I. Systeme et expérience

1. Introduction

Dans de nombreux domaines, il est nécessaire de faire appel à une modélisation du système physique étudié. Cette modélisation est réalisable théoriquement en faisant exclusivement appel à des modèles de type boîte blanche basés sur les équations non-linéaires de la physique gérant le fonctionnement du procédé. Par définition, cette procédure demande à l'utilisateur d'avoir des connaissances très avancées dans de nombreux domaines et conduit généralement à des modèles complexes et peu parcimonieux.

dans cet chapitre, on va voire les méthodes, théorèmes et lois utilisés pour avoir un modèle d'un systèmes électrique

2. Objectifs

connaître et utiliser les termes scientifique dans le domaine de la modélisation des systèmes électriques exacte et dans les lieux spécifiques.

3. définitions

a. l'automatique

l'automatique est la science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques (objets étudiés).

b. un système

un système est un assemblage de composants ou éléments de manière à produire une fonction ou tâche donnée. Il possède un ou plusieurs signaux d'entrée exogène (extérieures au système) et un ou plusieurs signaux de sortie. Un système est dit monovariable si son entrée, ainsi que la sortie considérée sont uniques. Dans les autres cas le système est dit multivariable. Il est courant de représenter un système ou un des éléments le composant à l'aide d'un schéma, dit schéma bloc (ou diagramme fonctionnel). La Figure 1 fournit un exemple d'une telle représentation.

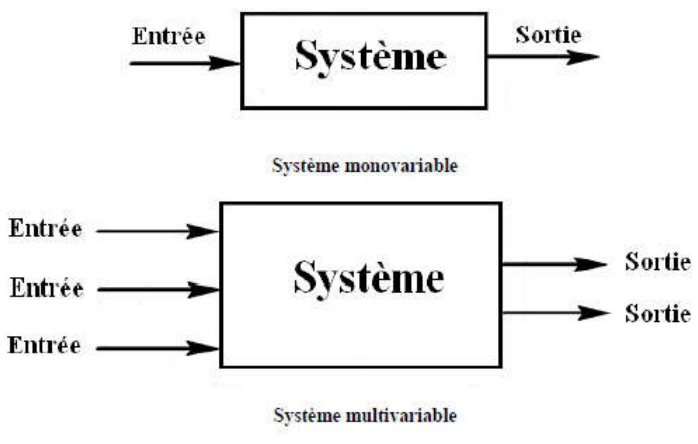


Figure 1 : Schéma fonctionnel (schéma bloc) d'un système

Les entrées affectant un système sont généralement notées par la lettre u et les sorties par la lettre y. Les entrées d'un système peuvent être modifiées par l'utilisateur (commande) pour obtenir la sortie désirée. Il peut également exister des entrées qui ne peuvent être modifiées par l'utilisateur. Elles sont appelées perturbations et sont notées par la lettre d. Ces dernières troublent le fonctionnement désiré en sortie (Figure2).

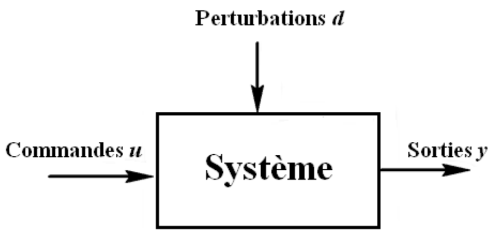


Figure 2 : Commandes u et perturbations d

Le but de l'automatique est d'exercer des actions pour que la sortie d'un système ait le comportement désirée et ceci en manipulant les variables de commande.

Il est important de remarquer que l'automatique est une activité multidisciplinaire. Elle n'est pas limitée à aucune discipline spécifique. Exemple: systèmes mécatroniques (intégration des systèmes mécaniques, électriques, et informatiques). On souhaite donc commander (gouverner ou asservir) des grandeurs physiques issues de systèmes technologiques. Ces grandeurs pourront être mécaniques (force, vitesse, position, couple, ...), électriques (tension, courant, puissance, ...), thermiques (température, ...), hydrauliques (pression, débit, niveau, ...), optiques (éclairement, exposition, ...), chimiques (concentration, ...).

Un système est dit continu si entrées et sorties sont continues. Inversement, si en un endroit au moins de la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants discrets privilégiés, le système sera dit discret (ou échantillonné).

c. causalité

un système est causal si la sortie $y(t)$ à un instant $t0$ ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq< t0$. Les systèmes physiquement réalisables sont causaux.

d. système invariant

un système est dit invariant si sa sortie est identique à tout instant (un retard τ ne change pas la sortie du système).

Le système est invariant : si le système répond à $u(t)$ par $y(t)$ alors il répond à $u(t-\tau)$ par $y(t-\tau)$

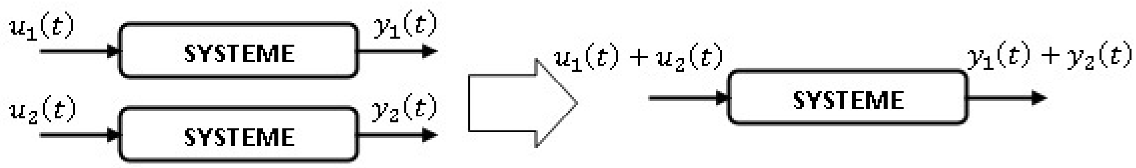
e. système instantané

si la sortie $y(t)$à un instant donné ne dépend que de l'entrée $u(t)$à cet instant $y(t) = a.u(t)$alors le système est dit instantané ou statique. Dans tous les autres cas, il est dit, dynamique ou à mémoire. Exemple : . $y(t) = a.u(t-\tau)$

f. linéarité

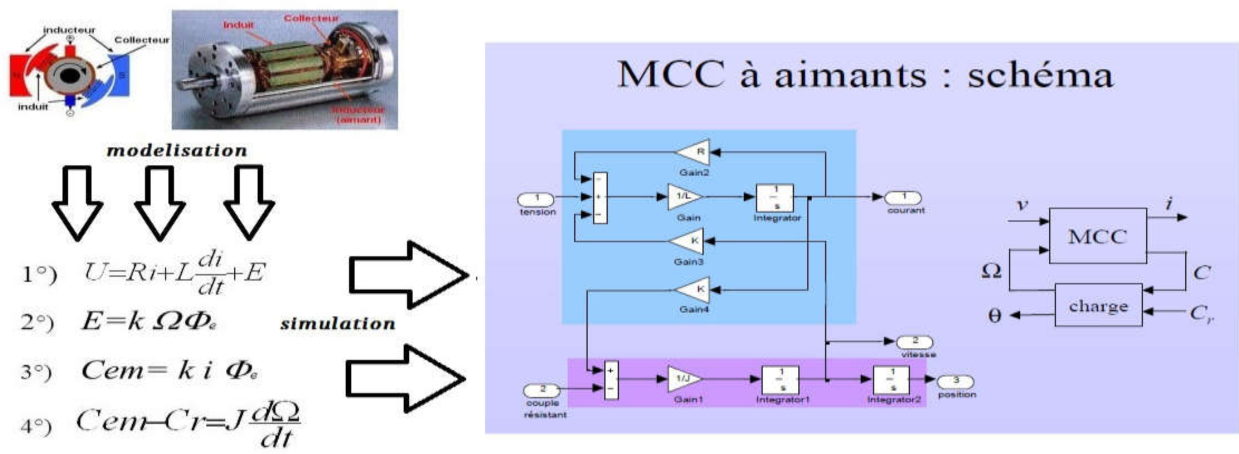
un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition : la sortie $y(t)$ correspondante à la somme de plusieurs entrées $u_1(t) + u_2(t) + \cdots$ est égale à la somme correspondant à chacune des entrées $y_1(t) + y_2(t) + \cdots$.

principe de linéarité



g. modèle

un modèle est un objet mathématique (équations différentielles) reliant le entrée (e) et les sortie (s).

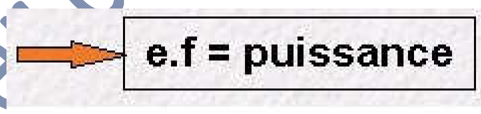


représentation MCC en modèle mathématique

Variables d'effort et de flux.

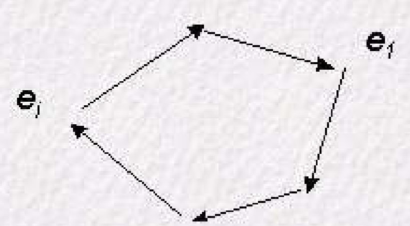
effort : tension, pression, force, température (e)

flux : courant, débit volumique, vitesse, flux d'entropie



h. Loi des mailles

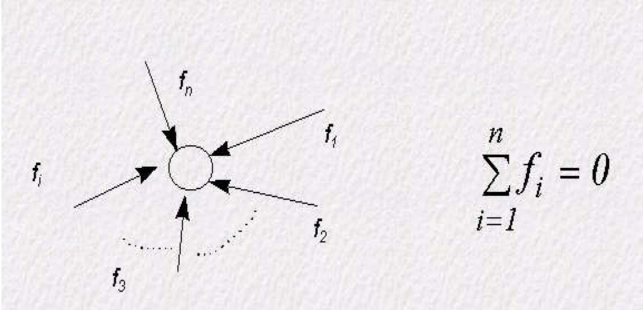
L'effort en un point ne dépend que de ce point. La variation cumulée de la variable de tension obtenue en parcourant une boucle est nulle



$$\sum_{i=1}^{n} \Delta e_i = 0 \ , \quad \Delta e_i = e_{i+1} - e_i$$

i. Loi des nœuds

la somme des flux entrants et sortants est nulle



❖ **Types des modèle:**
il est tout même important d'avoir des connaissance basique du système pour choisit un type de modèle adapté:

1- Modèle possédant une entrée / sortie (SISO) ou plusieurs entrées et plusieurs sorties(MIMO).

2-Modèle linéaire ou non linéaire (dans ce cas qu'est qui est non linéaire en fonction de quoi?).

3-Modèle continu ou discret.

4-Modèle régressif ou indépendant, pour modèle régressif, la sortie à un instant "t", y(t) dépend des instants précédents y(t-i).

5-Modèle stochastique ou déterministe.

II. Modèle mathématiques et représentation des systeme électriques

1. modèle mathématique des systeme continus linéaires invariants

Pour commander correctement un système, il est nécessaire de définir un modèle mathématique qui représente la relation entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie. À l'aide de ce modèle mathématique, il est possible de calculer la sortie du système étudié si on connaît l'entrée et les conditions initiales. L'ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle mathématique est la modélisation. On peut distinguer deux sortes de modèle :
le modèle de connaissance est obtenu en se basant sur les lois de la physique (Newton, Kirchoff...) qui régissent le comportement du système. Les paramètres d'un tel modèle ont alors une interprétation physique.
le modèle de représentation est un modèle déterminé à partir de données
expérimentales (données entrée-sortie). Les paramètres de ce modèle n'ont pas d'interprétation

physique.

Quand le système étudié est complexe, l'écriture des lois physique régissant le système devienne difficile. Dans ce cas, on cherchera un modèle de représentation permettant de modéliser le fonctionnement du système étudié. Ce chapitre a pour but de donner les principales représentations d'un système dynamique linéaire continu temps invariant monovariable.

2. Représentations temporelles

a) Représentation par une équation différentielle

les systèmes asservis sont des systèmes commandés, électromécaniques régis par les lois de la physique(dynamique, hydraulique, électricité.....). on représente un système dynamique linéaire continu monovariable d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ par une équation différentielle à coefficients constants de la manière suivante:

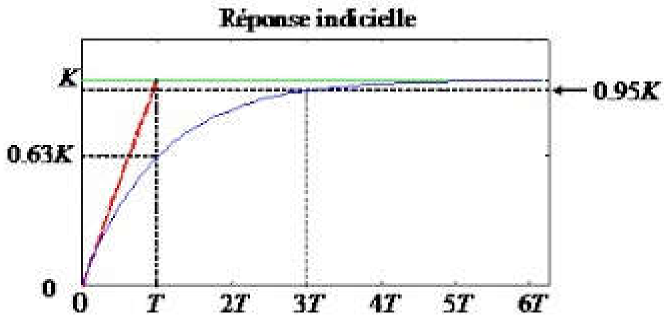
$$a_n.\frac{y^n(t)}{d^n t}+a_{n-1}.\frac{y^{n-1}(t)}{d^{n-1}t}+\ldots+a_0.\frac{y^0(t)}{d^0 t}=b_n.\frac{u^n(t)}{d^n t}+b_{n-1}.\frac{u^{n-1}(t)}{d^{n-1}t}+\ldots+b_0.\frac{u^0(t)}{d^0 t}$$

b) Système de première ordre:

l'équation temporelle qui régit un système du premier ordre simple est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants) elle s'écrit:

$$\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=k*e(t)$$

avec τ , constant de temps($\tau > 0$) en secondes, et K gain statique du système.



réponse indicielle d'un système de premier ordre

c) Système du deuxième ordre:

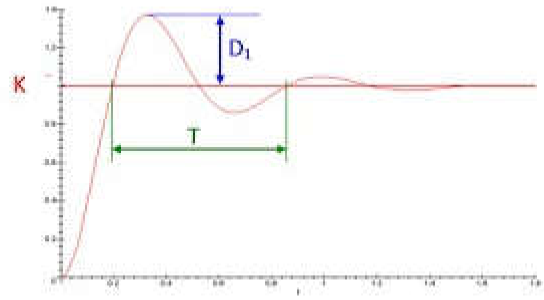
l'équation temporelle qui régit un système du deuxième ordre simple est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre (à coefficients constants) dans le cas général elle s'écrit:

$$s(t)+a_1\frac{ds(t)}{dt}+a_2\frac{d^2 s(t)}{dt^2}=k\,e(t)$$

mais pour des raisons que nous verrons plus loin(solution du polynôme caractéristique) une autre forme est donnée à cette équation, forme qui fait intervenir deux grandeurs caractéristiques du system,

$$H(P)=\frac{k\,\omega_n^2}{P^2+2\xi\,\omega_n P+\omega_n^2}$$

ξ coefficient d'amortissement et *w0* pulsation propre des oscillations non amorties du système. K est toujours les gain statique du système.



réponse indicielle d'un système de deuxième ordre

d) **Circuit RLC**

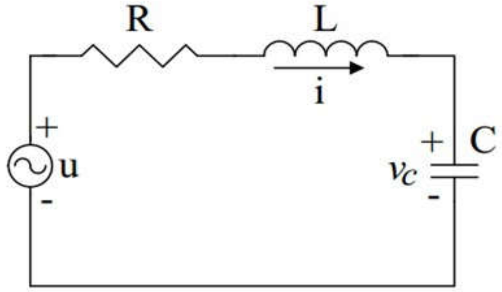
Le circuit RLC ci contre comporte quatre éléments que définit une relation mathématique

- Un générateur de tension défini par la différence de potentiel constante entre ses bornes.
- une résistance définie par la loi d'Ohm : la différence de potentiel aux bornes de l'élément est proportionnelle au courant qui le traverse
- une inductance définie par la relation linéaire entre la tension à ses bornes et la variation du courant qui le traverse

$$U = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

une capacité définie par la relation linéaire entre le courant qui le traverse et la variation de la tension à ses bornes

$$U=\frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$



circuit RLC serie

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=u(t)$$ avec prendre $$y(t)=\int i(t)\,dt$$ on obtient:

$$R\frac{dy(t)}{dt}+L\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}y(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

3. Représentation par fonction de transfert d'un système linéaire continu et invariant :

Une représentation très utilisée pour l'étude des systèmes linéaires est la fonction de transfert (transmittance) obtenue par transformation de l'équation différentielle entrée-sortie en une équation algébrique facile à manipuler. Pour cela on utilise la transformée de Laplace. Nous allons donc tout d'abord présenter un bref rappel de la transformée de Laplace.

a. Transformée de Laplace:

Soit f (t) une fonction nulle pour t < 0 (causale). La transformée de Laplace de cette fonction est définie par :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

F(s) (transformée de Laplace de f(t)) est une fonction de la variable complexe s appelée variable de Laplace. L'existence de cette transformée est soumise à la convergence de l'intégrale qui la définit (pour tout s complexe : $F(s) > \alpha$, avec α est le seuil de convergence).

Soit F (s) la transformée de Laplace de f (t). La transformée de Laplace inverse de F(s) s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

où l'intégration est effectuée dans la région de convergence de la transformée F(s). En pratique, on utilise rarement ce relation pour l'inversion, mais plutôt la décomposition en éléments simples pour utiliser les tables de transformées.

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont présentées dans le Tableau suivante:

Propriété	$f(t)$	$F(s)$
Linéarité	$k_1 f_1(t)+ k_2 f_2(t)+ k_3 f_3(t)+\ldots$	$k_1 F_1(s)+ k_2 F_2(s)+ k_3 F_3(s)+\ldots$
Échelle du temps	$f(at),\ a>0$	$1/a\ F(s/a)$
Dérivée première	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)\text{-}f(0)$
Dérivée seconde	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)\text{-}sf(0)\text{-}f'(0)$
Dérivée d'ordre n	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)\text{-}s^{n\text{-}1}f(0)\text{-}\ s^{n\text{-}2}f'(0)\text{-}$ $s^{n\text{-}3}f''(0)\text{-}\ldots\text{-}f^{n\text{-}1}(0)$
Intégrale	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Décalage temporel	$f(t\text{-}a)$	$e^{as}F(s)$
Multiplier par une exponentielle	$e^{-as}f(t)$	$F(s+a)$
Multiplier par t	$t\,f(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
Multiplier par t^n	$t^n f(t)$	$\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
Diviser par t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(x)dx$
Produit de convolution	$\mathcal{L}(f(t)*g(t)) = \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)$	$F(s)G(s)$

Tableau .1 : Propriétés de la transformée de Laplace

Le Tableau .2 donne les transformées de Laplace des signaux usuels.

Tableau .2 : Transformées de Laplace des signaux d'excitation usuels

$f(t)$	$F(s)$	Seuil de convergence
impulsion de Dirac $\delta(t)$	1	$\forall s$
Échelon unitaire $u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s)>0$
Rampe unitaire $t\ u_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re(s)>0$
Fonction puissance $t^n\ u_{-1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re(s)>0$
Fonctions sin et cos	$\frac{w}{s^2+w^2},\ \frac{s}{s^2+w^2}$	$\Re(s)>0$

b. Fonction de transfert:

Soit un système linéaire invariant d'entrée e(t) et de sortie s(t). On appelle fonction de transfert du système le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à conditions initiales nulles :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$

La fonction de transfert est aussi la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle (la réponse impulsionnelle d'un système est sa sortie à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac, avec conditions initiales nulles). Le dénominateur de la fonction de transfert est dit le polynôme caractéristique du système, et l'ordre du système est le degré de ce polynôme. On peut alors représenter le système sous la forme graphique ci-dessous :

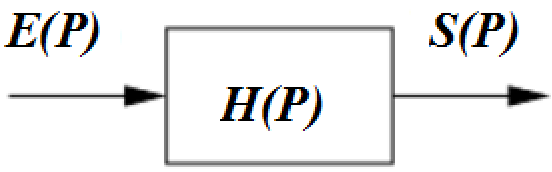


Figure 2.4 : Diagramme fonctionnel d'une fonction de transfert

- **Forme canonique d'une fonction de transfert:**

On définit la forme canonique d'une fonction de transfert en mettant en facteur le terme de plus bas degré au numérateur et au dénominateur. C'est sous cette forme, que la fonction de transfert sera utilisée dans les études d'asservissement.

- ***L'ordre*** est alors le degré du dénominateur après simplification.

- ***Le gain*** est la constante apparaissant en facteur au numérateur.

La forme générale canonique d'un système est alors :

$$H(P) = K\frac{G(P)}{P^{\alpha}\,[1+b_1P+\cdots+b_nP^n]}$$

avec : G(0) = 1 ;

K gain (statique si $\alpha = 0$) ;

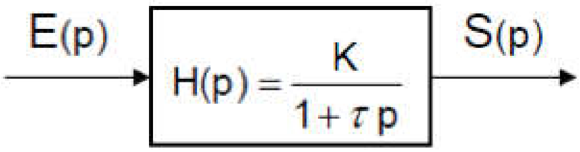
α le nombre d'intégrateurs

- **Forme canonique d'un système du premier ordre**:

Obtenue à partir de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k * e(t)$$

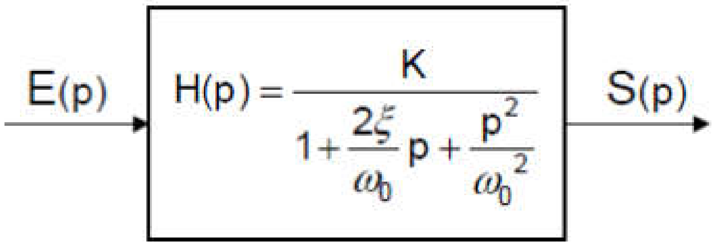
$$S(p)\,[1+\tau\, p] = K\, E(p)$$



- **Forme canonique d'un système du deuxième ordre**,

obtenue à partir de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2\, s(t) = K\, \omega_0^2\, e(t)$$



- **Le schéma-blocs:**

Un système réel comprend en général de multiples sous-systèmes plus simples, correspondant à divers composants technologiques (électricité, mécanique hydraulique...). On peut associer à chaque sous-système une transmittance, le diagramme fonctionnel peut alors être mis sous la forme d'un schéma-blocs qui contient toutes les informations nécessaires pour **simuler** le système global.

Exemple : le schéma-bloc du moteur à courant continu

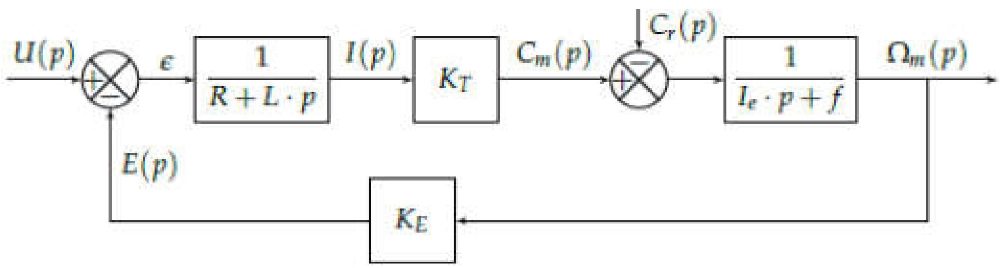


Schéma-bloc moteur à courant continu

4. Représentation par le modèle d'état:

De manière alternative, le comportement d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ peut être décrit par un nombre fini de grandeurs appelées variables d'états. Ces variables permettent de déterminer les évolutions futures du système à partir des états initiaux et de l'entrée. Un modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (variables d'états) et en variables externes comprenant les signaux d'entrée et de sortie. La forme générale d'un tel modèle est la suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) & \text{(équation d'état)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(équation de sortie)} \end{cases}$$

où

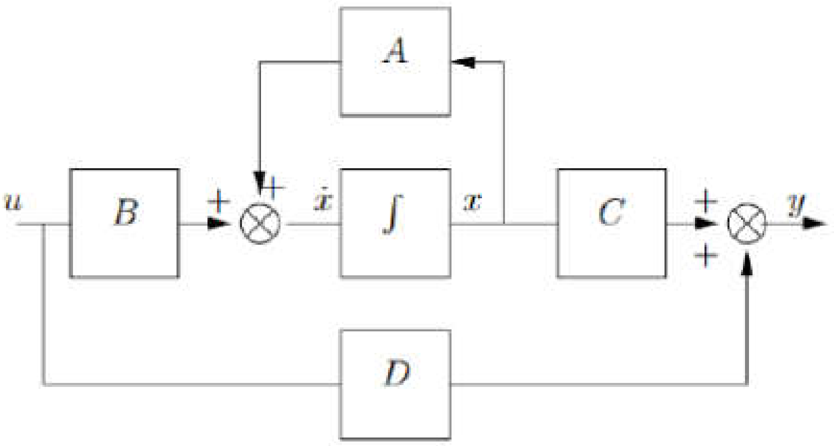
$A \in R^{n\times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution

$B \in R^{n\times 1}$ est la matrice d'entrée

$C \in R^{1\times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation et le scalaire

D représente la transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Il est important de noter que, contrairement à la représentation par équation différentielle, la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend du choix des variables d'état que nous opérons. On adopte fréquemment le schéma-bloc donné par la Figure suivant pour illustrer cette représentation.



III. Bond Graphs

1. Rappel:

Le modèle: Structure mathématique qui reproduit le comportement du système soumis aux mêmes actions.

Il est établi dans le cadre d'hypothèses simplificatrices .

Il doit reproduire la réalité physique le plus précisément possible avec une structure mathématique la plus simple possible.

Le modèle exacte n'existe pa.s

2. Présentation des Bond Graphs

Le Bond Graph (graphe de liaison) est un outil de modélisation graphique pluridisciplinaire (électrique, mécanique, hydraulique, thermique, chimique)

Il adopte un langage unifié

C'est un outil évolutif qui permet aisément d'ajouter ou supprimer de nouveaux éléments

3. Historique

Défini initialement en 1959 au Boston par Henry M. Paynter.

Le principe repose sur une approche énergétique

Le système se décompose en sous systèmes qui échangent de la puissance

La terminologie est unifiée pour tous les domaines de la physique et fondée sur les analogies

Représentation et utilisation :

La représentation graphique permet de visualiser les transferts de puissance et de causalité

Le modèle aboutit à une écriture systématique des équations mathématiques

4. Concepts et définitions

Liens de puissance

Les liens de puissance connectent les multiports et représentent la puissance échangée entre eux

Ce lien (Bond) est désigné par le symbole d'une demi-flèche

La direction de la puissance positive est représentée par le sens de la demi-flèche

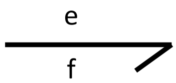
5. Variables d'effort et de flux

La puissance s'exprime comme le produit de deux variables complémentaires

La variable d'effort **e**

La variable de flux **f**

Le lien porte les deux variables



Par convention, le flux est toujours représenté du coté de la demi flèche

6. Variables généralisées d'effort et de flux

Domaine physique	Effort	Flux
Electrique	Tension u(V)	Courant i(A)
Mécanique de translation	Force F(N)	Vitesse de translation v(m/s)
Mécanique de rotation	Couple Γ(N.m)	Vitesse angulaire ω(rad/s)
Hydraulique	Pression P(Pa)	Débit volumique $\dot{V}$ (m^3/s)
Thermique	Température T(K)	Flux d'entropie $\dot{S}$ (J/(K.s))
Chimique (transformation)	Potentiel chimique µ(J/mol)	Flux molaire $\dot{n}$ (mol/s)
Chimique (cinétique)	Affinité chimique	Vitesse de réaction $\dot{\zeta}$ (mol/s)

7. Formalisation de concept de puissance:

La puissance est toujours le produit de deux variables duales

$$P(t) = e(t) \times f(t)$$

$e(t)$: effort généralisé

$f(t)$: flux généralisé

L'**énergie** $E(t)$ associée à $P(t)$ est définie par:

$$\boxed{E(t) = \int_0^t P(\tau)d\tau}$$

Le **moment généralisé** $p(t)$ est défini par:

$$\boxed{p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau}$$

Le **déplacement généralisé** $q(t)$ est défini par:

$$\boxed{q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau}$$

8. Principe de bond graph

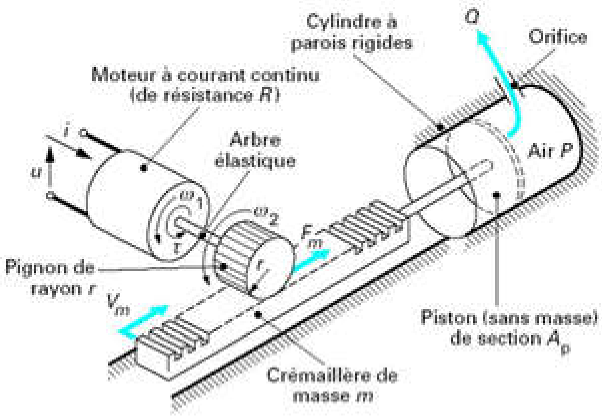
Transmettre de la puissance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ revient donc à transmettre deux variables duales (e, f) de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \xrightarrow[f]{e} \mathcal{B}$$

Figure 2: Bond Graph représentant le transfert de puissance de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$

- Un arc orienté, terminé par une **demi-flèche** transporte deux variables duales.
- L'orientation de la demi-flèche indique que $\mathcal{A}$ transmet la puissance vers $\mathcal{B}$.

9. Exemple



Exemple de système dynamique multi-physique

$$\text{Batterie} \xrightarrow[f_1 = i]{e_1 = u} \text{Moteur} \xrightarrow[f_2 = \omega_1]{e_2 = \tau} \text{Engrenage} \xrightarrow[f_3 = V_m]{e_3 = F_m} \text{Vérin} \xrightarrow[f_4 = Q]{e_4 = p}$$

10. Elément d'un bond graph

a. Source de flux

$$\mathcal{S}_f : F \xrightarrow[f]{e}$$

Source de flux générant un flux $f = F$.

Une source de flux génère la variable flux (f) du lien qui lui est connecté, quelquesoit l'effort (e).

Exemples: Générateur de courant électrique, pompe hydraulique à débit constant.

b. Source d'effort

$$\mathcal{S}_e : E \xrightarrow[f]{e}$$

Source d'effort générant un effort $e = E$.

Une source d'effort génère la variable effort (e) du lien qui lui est connecté, quelquesoit le flux (f).

Exemples: Générateur de tension électrique, générateur de couple, thermostat.

c. Elément résistif

$$\xrightarrow[f]{e} R : r$$

Élement résistif de valeur r.

L'élément résistif est défini par une relation statique (*i.e.* indépendante du temps) liant l'effort e et le flux f.

- *Cas linéaire:*

$$\boxed{e(t) = r \times f(t)}$$

- *Cas général:*

$$\boxed{e(t) = r\,[f(t)]}$$

Exemple élément résistif

Domaine	Interprétation	Formulation
Translation	Frottement visqueux Frottement sec	$F = rV$ $F = r \times \text{sgn}(V)$
Rotation	Frottement visqueux Frottement sec	$\Gamma = r\omega$ $\Gamma = r \times \text{sgn}(\omega)$
Hydraulique	Restriction pour un écoulement laminaire Restriction pour un écoulement turbulent	$p = rQ$ $p = rQ^2$
Électricité	Résistance	$U = rI$

d. Elément inertiel

$$\xrightarrow[f]{e} I : i$$

Élement inertiel de valeur i.

L'élément inertiel est défini par une relation statique liant le flux $f(t)$ et le moment $p(t)$:

$$\boxed{p(t) = i \times f(t)} \quad \text{avec} \quad p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$$

qui s'écrit encore:

$$f(t) = \frac{1}{i}\int_0^t e(\tau)d\tau \quad \text{ou} \quad e(t) = i\frac{df}{dt}$$

Exemple des éléments inertiels

Domaine	Interprétation	Formulations	
Translation	Masse en translation	$F = M\frac{dV}{dt}$	$V = \frac{1}{M}\int_0^t F(\tau)d\tau$
Rotation	Masse en rotation	$\Gamma = J\frac{d\omega}{dt}$	$\omega = \frac{1}{J}\int_0^t \Gamma(\tau)d\tau$
Hydraulique	Tube	$p = I\frac{dQ}{dt}$	$Q = \frac{1}{I}\int_0^t p(\tau)d\tau$
Électricité	Inductance	$U = L\frac{dI}{dt}$	$I = \frac{1}{L}\int_0^t U(\tau)d\tau$

Table 3: Élements inertiels dans différents domaines de la physique (cf. Tab. 1 pour les notations).

Volant d'inertie

Bobine

Tube

e. Stockage d'énergie cinétique

L'élément inertiel **stocke de l'énergie cinétique**.

$$\boxed{E(t) = \int_0^t e(\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t i\frac{df}{d\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}if^2(t)}$$

Exemples:

Translation $E(t) = \frac{1}{2}MV^2(t)$

Électricité $E(t) = \frac{1}{2}LI^2(t)$

f. Elément capacitif

$$\xrightarrow[f]{e} C : c$$

Élement capacitif de valeur c.

L'élément capacitif est défini par une relation statique liant l'effort $e(t)$ et le déplacement $q(t)$:

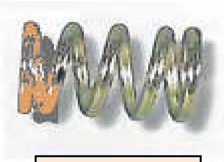
$$\boxed{q(t) = c \times e(t)} \quad \text{avec} \quad q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

qui s'écrit encore:

$$e(t) = \frac{1}{c}\int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{ou} \quad f(t) = c\frac{de}{dt}$$

Exemple des éléments capacitifs

Domaine	**Interprétation**	**Formulations**	
Translation	Ressort linéaire	$V = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$F = k\int_0^t V(\tau)d\tau$
Rotation	Ressort de torsion	$\omega = \frac{1}{k}\frac{d\Gamma}{dt}$	$\Gamma = k\int_0^t \omega(\tau)d\tau$
Hydraulique	Réservoir	$Q = C\frac{dp}{dt}$	$p = \frac{1}{C}\int_0^t Q(\tau)d\tau$
Électricité	Condensateur	$I = C\frac{dU}{dt}$	$U = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau$



Ressort linéaire

Ressort de torsion

Condensateur

réservoir

- **Stockage d'énergie potentiel**

L'élément capacitif **stocke de l'énergie potentielle**.

$$\boxed{E(t) = \int_0^t e(\tau)c\frac{de}{d\tau}d\tau = \frac{1}{2}ce^2(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{c}}$$

Exemples:

Translation $E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$

Électricité $E(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$

g. Machine idéales

Une machine idéale $\mathcal{M}$ réalise une conversion de puissance sans aucunes pertes.

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} \mathcal{M} \xrightarrow[f_2]{e_2}$$

Machine idéale $\mathcal{M}$.

La conservation de la puissance impose alors:

$$\boxed{e_1 f_1 = e_2 f_2}$$

h. Transformateur

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} TF : m \xrightarrow[f_2]{e_2}$$

Transformateur de rapport m.

Le transformateur multiplie le **flux** f_1 par m pour générer le **flux** f_2.

$$\boxed{\begin{array}{l} f_2 = m f_1 \\ e_1 = m e_2 \end{array}}$$

Exemple transformateur

Domaine	**Transformateur**
Translation	Levier
Rotation	Engrenage
Électricité	Transformateur électrique
Mécano-hydrolique	Vérin

Table 5: Transformateurs dans différents domaines de la physique

i. Gyrateur

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} GY : m \xrightarrow[f_2]{e_2}$$

Gyrateur de rapport m.

Le gyrateur multiplie le **flux** f_1 par m pour générer l'**effort** e_2.

$$\boxed{\begin{aligned} e_2 &= m f_1 \\ e_1 &= m f_2 \end{aligned}}$$

j. Jonction

Comment entre eux les différents éléments

Une jonction $\mathcal{J}$ permet de relier entre eux N éléments d'un Bond Graph

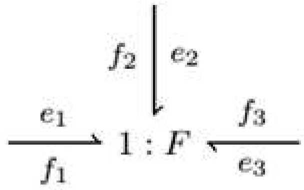
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, "f_2"', "e_2"] & \\ \bullet \arrow[r, "e_1", "f_1"'] & \mathcal{J} & \bullet \arrow[l, "f_3"', "e_3"] \end{tikzcd}$$

Exemple de jonction $\mathcal{J}$ à $N = 3$ liens.

La conservation de la puissance impose:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n f_n = 0} \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

- Jonction 1:



Exemple de jonction 1 à $N = 3$ liens.

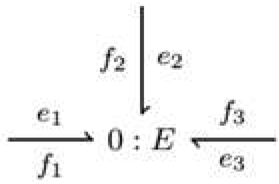
Les **flux** sur tous les liens arrivant ou partant d'une jonction 1 sont **identiques**:

$$\boxed{f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_N = F}$$

La conservation de la puissance impose alors:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n = 0} \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

- Jonction 0



Exemple de jonction 0 à $N = 3$ liens.

Les **efforts** sur tous les liens arrivant ou partant d'une jonction 0 sont **identiques**:

$$\boxed{e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = e_N = E}$$

La conservation de la puissance impose alors:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} a_n f_n = 0} \quad \text{avec} \quad a_n = \pm 1 \quad \text{selon le sens de la flèche.}$$

11. Construction d'un bond graph

Méthodologie:

1. Analyse: détermination des potentiels et choix sur chaque branche d'un sens de circulation du courant.
2. Affecter une jonction 0 à chaque potentiel.
3. Insérer une jonction 1 entre chaque jonction 0 si un élément I, R ou C ou une source est situé entre les deux potentiels correspondant.
4. Affecter les sens de transmission de la puissance en reliant les jonctions par des liens.
5. Placer les éléments R, C et L ainsi que les sources.
6. Simplifier si possible.

12. Règle de simplification

- Si une jonction $\mathcal{J}$ (0 ou 1) n'a qu'un lien en entrée et un lien en sortie, alors on peut éliminer cette jonction.

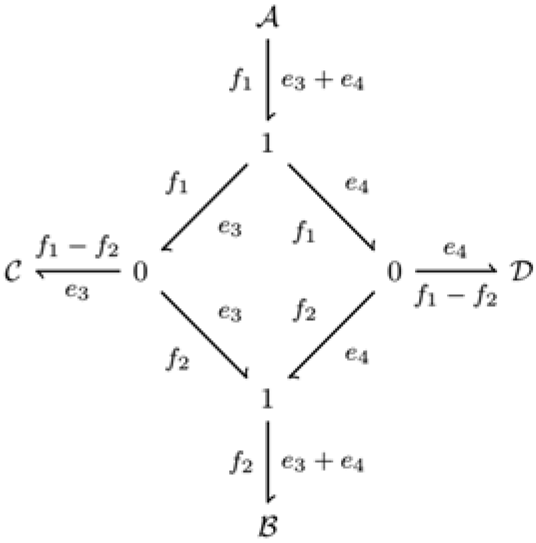
$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

- Si deux jonctions 1 sont reliées par un seul lien, on peut les réduire à une seule jonction 1 traduisant le flux commun.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[d, dash] & \mathcal{D} \arrow[d, dash] & \\
\mathcal{A} \arrow[r] & 1:f_1 \arrow[r] & 1:f_2 \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, dash] & & \mathcal{D} \arrow[dl, dash] \\
\mathcal{A} \arrow[r] & 1:f_{1,2} \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

- Si deux jonctions 0 sont reliées par un seul lien, on peut les réduire à une seule jonction 0 traduisant l'effort commun.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C} \arrow[d, dash] & \mathcal{D} \arrow[d, dash] & \\
\mathcal{A} \arrow[r] & 0:e_1 \arrow[r] & 0:e_2 \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, dash] & & \mathcal{D} \arrow[dl, dash] \\
\mathcal{A} \arrow[r] & 0:e_{1,2} \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$



Même effort sur les entrées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et même flux sur les sorties $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

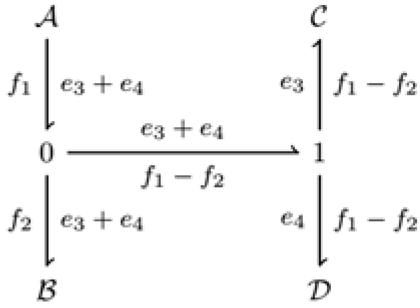
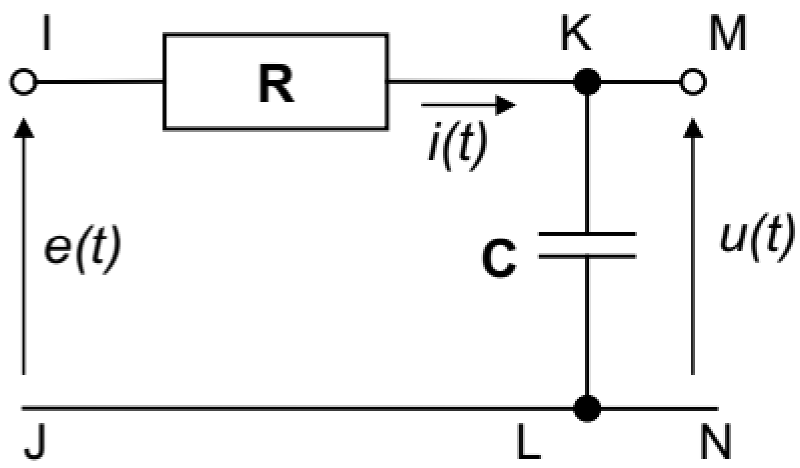


Schéma équivalent

TD:1

Exercice 1:

Reprenons le système correspondant au circuit RC.



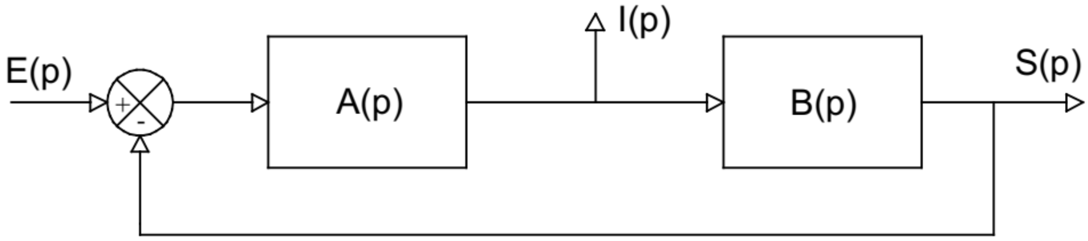
- ***Entrée*** : Tension aux bornes du circuit.
- ***Sortie*** : Tension aux bornes du condensateur.

1- Ecrire les équations différentielles qui modélisent la dynamique de sortie de ces systèmes.

2. Déduire la fonction de transfert de ce système, puis donner le schéma fonctionnel le plus simple correspondant (un seul bloc).

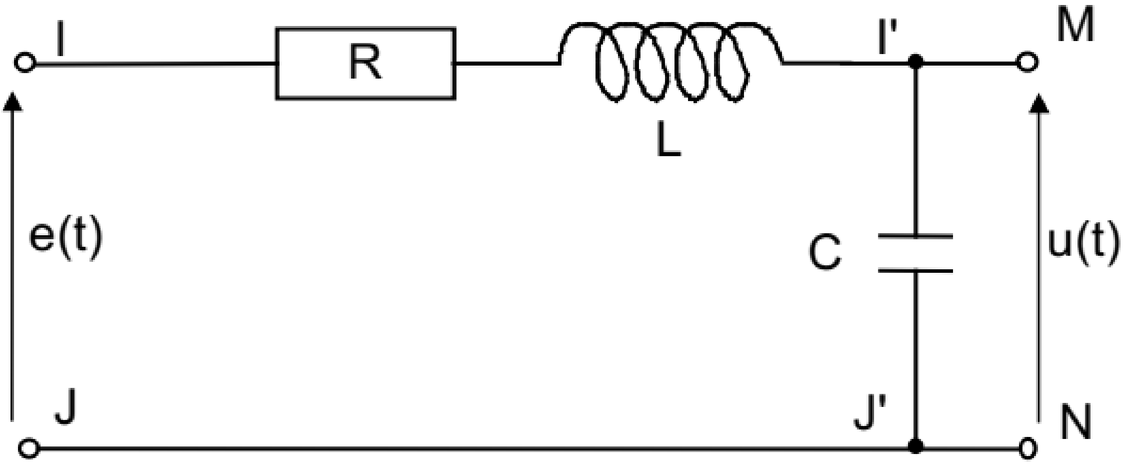
3. Le schéma fonctionnel peut se faire selon différents niveaux, suivant les informations que l'on souhaite utiliser.

Montrer que l'on peut mettre la transmittance du circuit RC sous la forme du schéma-blocs ci dessous, en explicitant les deux blocs A(p) et B(p) : I(p) est une sortie permettant de visualiser le courant circulant dans le circuit.



Exercice 2:

Soit un circuit RLC classique, on se propose de déterminer la fonction de transfert, et l'ordre de ce sous-système.



1. Mettre en équations le système. Les équations qui régissent ce système sont bien sûr les équations de l'électricité.

2. A l'aide de la transformée de Laplace et des différents théorèmes déterminer la fonction de transfert du circuit. Quel est l'ordre de ce système? Identifier la fonction de transfert avec la forme suivante :

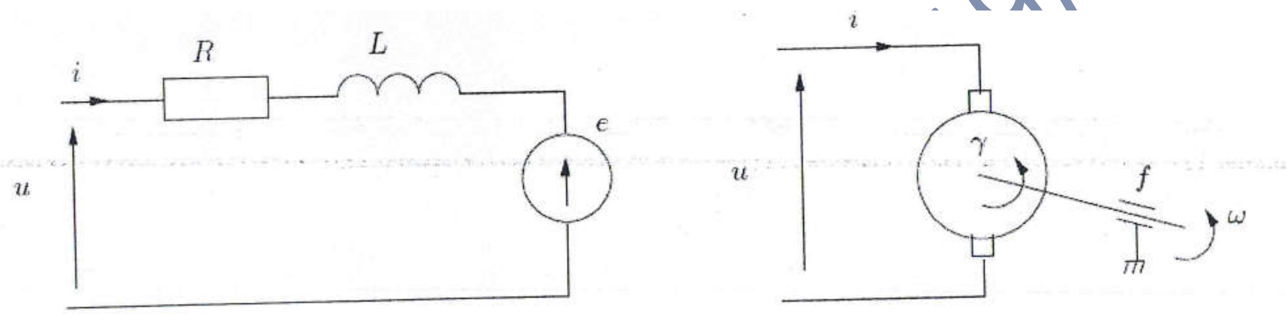
$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

3- Préciser les expressions des trois données K, ξ, ω_0

4. Donner alors une représentation du schéma fonctionnel, en faisant apparaître en entrée la tension E(p), et en sortie à la fois la tension U(p), et le courant I(p).

Exercice 3:

Le moteur à courant continu (MCC) étant un système électromécanique, les équations dynamiques résultent de la combinaison de modélisations mécanique et électrique du moteur. Schématiquement décrites par la figure suivante. Pour la partie électrique, on calcule la tension aux bornes de l'induit .



L'équation électrique, liant la tension ***u*** aux bornes de l'induit et le courant d'induit ***i*** s'écrits:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + e = u$$

Où γ est le couple moteur, **f** le coefficient de frottement visqueux et **J** le moment d'inertie du rotor. On ne tient pas compte en première approximation du frottement sec, qui introduirait des termes non linéaires. Par construction, le couple γ est proportionnel au courant d'induit **i** :

$$\gamma = K_m i.$$

En règle générale les coefficients Ke et Km sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, négligeant alors les pertes durant la conversion électromécanique de puissance.

En posant K = Ke = Km.

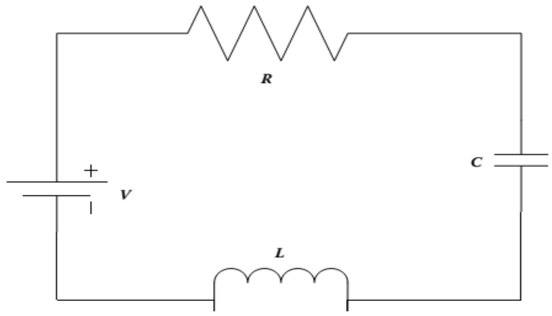
$$Ki = f\omega + J\frac{d\omega}{dt}. \qquad K\frac{di}{dt} = f\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

$$\frac{R}{K}\left(f\omega + J\frac{d\omega}{dt}\right) + \frac{L}{K}\left(f\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}\right) + K\,\omega = u.$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ}\frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ}\,\omega = \frac{K}{LJ}u.$$

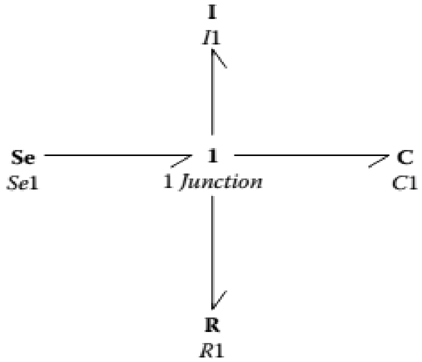
Cette équation différentielle relie **ω** et **u** par l'intermédiaire de paramètres constants dans le temps. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

TD2:

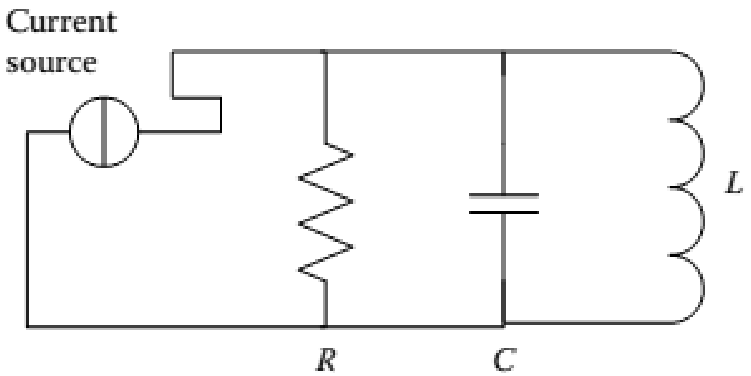


Circuit RLC en série

- La figure montre l'un des circuits électriques les plus simples: le circuit RLC avec R, C et L connectés en série avec une source de tension
- Nous savons que le courant ou le flux dans ce circuit est le même (connexion en série) , tandis que la chute de tension aux bornes de chaque élément est différente.
- la somme de toutes les chutes de tension aux bornes de la boucle est égale à 0 (loi de Kirchoff).
- La représentation sous forme de graphique de liaison de ce système est donc simple:
- Les quatres éléments sont reliés en série, la jonction (1), la figure suivant. (Dans jonctions "1", le flux est le même, mais l'effort est différent dans chacun, de sorte que la somme de tous les efforts est égal à 0.
- Dans le modèle de graphique de liaison illustré à la figure suivant, la tension de la batterie est Se (source) d'effort), R la résistance, C la capacité et L l' inductance.

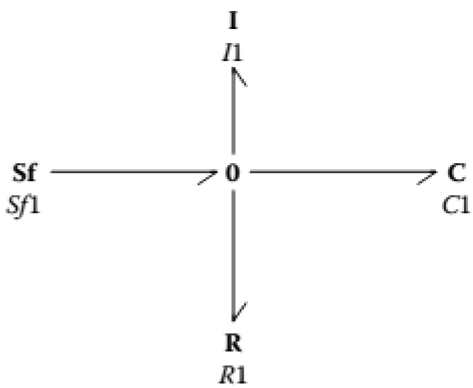


Bond graph circuit RLC en série



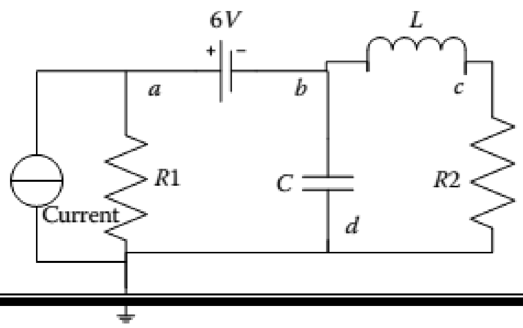
Circuit RLC en parallèle

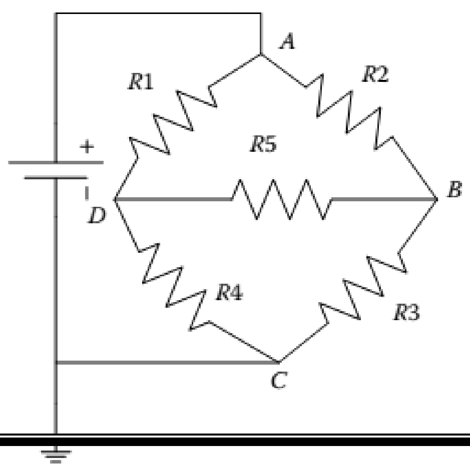
Les trois éléments son connectés à la jonction 0 (monter en parallèle), l'effort est le même et flux est différent



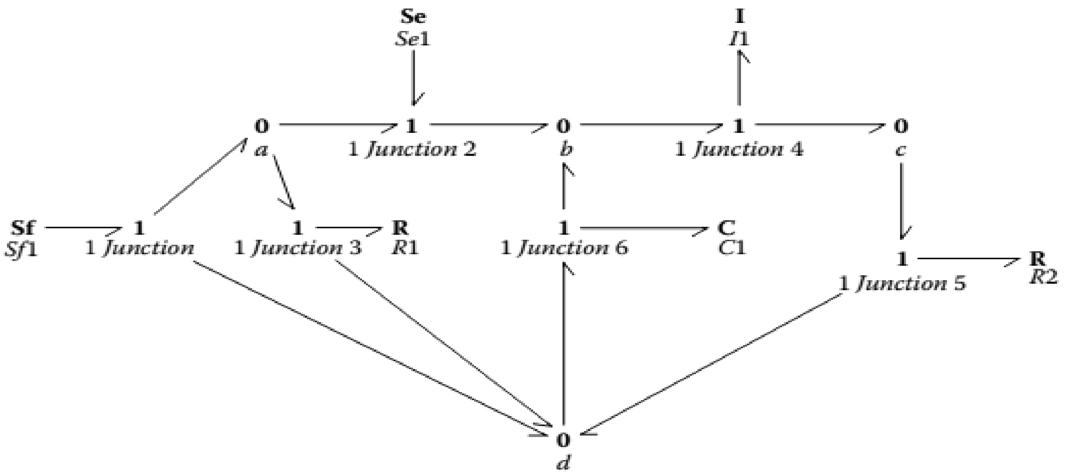
Bond graph d'un circuit RLC parallèle

On demande la représentation bond graph des circuits suivants

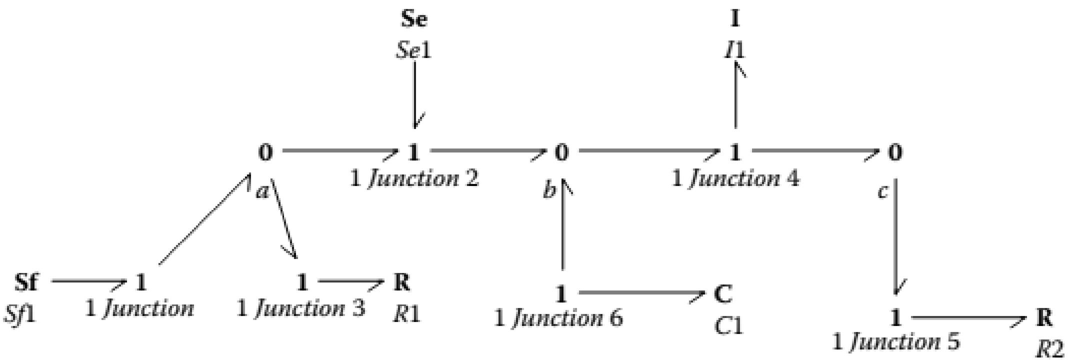




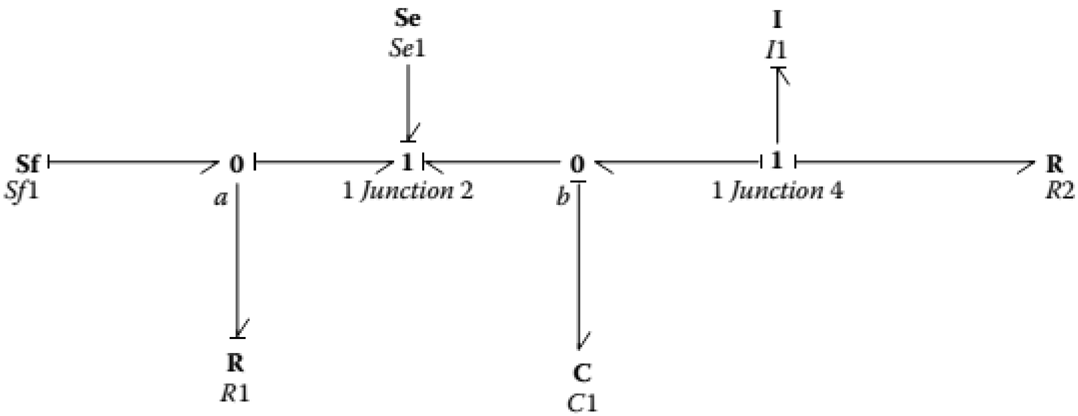
La figure suivant montre un circuit avec les lettres a, b, c et d indiquant quatre emplacements potentiels.



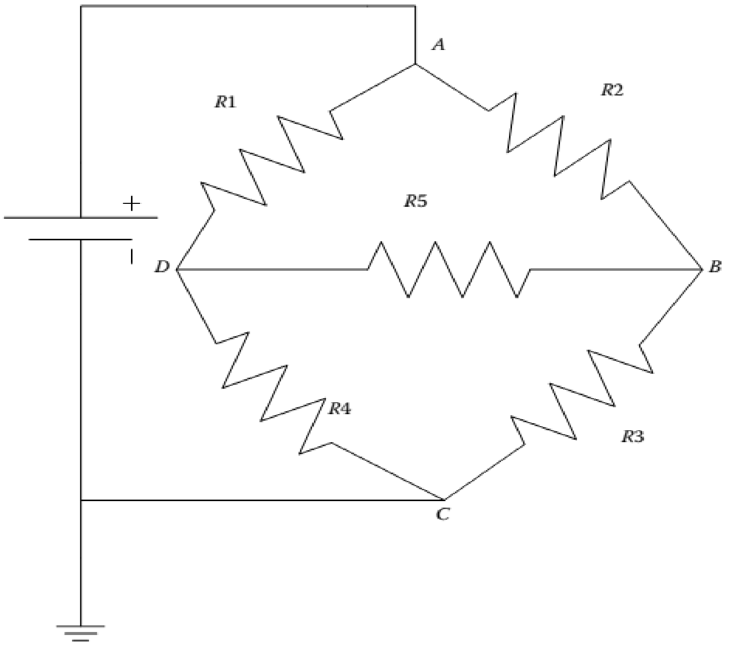
Dans ce diagramme, la jonction d représente le potentiel de terre et doit être supprimée (conformément à l'étape 4).



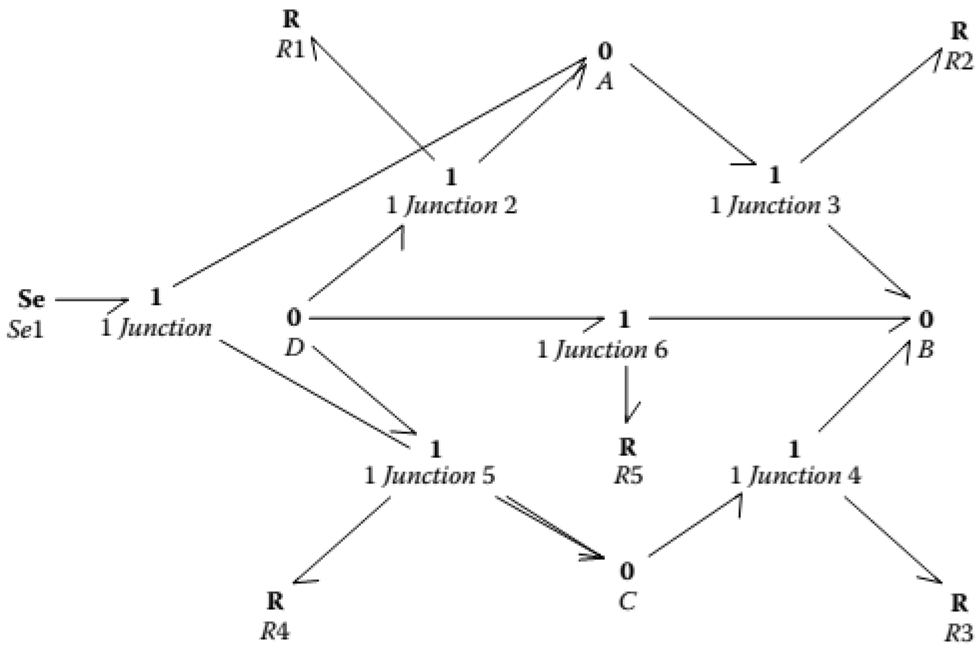
Une fois la jonction d supprimée, le BG semble plus simple, comme le montre la figure suivant . Une simplification supplémentaire est possible en supprimant certaines jonctions redondantes qui ne sont connectées qu'à un seul élément (c'est-à-dire en appliquant les règles de simplification pertinentes décrit précédemment).



On considère le pont de Wheatstone, les résistances de 1 à 5, les efforts A, B, C, and C



Pont Wheatstone Le BG



Simplification