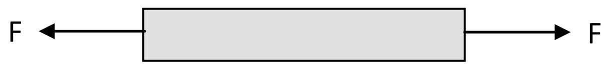
Université Hamma Lakhdar Eloued *année universitaire : 2019/2020*
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
2ème année License Génie civil, Hydraulique, Travaux publics
Module Résistance des matériaux

COURS RDM CHAPITRE III

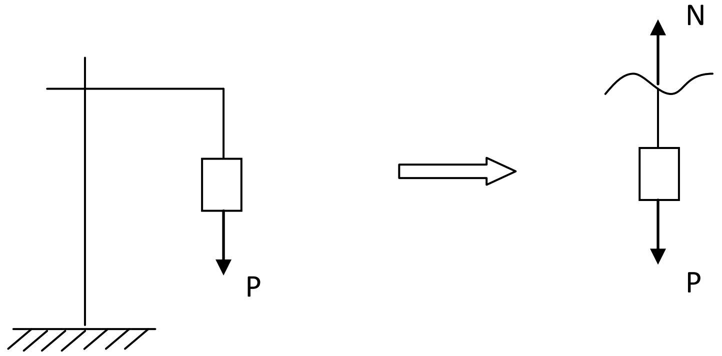
Traction et compression simple

1) Définition :

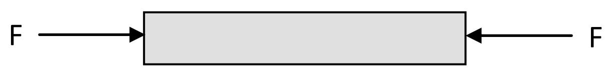
1.1) Traction : une poutre droite est sollicité en traction chaque fois que les actions a ses extrémités es réduisent à deux force égales et directement opposées, qui tendent à l'allonger.



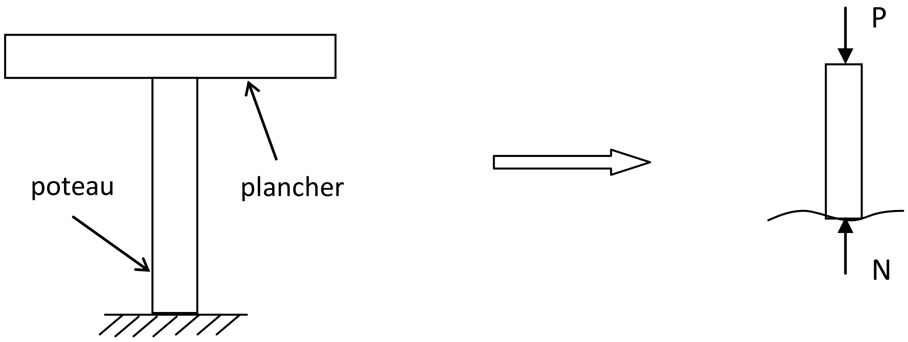
Exemple :
Un câble soulevant une charge



1.2) Compression : un corps est sollicité à la compression si les forces extérieures se réduisent à deux forces égales directement opposées qui tendent à le raccourcir.

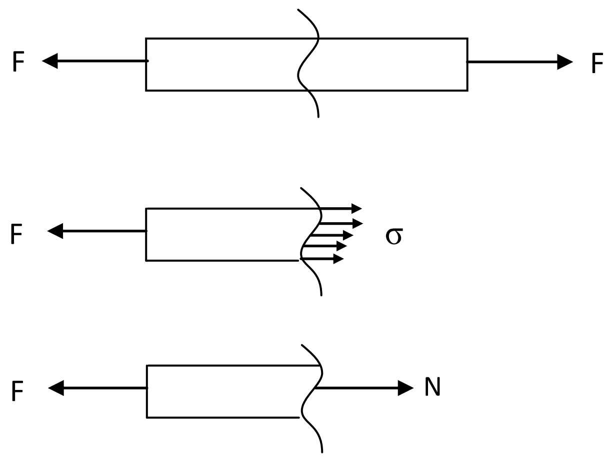


Exemple :
Un poteau supportant une partie du poids d'un plancher.



2) **Effort normal :**

Faisons une section dans la poutre entre les deux extrémités, des efforts intérieurs seront apparaître.



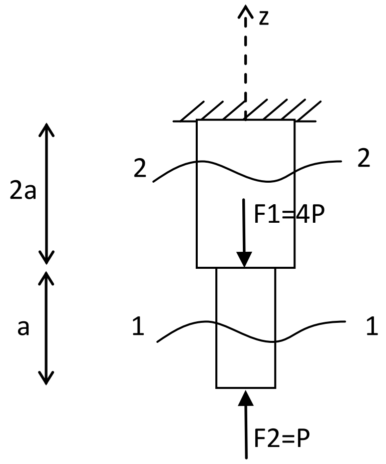
Avec :

$$N = \int_A \sigma \, dA$$

La résultante des contraintes qui s'exercent en chaque point de la section, se réduit au seul effort normal N (appliqué au centre de gravité de la section)

Si N>0 ……………………. c'est un effort de traction
Si N<0 ……………………. c'est un effort de compression

Exemple :



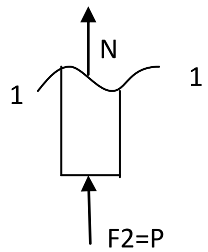
Coupe 1-1

$0 \leq z \leq a$

$\sum F/z = 0$

$N + F_2 = 0 \Rightarrow N = -F_2 = -P$

N < 0 : N c'est un effort de compression



Coupe 2-2

$a \leq z \leq 3a$

$\sum F/z = 0$

$N + F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow N = F_1 - F_2 = 3P$

N > 0 : N c'est un effort de traction

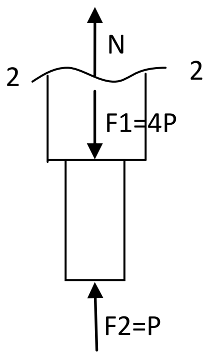
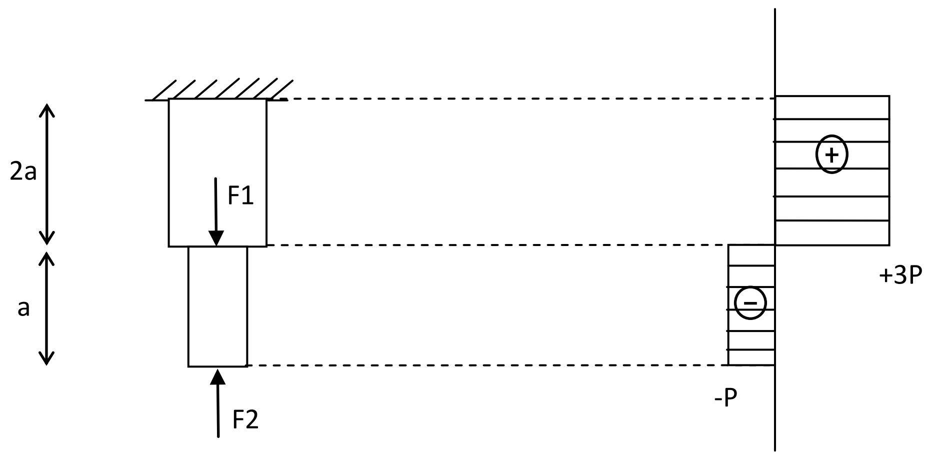


Diagramme de N :



La formule générale donnant la valeur de l'effort normal (pour des charges concentrées P et des charges réparties q_x) :

$$N_x = \sum P + \sum \int q_x dx$$

Remarque :

La traction (ou compression) simple est satisfait à trois conditions :

$N_x \neq 0$, $T_y = 0$, $M = 0$

3) **Contrainte normale :**

$$N = \int_A \sigma \, dA = \sigma A \qquad \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

σ : c'est la contrainte normal

$\sigma > 0$ ………………..contrainte normale de traction
$\sigma < 0$ ………………..contrainte normale de compression

Avec :

σ en Mpa , N en Newton et A en mm²

4) **Condition de résistance :**

Dans tous les cas la contrainte calculée σ doit être inférieur à la contrainte admissible σ_{adm} :

$\sigma \leq \sigma_{adm}$ avec : $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n}$

σ_e : la limite élastique du matériau déterminer par les essais.
n : coefficient de sécurité.

Exemple :
Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal d'une poutre en acier pour qu'elle résiste en toute sécurité, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. L'Effort appliqué N = 62 000 N.
L'acier employé a pour caractéristique : σ_e = 300 MPa

Détermination du diamètre d :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq \sigma_{adm} \qquad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \sigma_{adm}}} \qquad \text{d'où} \quad d \geq 28{,}10 \text{ mm}$$

Détermination du coefficient de sécurité :

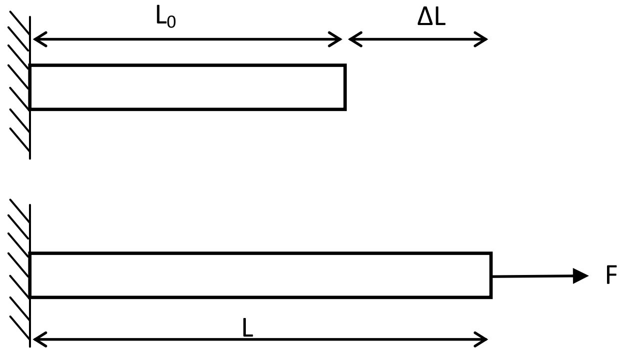
$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} \qquad \Rightarrow \quad n = \frac{\sigma_e}{\sigma_{adm}} = \frac{300}{100} = 3$$

5) <u>Les déformations :</u>

5.1) les déformations longitudinales :

Soit une poutre de longueur initial L_0 , si on applique une force F à l'extrémité de la poutre, alors on peut définir :

ΔL : l'allongement total de la poutre
L : longueur final

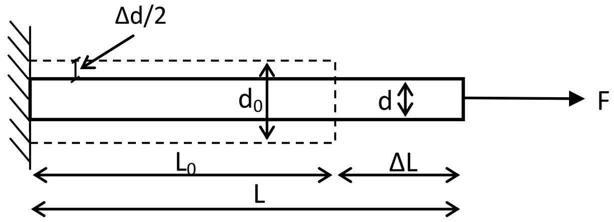


On appel déformation relative (ε) le rapport de l'allongement total sur la longueur initiale :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

5.2) les déformations transversales :

Le coefficient de poisson ν caractérise le rapport entre les déformations transversales et longitudinales :



$$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0} \qquad alors\ \nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

6) Relation déformations-contraintes :

Pour un grand nombre de matériau, l'essai de traction montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle les déformations sont proportionnelles aux contraintes normales, cette propriété est énoncée par la loi de Hooke qui traduit la dépendance linéaire des déformations par rapport aux contraintes normales :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad ou \quad \sigma = \varepsilon E$$

Ou E est le coefficient de proportionnalité appelé module d'élasticité ou module de young
Dans cette relation on a :

σ en Mpa , ε sans unité et E en Mpa

Dans une poutre en traction on a :

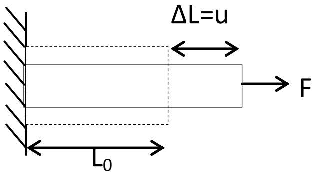
$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$$

A partir de la loi de Hooke

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \qquad \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

$$et \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Si on introduit les déplacements :



$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \qquad \Rightarrow du = \varepsilon_x dx$$

$$avec \int du = u = \Delta L$$

$$alors: \quad \Delta L = \int \varepsilon_x \, dx = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Si N, E , A sont constants (c'est le cas en traction sur une poutre simple) :

$$\Delta L = \frac{N\, L_0}{E\ A}$$

Si on a une barre composée de plusieurs parties, l'intégration se fait suivant la longueur de chaque partie, et l'allongement total est obtenu par la sommation des allongements partielles :

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

COURS RDM CHAPITRE IV

FLEXION SIMPLE

1) Hypothéses et définition :

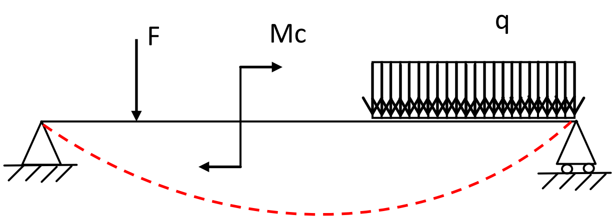
1 .1) hypothèses :

En plus des hypothèses déjà énoncées au chapitre I, la flexion simple nous amène à supposer que :

- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal.
- toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal (ou symétriquement par rapport à celui-ci).

1.2) définition :

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs. Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissants, c'est-à-dire des moments intérieurs dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre comme le montre la figure ci-dessous.



Cette forme de sollicitation s'appelle flexion, et les barres qui travaillent surtout à la flexion s'appellent ''poutres''.

La flexion est dite pure si le moment fléchissant est l'unique effort intérieur que supporte la section droite ($M \neq 0$; $T = 0$; $N = 0$).

Il est plus fréquent, pourtant, que les sections droites des barres soient soumises en plus à des efforts tranchants. Une telle flexion est dite ''simple'' ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$).

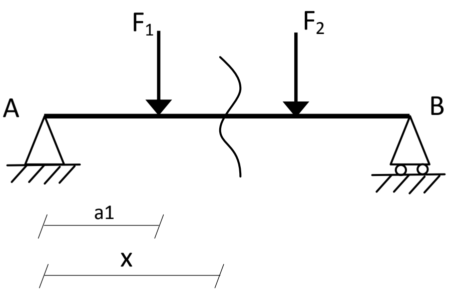
2) **Effort tranchant et moment fléchissant :**

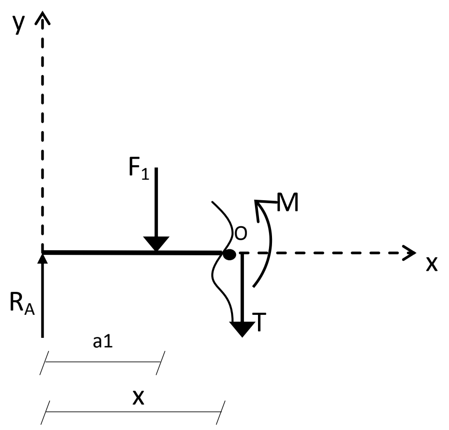
La flexion simple engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs le moment fléchissant M et l'effort tranchant T.

La détermination de M et T se fait par l'application de la méthode des sections, pour illustré cette méthode on prend l'exemple de la poutre ci-dessous.

Pratiquons une coupe fictive à la distance x de l'appui gauche, rejtons la partie droite de la poutre et considérons l'équilibre de la partie gauche (ou bien l'inverse, on élimine la partie gauche et on considére l'équilibre de la partie droite).

On remplace l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs M et T.





Pour calculer M et T, on utilise les deux équations d'équilibre :

$$\sum F/y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + F_1 - R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad T = R_A - F_1$$

$$T = \sum (f_i)_y$$

$$\sum M/o = 0 \quad \Rightarrow \quad M + F_1(x - a_1) - R_A x = 0$$

$$M = R_A x - F_1(x - a_1)$$

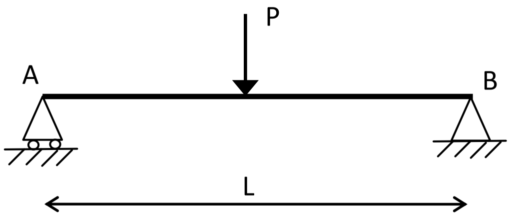
$$M = \sum M_o\ (f_i)$$

ainsi dans la section droite d’une poutre :

1°/ l’effort tranchant T est numériquement égal à la somme algébrique des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures appliquées d’un côté de la section ;

2°/ le moment fléchissant est numériquement égal à la somme algébrique des moments (calculés par rapport au centre de gravité de la section) des forces extérieures appliquées d’un côté de la section considérée.

Exemple 1) : cas d'une force concentrée à mi-travée



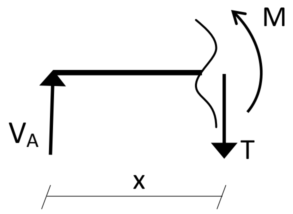
Détermination des réactions:

Σ M/A = 0 $\Rightarrow$ $V_B = 0.5$ P

Σ F/y = 0 $\Rightarrow$ $V_A = 0.5$ P

Expressions des efforts internes:

Tronçon I: $0 \leq x \leq L/2$



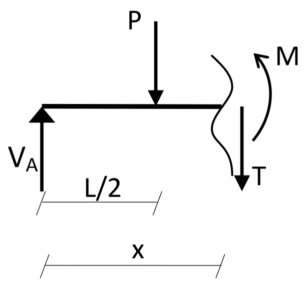
$T - V_A = 0 \Rightarrow T = 0.5P$

$M - V_A\, x = 0 \Rightarrow M = 0.5P\, x$

M(0) = 0, M(L/2) = PL/4

Tronçon II: $L/2 \leq x \leq L$

$T + P - V_A = 0 \Rightarrow T = -0.5P$



$M - V_A\, x + P\,(x - L/2) = 0$

$\Rightarrow M = 0.5P\, x - P\,(x - L/2)$

M(L/2) = PL/4, M(L) = 0

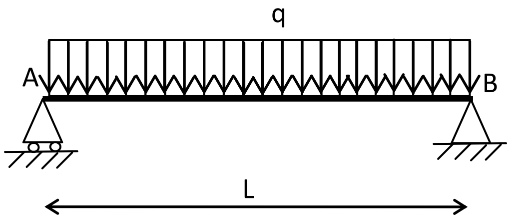
Mmax = M(L/2) = PL/4

Exemple 2) : Cas d'une charge uniformément répartie

Détermination des réactions:

Σ M/A = 0 $\Rightarrow$ V_B L – qL (L/2) = 0

$\Rightarrow$ V_B = qL/2



Σ F/y = 0 $\Rightarrow$ $V_A + V_B - qL = 0$

$\Rightarrow$ V_A = qL/2

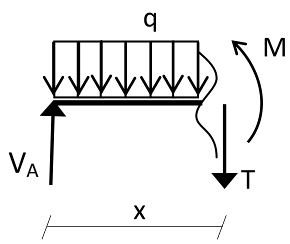
Expressions des efforts internes:

$0 \leq x \leq L$

$T + q\,x - V_A = 0$

$\Rightarrow$ T = qL/2 – q x

T(0) = qL/2 T(L) = – qL/2



$M + q\,x\,(x/2) - V_A\,x = 0$

$M = qLx/2 - q\,x^2/2$

M(0) = 0, M(L) = 0

Mmax = M(L/2) = $qL^2/8$

3) Diagrammes des efforts internes (M et T) :

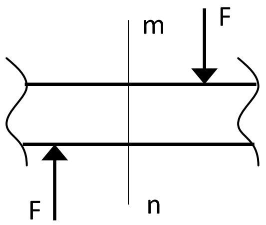
Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

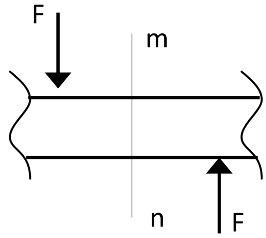
D'après les exemples précédents on a vu qu'on peut séterminer les expressions de M et T en fonction de l'abscisse x, ce qui permet donc de connaître la valeur de M et T en touts points de la poutre, alors on peut tracer M et T graphiquement à l'aide de leurs expressions en fonction de x.

Remarques :

- L'effort tranchant dans la section m-n d'une poutre (Fig1 .a) est considéré comme positif, si la résultante des forces extérieures à gauche de la section est dirigée de bas en haut, et à droite de la section, de haut en bas, et négative dans le cas contraire (Fig1 .b).

a) Tmn > 0 b) Tmn < 0

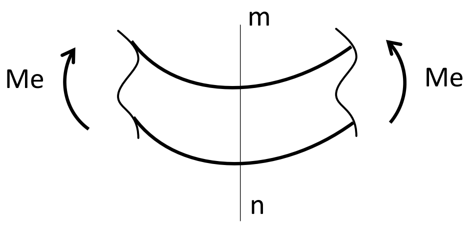


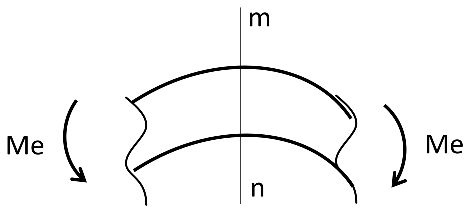


(a) Fig 1 (b)

- On admet que dans la section d'une poutre, par exemple dans m-n (Fig2 .a), le moment fléchissant est positif si la résultante de tous les moments des forces extérieures à gauche de la section est dirigée dans le sens horaire, et négative si elle est dirigée dans le sens antihoraire (Fig2 .b).

a) Mmn > 0 b) Mmn < 0





(a) (b)

- On en tire une autre règle des signes du moment fléchissant, plus commode à retenir. Le moment fléchissant est considéré comme positif si dans la section envisagée, la courbure de la poutre est orientée en bas. On trace toujours le diagramme du moment fléchissant de coté des fibres tendues.

- Pour tracer le diagramme de M et T on déterminer les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou des courbes.

- Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie (uniquement des charges cncentrés), le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M est délimité par des droites obliques.

- Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M est délimité par des paraboles, et on doit connaître la valeur du moment fléchissant en un point entre les deux extrémiées du tronçon considérée.

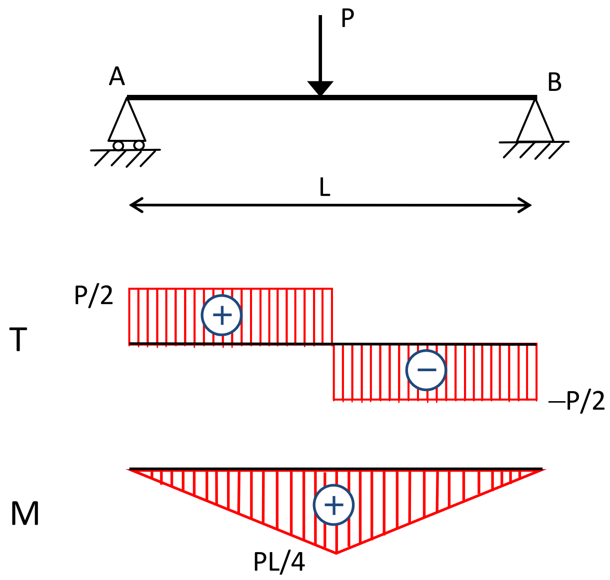
- Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où T=0.

- Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M, il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.

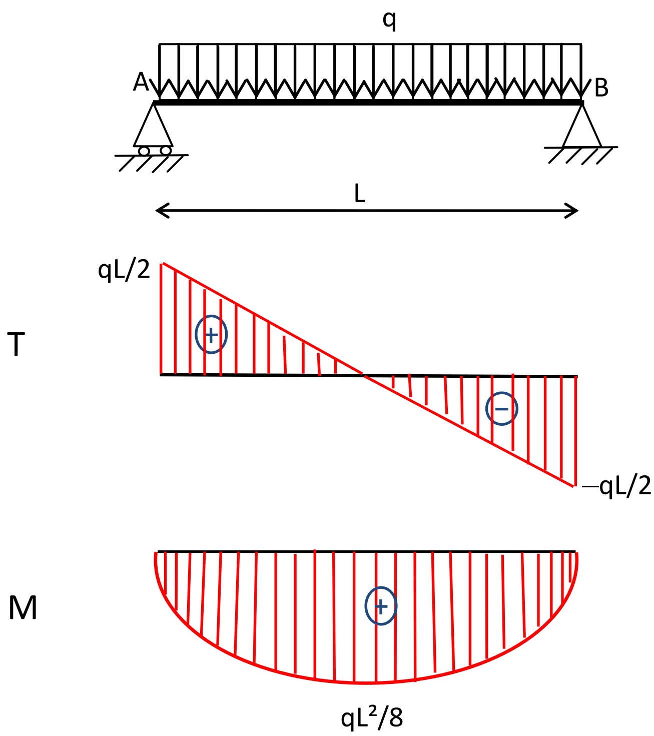
- Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T, il n' y aura aucune modification.

Reprenons les exemples précédents, les diagrammes de M et T seront comme :

Exemple 1) : cas d'une force concentrée à mi-travée



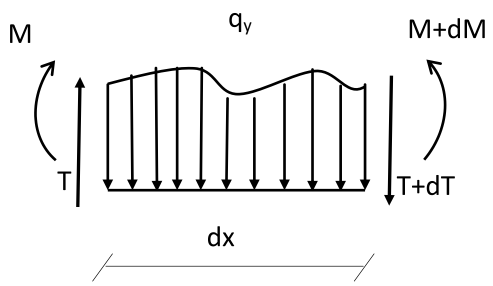
Exemple 2) : Cas d'une charge uniformément répartie



4) Relations différentielles entre les charges et les efforts M et T :

Ils existent des relations différentielles entres les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan avec:
q_y : intensité de la charge extérieure selon l'axe y



Entre l'intensité qy, l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui
agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes:

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow \; dT/dx = -q_y(x)$$

$$M + Tdx - q_y(x)dx^2/2 - M - dM = 0$$

en négligeant le terme quadratique en dx² on obtient:

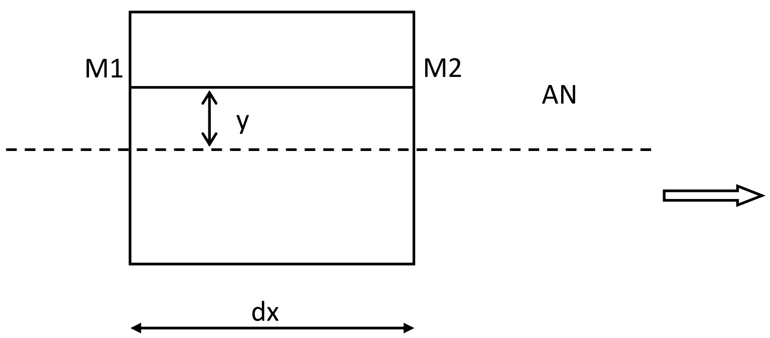
$$dM/dx = T$$

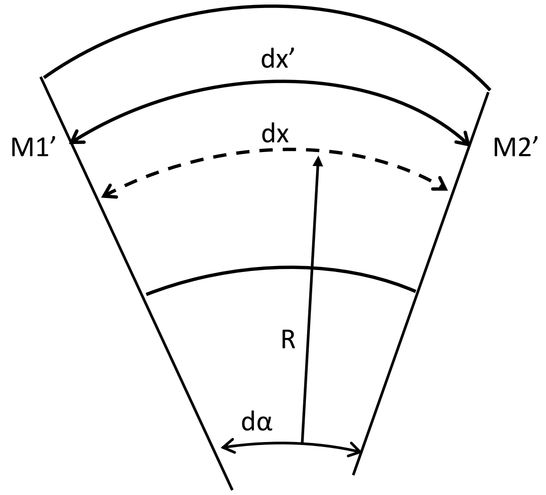
Où

$$d^2M/dx^2 = -q_y(x)$$

5) Contraintes normales en flexion simple :

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La ci-dessous montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:





Les déformations longitudinales :

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} \qquad et \qquad d\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{dx'}{R+y}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{dx'}{dx} - 1 = \frac{R+y}{R} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{y}{R}$$

A partir de la loi de Hooke :

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \frac{y}{R} E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Relation des contraintes avec le moment fléchissant :

$$M = \int_A y\sigma dA = \int_A \frac{y^2 E}{R} dA = \frac{E}{R}\int_A y^2\, dA$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{E}{R} I_x$$

Soit :

$$\frac{M}{EI_x} = \frac{1}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

La quantité k $= \dfrac{1}{R}$ est la courbure de la couche neutre de la poutre. Il s'en suit que l'expression (2) détermine la courbure de la poutre. En flexion, la courbure de l'axe d'une poutre et proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle à la grandeur EIx appelée rigidité de la poutre.

En portant la valeur obtenue de $1/R$ dans (1), on aboutit à la formule de grand intérêt :

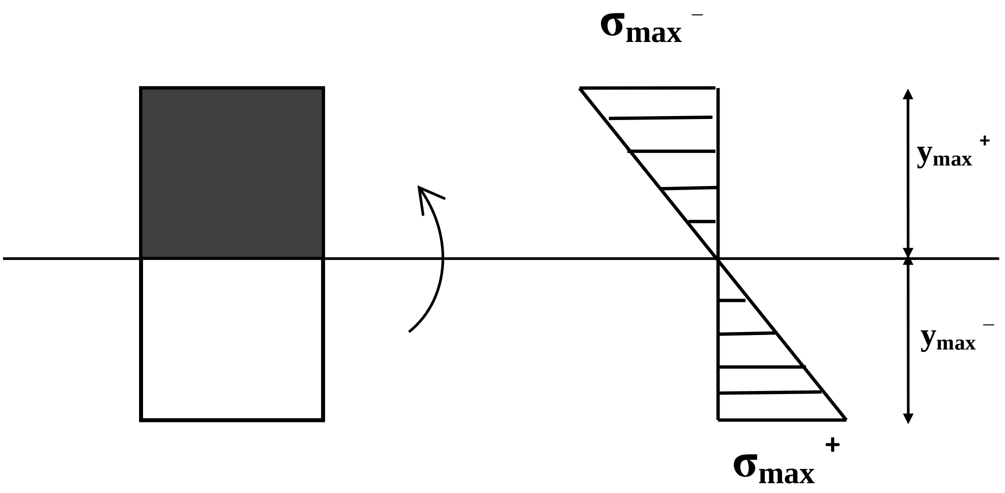
$$\sigma_x = \frac{y}{R} E = \frac{y\, E\, M}{E\, I_x}$$

$$\sigma_x = \frac{M\, y}{I_x} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. (3)$$

Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie Ix.

Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.

La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.



$$\sigma_{max} = \frac{M\, y_{max}}{I_x} = \frac{M}{W_x}$$

Avec Wx : le module de résistance de la section

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

σ_{max}^{-} : contrainte de compression max

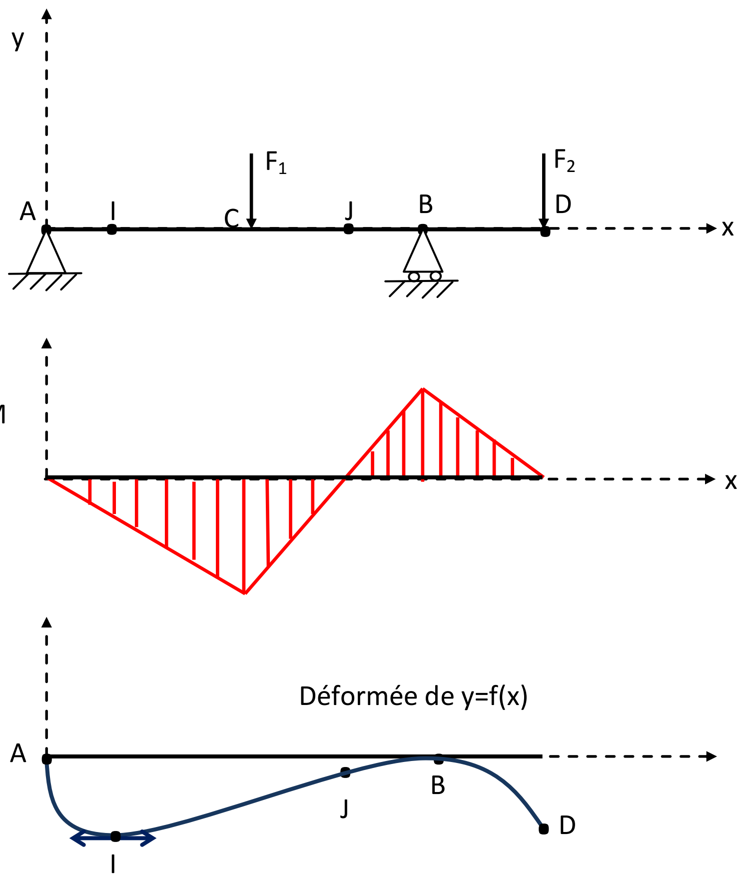
σ_{max}^{+} : contrainte de traction max

Condition de résistance :

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$$

6) **Déformation d'une poutre soumise à la lexion simple :**

Dans ce qui précède, on s'est intéressé aux poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.



Pour la poutre ci-dessus, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe y = f(x) après déformation. Cette courbe est appelée déformée.
y = f(x) est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y).

Conditions aux limites :
Les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_I = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches :
La déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) :
$f_I = y_I$ et $f_D = y_D$

Méthode par intégration :

Principe :

Connaissant l'équation des moments fléchissants M en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M = -EI\,y''$$

Avec

M : le moment fléchissant (équation en x)
E : le module d'élasticité longitudinale (MPa).
I = Iz : le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm4)
y'' : la dérivée seconde de la déformée y.

Remarque :

Les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

Exemple usuels des conditions aux limites :

Encastrement : $y'_A = 0$; $y_A = 0$
Appui double : $y_A = 0$
Appui simple : $y_A = 0$

7) Calcul des contraintes tangentielles :

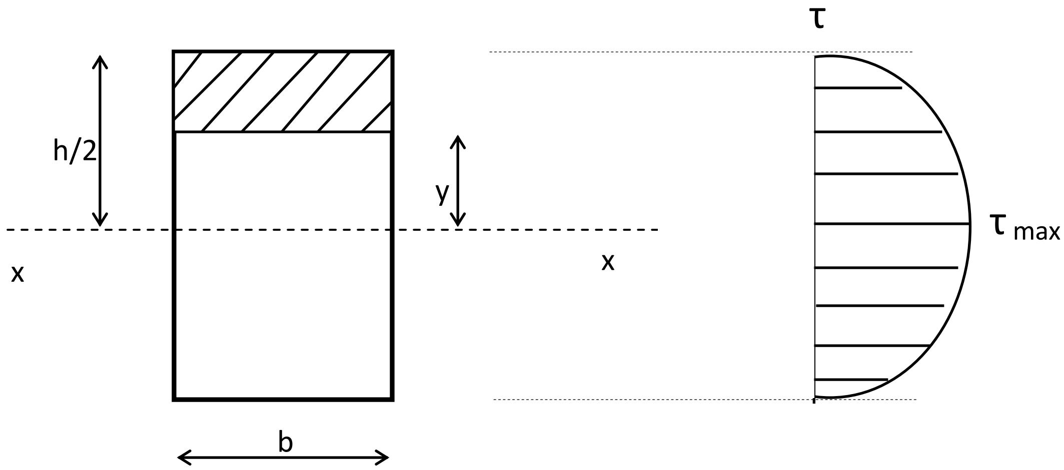
Dans le cas général de la flexion, les sections droites d'une poutre subissent des moments fléchissants et des efforts tranchants. La présence du moment fléchissant est associée à l'apparition des contraintes normales qui peuvent être déterminées par la formule (3).

La présence de l'effort tranchant est due à l'apparition des contraintes tangentielles dans la section droite.

En général, la relation permettant de calculer la contrainte tangentielle est donnée par la formule suivante (S^*x , étant le moment statique de la section) :

$$\tau = \frac{T\,S_x^*}{I_x b}$$

Etudions la loi de distribution des contraintes tangentielles dans une poutre de section rectangulaire.



$$I_x = \frac{b\,h^3}{12}$$

Le moment statique de l'aire hachurée par rapport à l'axe x :

$$S_x^* = b(\frac{h}{2} - y)\left(y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{T\ \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{b\,h^3}{12}\ b} = \frac{6\,T}{b\,h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Construisons le diagramme de τ d'après les 3 points :

$$\tau\left(y = \frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\tau(y = 0) = \frac{3T}{2bh} = \frac{3T}{2A}$$

$$\tau\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0$$

Pour une poutre de section rectangulaire, la contrainte tangentielle maximale se manifeste au niveau de l'axe neutre.

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2bh}$$

• Pour une section circulaire, la valeur maximale de τ sur l'axe neutre vaut :

$$\tau_{max} = \frac{4T}{3\pi R^2}$$

• Pour une section triangulaire :

$$\tau_{max} = \frac{3T}{Bh}$$

La condition de résistance : $\tau_{max} \leq [\tau]$

$[\tau]$: Contrainte tangentielle admissible