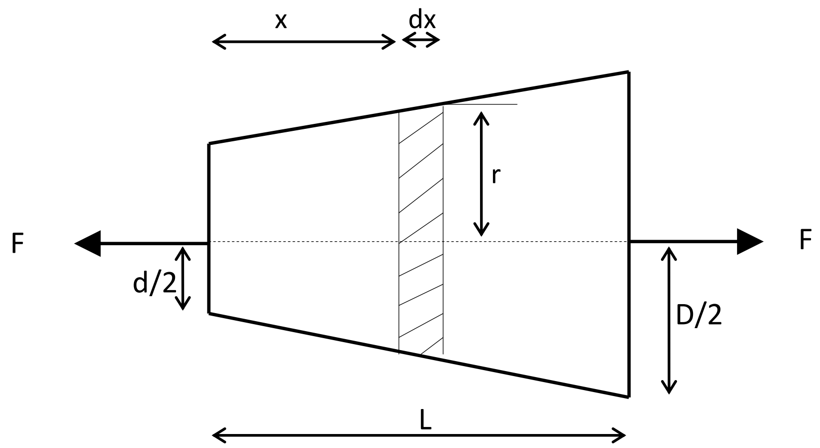
$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0 \qquad \Rightarrow N = -3000\ KN$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi(100)^2} = -95{,}5\ \ N/mm^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95{,}5 \times 3000}{2{,}1 \times 10^5} = -1{,}36mm$$

$$\Delta L_T = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = -2{,}91 - 2{,}55 - 1{,}36 = -6{,}82\ mm$$

Exercice N°3 :



On a :

$$\frac{r-\frac{d}{2}}{x}=\frac{\frac{D-d}{2}}{L}$$

$$\Rightarrow \quad r=\frac{d}{2}+\frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)$$

$$\Delta(dx)=\frac{Pdx}{E\pi\left(\frac{d}{2}+\frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)\right)^2}$$

$$\Delta L=\int_0^L \frac{4Pdx}{E\pi\left(d+\frac{x}{L}(D-d)\right)^2}$$

$$\Delta L=\frac{4PL}{\pi EDd}$$