

## **III. Modélisation des machines électriques à courant continu**

### **III.1. Introduction**

La machine à courant continu (MCC) est un convertisseur électromécanique permettant la conversion bidirectionnelle de l'énergie. Suivant la méthode de création du champ magnétique, on distingue les excitations électromagnétique et magnétoélectrique. Si la première est créée à l'aide de bobines, la seconde est réalisée à l'aide d'aimants permanents. L'excitation électromagnétique est la plus répandue. Elle peut être obtenue à l'aide d'une source d'alimentation indépendante, ou bien à travers l'induit (auto-excitation). Selon la mode de connexion de l'enroulement d'excitation par rapport à l'induit qui a une grande influence sur les propriétés de la machine, on distingue les excitations indépendante, shunt, série et composée.

Les MCC de conception usuelle sont utilisées en moteur et en générateur. Elles sont réalisées pour différentes gammes de puissances, de tensions et de vitesses de rotation. Cependant la présence du collecteur limite ces machines en puissance et en tension. Leur atout principal réside dans la simplicité de commande et de régulation.

Même si elles sont de moins en moins utilisées dans le domaine de l'industrie, leur emploi comme moteur reste sans équivalent dans le domaine des faibles vitesses ; les équipements domestiques, automobiles (essuie glaces, ventilateurs, démarreur),...

### **III.2. Modèle de la machine à courant continu**

Les enroulements considérés dans le modèle sont :

- Les enroulements d'excitation série et shunt représentés par les indices respectivement  $s$  et  $f$  ;
- Les enroulements d'induit est représenté par l'indice  $a$ .

#### **III.2.1. Fonctionnement en génératrice**

##### **III.2.1.1. Génératrice à excitation séparée**

L'excitation est séparée ou indépendante si le courant dans l'inducteur est fourni par une source autre que la génératrice elle-même, et la machine ne possède qu'un seul enroulement d'excitation  $f$ .

Les équations du flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ M_{fd} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Et :

$$\begin{cases} U_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} \\ U_a = -R_a I_a - L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{fd} I_f \\ C_e = M_{fd} I_f I_a \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

### III.2.1.2. Génératrice à excitation shunt

La machine est à excitation shunt lorsque le circuit inducteur  $f$  est monté aux bornes de l'induit. Dans ce cas  $U_f = U_a$  (la tension aux bornes de l'inducteur est égale à celle aux bornes du circuit induit).

Les équations du flux et des tensions deviennent :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ M_{fd} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{cases} U_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} \\ U_a = -R_a I_a - L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{fd} I_f \\ C_e = M_{fd} I_f I_a \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

### III.2.1.3. Génératrice à excitation série

L'enroulement inducteur  $s$  est connecté en série avec l'induit avec :

$$I_s = I_a \quad \text{et} \quad U = U_a - U_s$$

$U_a$  la tension aux bornes de la génératrice

$U_s$  la tension aux bornes de l'excitation série

Les équations du flux :

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_d \\ \psi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ M_{sd} & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_a \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Et des tensions :

$$\begin{cases} U_s = R_s I_a + L_s \frac{dI_a}{dt} \\ U_a = -R_a I_a - L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{sd} I_a \\ U = -(R_s + R_a - \Omega_r M_{sd}) I_a - (L_a + L_s) \frac{dI_a}{dt} \\ C_e = M_{sd} I_a^2 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

### III.2.2. Fonctionnement en moteur

Les équations obtenues lors du fonctionnement en génératrice seront considérées en fonctionnement moteur avec un changement de signe du courant d'induit :

#### III.2.2.1. Moteur à excitation séparée

On effectue un changement de signe sur les expressions précédentes, on aura :

$$\begin{cases} U_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} \\ U_a = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{fd} I_f \\ C_e = M_{fd} I_f I_a \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

#### III.2.2.2. Moteur à excitation shunt

Les expressions deviennent :

$$\begin{cases} U_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} \\ U_a = U_f = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{fd} I_f \\ C_e = M_{fd} I_f I_a \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

### III.2.2.3. Moteur série

$$\begin{cases} U_s = R_s I_a + L_s \frac{dI_a}{dt} \\ U_a = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega_r M_{sd} I_a \\ U = (R_s + R_a + \Omega_r M_{sd}) I_a + (L_s + L_a) \frac{dI_a}{dt} \\ C_e = M_{sd} I_a^2 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

### III.3. Equation du mouvement

L'étude des régimes transitoires fait intervenir des variations non seulement des grandeurs électriques (tension, courant, f.é.m. et flux) mais aussi des paramètres mécaniques, couple et vitesse.

L'équation de mouvement s'écrit :

$$C_e - C_r = F\Omega_r + J \frac{d\Omega_r}{dt} \quad (\text{III.10})$$

## **IV. Modélisation des machines asynchrones**

### **IV.1. Introduction**

On considère le cas des machines triphasées à rotor bobine sachant que le modèle est globalement valable pour les machines à rotor à cage. Le stator est identique à celui des machines synchrones. Le rotor est de même nature que le stator.

### **IV.2. Description paramétrique de la machine asynchrone triphasée**

La machine asynchrone triphasée comporte un stator fixe et un rotor mobile autour de l'axe de symétrie de la machine. Dans des encoches régulièrement réparties sur la face interne du stator sont logés trois enroulements identiques, à  $p$  paires de pôles ; leurs axes sont distants entre eux d'un angle électrique égal à  $2\pi/3$ .

Les phases du stator sont alimentées par un réseau triphasé de tensions sinusoïdales à fréquence et amplitude constantes ou par un onduleur de tension ou de courant à fréquence et à amplitude réglables.

L'étude de cette machine traduit les lois de l'électromagnétisme dans le contexte habituel d'hypothèses simplificatrices :

- Entrefer constant ;
- Effet des encoches négligé ;
- Distribution spatiale sinusoïdale des forces magnétomotrices d'entrefer ;
- Circuit magnétique non saturé et à perméabilité constante ;
- Pertes ferromagnétiques négligeables ;
- L'influence de l'effet de peau et de l'échauffement sur les caractéristiques n'est pas prise en compte.

Parmi les conséquences importantes des hypothèses, on peut citer :

- L'additivité des flux ;

- La constante des inductances propres ;
- La loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements statoriques et rotoriques en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

La machine est représentée à la Figure 1 par ses six enroulements dans l'espace électrique ; l'angle  $\alpha$  repère l'axe de la phase rotorique de référence  $\bar{R}_a$  par rapport à l'axe fixe de la phase statorique de référence  $\bar{S}_a$ . Les flux sont comptés positivement selon les axes des phases ; le sens des enroulements est repéré conventionnellement par un point (.) : un courant positif entrant par le point crée un flux positif dans l'enroulement.

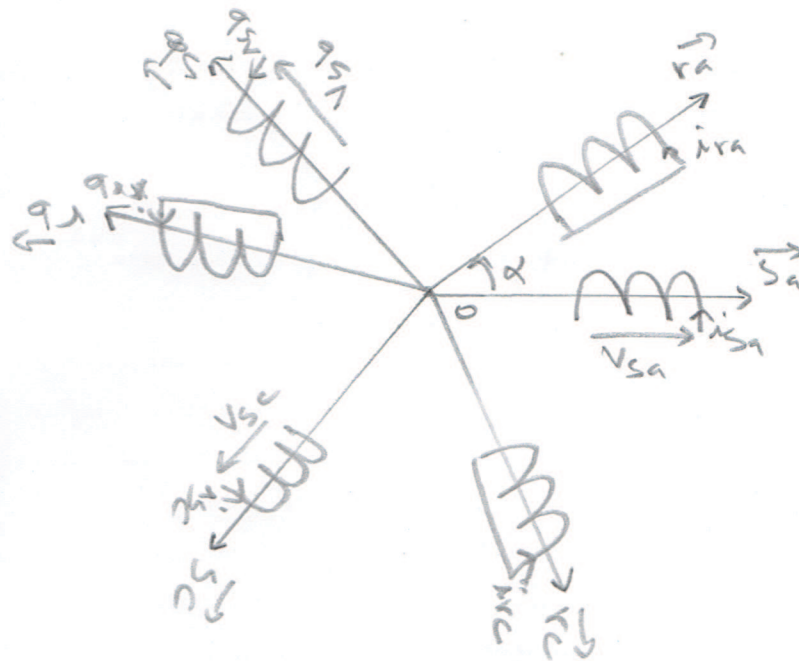


Figure 1 : Représentation des enroulements de la machine asynchrone triphasée dans l'espace électrique

### Définitions et notations

$s, r$  : indices respectifs du stator et du rotor ;

$p$  : nombre de paires de pôles ;

$R_s, l_s$  : résistance et inductance propre d'une phase statorique ;

$R_r, l_r$  : résistance et inductance propre d'une phase rotorique ;

$M_s$  : coefficient de mutuelle inductance entre deux phases du stator ;

$M_r$  : coefficient de mutuelle inductance entre deux phases du rotor ;

$M_{sr}$  : maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor ;

$\alpha / p$  : angle mécanique entre  $\vec{R}_a$  et  $\vec{S}_a$  ;

$\alpha$  : angle électrique entre  $\vec{R}_a$  et  $\vec{S}_a$  ;

$v_{sa}, v_{sb}, v_{sc}$  : tensions d'alimentation des phases  $S_a, S_b, S_c$  ;

$i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}$  : courants statoriques des phases  $S_a, S_b, S_c$  ;

$v_{ra}, v_{rb}, v_{rc}$  : tensions aux bornes des phases  $R_a, R_b, R_c$  ;

$i_{ra}, i_{rb}, i_{rc}$  : courants rotoriques des phases  $R_a, R_b, R_c$  ;

$\Omega$  : vitesse angulaire de rotation ;

$\Omega_s$  : vitesse angulaire du champ tournant ;

$\omega$  : vitesse angulaire électrique  $\omega = p\Omega$  ;

$C_e$  : couple électromagnétique.

Les coefficients instantanés de mutuelle inductance entre le rotor et le stator s'expriment en fonction de  $M_{sr}$  et de  $\alpha$ , on pose :

$$\begin{cases} M_1 = M_{sr} \cos(\alpha) \\ M_2 = M_{sr} \cos(\alpha - 2\pi/3) \\ M_3 = M_{sr} \cos(\alpha + 2\pi/3) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

### IV.3. Equations générales de la machine asynchrone triphasée

Considérons l'un des six enroulements et exprimons la relation entre la tension  $v$ , qui lui est appliquée, le courant  $i$  et le flux totalisé  $\phi$  (Figure 2).

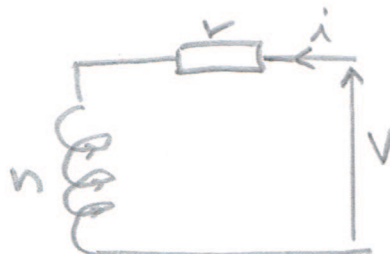


Figure 2 : Modèle d'une phase avec force électromotrice.

Loi de la maille :  $v = ri - e$

Loi de Faraday :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$

D'où :  $v = ri + \frac{d\phi}{dt}$

Les équations aux tensions s'écrivent pour le stator :

$$\begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + (d/dt) \begin{bmatrix} \phi_{sa} \\ \phi_{sb} \\ \phi_{sc} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Ou :

$$[v_{sabc}] = [R_s][i_{sabc}] + d/dt[\phi_{sabc}] \quad (\text{IV.3})$$

et pour le rotor supposé court-circuité :

$$\begin{bmatrix} v_{ra} \\ v_{rb} \\ v_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} + (d/dt) \begin{bmatrix} \phi_{ra} \\ \phi_{rb} \\ \phi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Ou :

$$[v_{rabc}] = [R_r][i_{rabc}] + d/dt[\phi_{rabc}] = [0] \quad (\text{IV.5})$$

Une matrice des inductances  $[L(\alpha)]$  établit la relation entre les flux et les courants ; elle comporte 36 coefficients non nuls dont la moitié dépend du temps, par l'intermédiaire de  $\alpha$  (position du rotor).



Soit :

$$\begin{bmatrix} \phi_{sa} \\ \phi_{sb} \\ \phi_{sc} \\ \phi_{ra} \\ \phi_{rb} \\ \phi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s & M_1 & M_3 & M_2 \\ M_s & l_s & M_s & M_2 & M_1 & M_3 \\ M_s & M_s & l_s & M_3 & M_2 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_3 & l_r & M_r & M_r \\ M_3 & M_1 & M_2 & M_r & l_r & M_r \\ M_2 & M_3 & M_1 & M_r & M_r & l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \\ i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

La matrice des flux réels fait apparaître quatre sous-matrices d'inductances :

$$\begin{bmatrix} \phi_{sabc} \\ \phi_{rabc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{Avec : } [L_s] = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s \\ M_s & l_s & M_s \\ M_s & M_s & l_s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} l_r & M_r & M_r \\ M_r & l_r & M_r \\ M_r & M_r & l_r \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^t = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi/3) & \cos(\alpha - 2\pi/3) \\ \cos(\alpha - 2\pi/3) & \cos(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi/3) \\ \cos(\alpha + 2\pi/3) & \cos(\alpha - 2\pi/3) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Finalement :

$$[v_{sabc}] = [R_s][i_{sabc}] + (d/dt)\{[L_s][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}]\} \quad (\text{IV.11})$$

$$[v_{rabc}] = [R_r][i_{rabc}] + (d/dt)\{[M_{sr}]^t[i_{sabc}] + [L_r][i_{rabc}]\} \quad (\text{IV.12})$$

## IV.4. Transformation de Park appliquée à la machine asynchrone triphasée

### IV.4.1. Equations électriques d'un enroulement triphasé dans les axes $d$ et $q$

La transformation de Park d'angle  $\psi$  est :

$$[P(\psi)] = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \cos \psi & \cos(\psi - 2\pi/3) & \cos(\psi + 2\pi/3) \\ -\sin \psi & -\sin(\psi - 2\pi/3) & -\sin(\psi + 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Cette matrice est orthogonale, c'est-à-dire  $[P(\psi)]^t = [P(\psi)]^{-1}$ . La transformation de Park peut être appliquée sur les tensions, les courants et les flux.

La transformation linéaire  $[P]$  est appliquée à l'équation généralisée  $[v_{abc}] = [R][i_{abc}] + (d/dt)[\phi_{abc}]$  :

$$[P]^{-1}[v_{dgo}] = [R][P]^{-1}[i_{dgo}] + (d/dt)[[P]^{-1}[\phi_{dgo}]] \quad (\text{IV.14})$$

En multipliant l'équation (14) à gauche par  $[P(\psi)]$  :

$$[P][P]^{-1}[v_{dgo}] = [P][R][P]^{-1}[i_{dgo}] + [P](d/dt)[[P]^{-1}[\phi_{dgo}]] \quad (\text{IV.15})$$

$$[v_{dgo}] = [P][R][P]^{-1}[i_{dgo}] + [P]\{[P]^{-1}(d/dt)[\phi_{dgo}] + (d/dt)[P]^{-1}[\phi_{dgo}]\} \quad (\text{IV.16})$$

$$[v_{dgo}] = [P][R][P]^{-1}[i_{dgo}] + [P][P]^{-1}(d/dt)[\phi_{dgo}] + [P](d/dt)[P]^{-1}[\phi_{dgo}] \quad (\text{IV.17})$$

$$[v_{dgo}] = [R][i_{dgo}] + (d/dt)[\phi_{dgo}] + [P](d/dt)[P]^{-1}[\phi_{dgo}] \quad (\text{IV.18})$$

On démontre que :

$$[P](d[P]^{-1}/dt) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (d\psi/dt) \quad (\text{IV.19})$$

On obtient finalement le système des équations de Park qui constitue ainsi un modèle électrique dynamique pour l'enroulement diphasé équivalent :

$$\begin{cases} v_d = Ri_d + (d\phi_d/dt) - (d\psi/dt)\phi_q \\ v_q = Ri_q + (d\phi_q/dt) - (d\psi/dt)\phi_d \\ v_o = Ri_o + (d\phi_o/dt) \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

**Remarque :**

Quand les sommes des composantes  $(a, b, c)$  sont nulles, la troisième équation, toujours vérifiée car identiquement nulle, devient inutile.

**IV.4.2. Réduction de la matrice des inductances  $[L(\alpha)]$**

Deux transformations de Park sont définies à partir de la matrice (13) dans laquelle l'angle  $\psi$  est remplacé par  $\theta_s$  pour le stator, par  $\theta_r$  pour le rotor ; on les note respectivement  $[P(\theta_s)]$  et  $[P(\theta_r)]$ .

On désigne par :

$\theta_s$  : l'angle électrique  $(\vec{S}_a, \vec{O}_d)$  ;

$\theta_r$  : l'angle électrique  $(\vec{R}_a, \vec{O}_d)$  ;

On remarque sur la Figure 3 que  $\theta_s$  et  $\theta_r$  sont naturellement liés à  $\alpha$  par la relation rigide :

$$\theta_s - \theta_r = \alpha$$

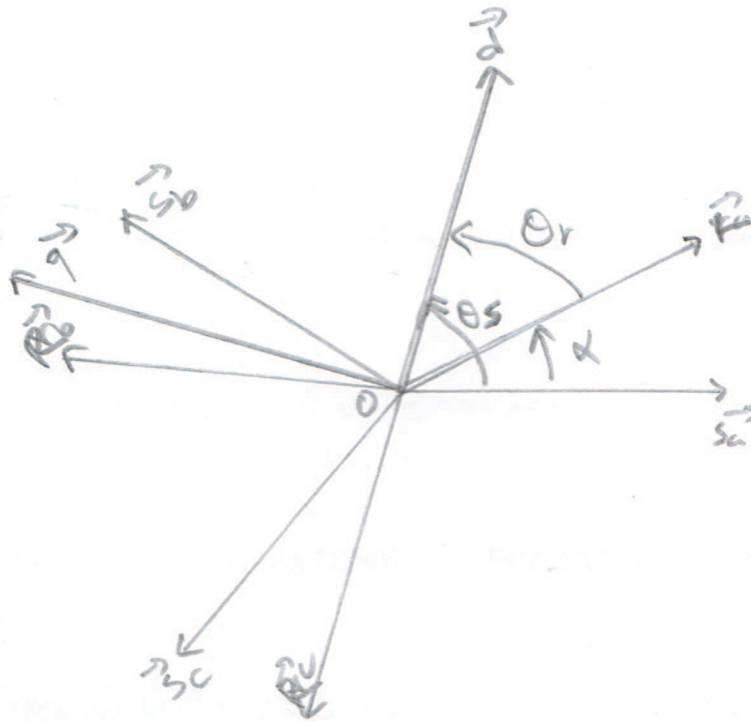


Figure 3 : Repérage angulaire des systèmes d'axes dans l'espace électrique.

Les transformations proposées établissent les relations entre les flux d'axes  $d, q, o$  et les flux d'axes  $a, b, c$  :

$$[\phi_{sdqo}] = [P(\theta_s)][\phi_{sabc}] \text{ et } [\phi_{rdqo}] = [P(\theta_r)][\phi_{rabc}] \quad (\text{IV.21})$$

En développant les expressions des flux, elles deviennent :

$$\text{Au stator : } [\phi_{sdqo}] = [P(\theta_s)][L_s][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}] \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{Soit : } [\phi_{sdqo}] = [P(\theta_s)][L_s][P(\theta_s)^{-1}[i_{sdqo}]] + [P(\theta_s)][M_{sr}][P(\theta_r)^{-1}[i_{rdqo}]] \quad (\text{IV.23})$$

$$\text{Au rotor : } [\phi_{rdqo}] = [P(\theta_r)][M_{rs}][i_{sabc}] + [L_r][i_{rabc}] \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{Soit : } [\phi_{rdqo}] = [P(\theta_r)][M_{rs}][P(\theta_s)^{-1}[i_{sdqo}]] + [P(\theta_r)][L_r][P(\theta_r)^{-1}[i_{rdqo}]] \quad (\text{IV.25})$$

Un calcul long et fastidieux aboutit à la relation matricielle (IV.26) entre les vecteurs flux et courants d'axes  $d, q, o$  :

$$\begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \\ \phi_{so} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \\ \phi_{ro} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s - M_s & 0 & 0 & 3M_{sr}/2 & 0 & 0 \\ 0 & l_s - M_s & 0 & 0 & 3M_{sr}/2 & 0 \\ 0 & 0 & l_s + 2M_s & 0 & 0 & 0 \\ 3M_{sr}/2 & 0 & 0 & l_r - M_r & 0 & 0 \\ 0 & 3M_{sr}/2 & 0 & 0 & l_r - M_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_r + 2M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{so} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{ra} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

On constate :

D'une part, que la transformation de Park rend les coefficients de la matrice des inductances indépendants du temps ;

D'autre part, que le nombre de paramètres électromagnétiques se réduit à cinq.

Ce sont :

$L_s = l_s - M_s$  l'inductance cyclique statorique ;

$L_r = l_r - M_r$  l'inductance cyclique rotorique ;

$M = (3/2)M_{sr}$  l'inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor ;

$L_{os} = l_s + 2M_s$  l'inductance homopolaire statorique ;

$L_{or} = l_r + 2M_r$  l'inductance homopolaire rotorique.

Le mode habituel d'alimentation du stator et la structure des enroulements rotoriques conférant la nullité aux sommes des courants statoriques et des courants rotoriques, les composantes d'indice ( $o$ ) sont nulles.

Dans ces conditions de fonctionnement en mode non dégradé, les flux d'axes  $d$  et  $q$  sont simplement définis par les trois paramètres constants  $L_s$ ,  $L_r$ ,  $M$ , et reliés aux courants par la relation (IV.27) :

$$\begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

La substitution des enroulements fictifs  $S_d, S_q, R_d, R_q$  aux enroulements triphasés permet, par interprétation de leur représentation à la Figure 4, une écriture rapide de l'équation (IV.27).

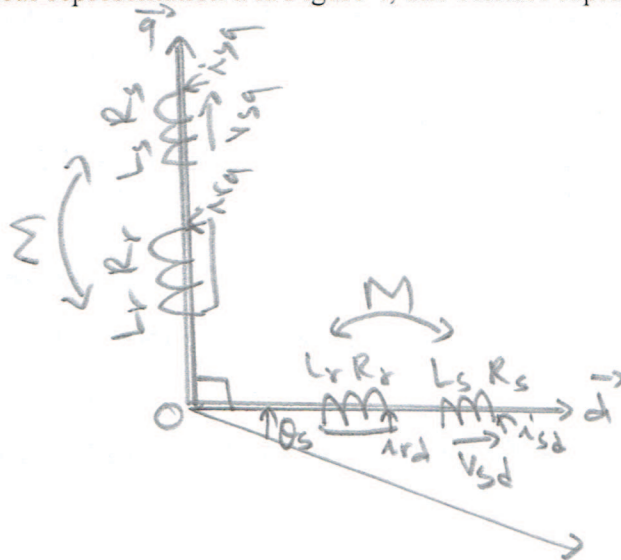


Figure 4 : Représentation des enroulements fictifs d'axes  $d$  et  $q$ .

#### IV.4.3. Equations des tensions

Les équations de Park statoriques et rotoriques s'écrivent :

$$v_{sd} = R_s i_{sd} + (d\phi_{sd} / dt) - (d\theta_s / dt) \phi_{sq} \quad (\text{IV.28})$$

$$v_{sq} = R_s i_{sq} + (d\phi_{sq}/dt) + (d\theta_s/dt)\phi_{sd} \quad (\text{IV.29})$$

$$v_{rd} = R_r i_{rd} + (d\phi_{rd}/dt) - (d\theta_r/dt)\phi_{rq} = 0 \quad (\text{IV.30})$$

$$v_{rq} = R_r i_{rq} + (d\phi_{rq}/dt) + (d\theta_r/dt)\phi_{rd} = 0 \quad (\text{IV.31})$$

On remarquera que la dernière colonne contient des termes liés directement au mouvement.

En développant les flux en fonction des courants, on obtient les équations électriques de la machine asynchrone dans le repère d'axes  $d, q$ .

$$\begin{bmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s(d/dt) & -L_s(d\theta_s/dt) & M(d/dt) & -M(d\theta_s/dt) \\ L_s(d\theta_s/dt) & R_s + L_s(d/dt) & M(d\theta_s/dt) & M(d/dt) \\ M(d/dt) & -M(d\theta_r/dt) & R_r + L_r(d/dt) & -L_r(d\theta_r/dt) \\ M(d\theta_r/dt) & M(d/dt) & L_r(d\theta_r/dt) & R_r + L_r(d/dt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Il existe différentes possibilités concernant le choix de l'orientation du repère d'axes  $d, q$  qui dépendent des objectifs de l'application :

- a) axes tournant à la vitesse du rotor ( $\theta_r = 0$ ) : étude des grandeurs statoriques ;
- b) axes liés au stator ( $\theta_s = 0$ ) : étude des grandeurs rotoriques ;
- c) axes solidaires du champ tournant : étude de la commande.

C'est cette dernière solution qui fait correspondre des grandeurs continues aux grandeurs sinusoïdales du régime permanent. La conception du contrôle vectoriel par orientation du flux nécessite ce choix et les modèles d'action dépendent de la position du repère par rapport aux divers axes de flux.

#### IV.4.4. Expressions du couple électromagnétique instantané

Dans le cas général, la puissance électrique instantanée  $P_e$  fournie aux enroulements statoriques et rotoriques s'exprime en fonction des grandeurs d'axes  $d, q$  :

$$P_e = v_{sd}i_{isd} + v_{sq}i_{sq} + v_{rd}i_{rd} + v_{rq}i_{rq} \quad (\text{IV.33})$$

Elle se décompose en trois séries de termes qui correspondent respectivement aux trois colonnes des équations (IV.28) à (IV.31) :

a) Puissance dissipée en pertes Joule :

$$R_s(i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + R_r(i_{rd}^2 + i_{rq}^2) \quad (\text{IV.34})$$

b) Puissance représentant les échanges d'énergie électromagnétique avec les sources :

$$i_{sd}(d\phi_{sd}/dt) + i_{sq}(d\phi_{sq}/dt) + i_{rd}(d\phi_{rd}/dt) + i_{rq}(d\phi_{rq}/dt) \quad (\text{IV.35})$$

c) Puissance mécanique  $P_m$  regroupant l'ensemble des termes liés aux dérivées des positions angulaires :

$$P_m = (\phi_{sd}i_{sq} - \phi_{sq}i_{sd})(d\theta_s/dt) + (\phi_{rd}i_{rq} - \phi_{rq}i_{rd})(d\theta_r/dt) \quad (\text{IV.36})$$

En tenant compte des équations des flux (IV.27) on peut donc écrire que :

$$P_m = (\phi_{sd}i_{sq} - \phi_{sq}i_{sd})(d(\theta_s - \theta_r)/dt) \quad (\text{IV.37})$$

L'expression du couple électromagnétique est donnée par la dérivée partielle de la co-énergie  $W_{co}$  par rapport à  $\alpha/p$ , à  $[i]$  constant.

Or, en vertu de l'hypothèse de linéarité du matériau magnétique, la co-énergie  $W_{co}$  est égale à l'énergie magnétique stockée  $W_s$ .



$$W_{co} = W_s = \frac{1}{2} [i]_s [L(\alpha)] [i]$$

Les matrices  $[L_s]$  et  $[L_r]$  étant invariantes par rotation, il vient :

$$C_e = p \left( \frac{\partial W_{co}}{\partial \alpha} \right) [i] = p [i]_s \frac{d[M_{sr}]}{d\alpha} [i]_r$$

Or la puissance mécanique est aussi égale à  $C_e \Omega$  ou à  $C_e \omega / p$ , on en tire l'expression scalaire du couple :

$$C_e = p(\phi_{sd} i_{sq} - \phi_{sq} i_{sd}) \quad (IV.38)$$

Diverses manipulations de l'équation fondamentale (IV.38), procédant d'un choix d'élimination de certaines variables des équations des flux (IV.27), conduisent à l'établissement d'autres expressions du couple qui seront autant de points de départ dans la recherche d'une stratégie de sa commande.

On trouve ainsi :

$$C_e = p(\phi_{rq} i_{rd} - \phi_{rd} i_{rq}) \quad (IV.39)$$

$$C_e = pM(i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \quad (IV.40)$$

$$C_e = p(M / L_s)(\phi_{sq} i_{rd} - \phi_{sd} i_{rq}) \quad (IV.41)$$

$$C_e = p(M / L_r)(\phi_{rd} i_{sq} - \phi_{rq} i_{sd}) \quad (IV.42)$$

Ainsi que l'équation fondamentale de la mécanique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r - F\Omega \quad (IV.43)$$

### **EXERCICE 1:**

Le modèle de la MCC à excitation indépendante est les suivantes:

$$\begin{cases} U_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} \\ U = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + \Omega M_{fd} I_f \end{cases}$$

Avec :

Le couple électromagnétique de la MCC est donné par :

$$C_e = M_{fd} I_f I_a$$

L'équation de mouvement s'écrit :

$$C_e - C_r = F\Omega + J \frac{d\Omega}{dt}$$

1. Précisez à quoi correspondent les différentes grandeurs et les différentes équations.
2. Représentez les équations de la machine sous forme matricielle.
3. Mettez ce modèle sous forme de schéma bloc permettant la simulation sous simulink.

### **EXERCICE 2:**

Les équations du moteur à courant continu à aimants permanents sont les suivantes :

$$E(t) = k\Omega(t)$$

$$C_m(t) = ki(t)$$

$$u(t) = E(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \Omega(t)$$

Où  $u$  est la tension d'alimentation de l'induit,  $i$  est le courant de l'induit,  $C_m$  est le couple moteur,  $C_r$  est le couple de charge,  $\Omega$  est la vitesse de rotation et  $\theta$  est la position angulaire du rotor.

1. Préciser le nom des différentes grandeurs intervenant dans les équations et nommer les différentes équations.

On cherche à modéliser le moteur par deux blocs interconnectés. Le bloc « électrique » a pour entrées la tension et la vitesse et pour sorties le courant et le couple moteur. Le bloc « mécanique » a pour entrées le couple moteur et le couple de charge et pour sorties la vitesse et la position angulaire.

2. Représenter les deux blocs avec leurs signaux d'entrée et de sortie ainsi que l'interconnexion entre ces deux blocs.
3. Donner une représentation possible du bloc « électrique » sous forme de schéma-bloc en utilisant des gains et des intégrateurs.
4. Même chose pour le bloc « mécanique ».

### **EXERCICE 3:**

Une machine électrique bipolaire ( $p = 1$ ) est constituée d'un stator bobiné diphasé et d'un rotor bobiné monophasé. L'entrefer est constant ; le matériau ferromagnétique est non saturé, sa perméabilité est constante ; les f.m.m. sont à répartition spatiale sinusoïdale et les résistances statoriques sont négligées.

#### **Notation**

$L_s$  : inductance propre des phases statoriques (identiques) ;

$L_r$  : inductance propre de la phase rotorique ;

$\hat{M}$  : maximum de l'inductance mutuelle entre la phase rotorique et une phase statorique ;

$R_r$  : résistance de la phase rotorique.

#### **Rappels**

L'inductance mutuelle entre deux enroulements est une fonction cosinusoidale de l'angle entre leurs axes.

L'énergie électromagnétique  $W_{em}$  emmagasinée dans la machine a pour expression :

$$W_{em} = \frac{1}{2} [i]^t [L(\alpha)] [i]$$

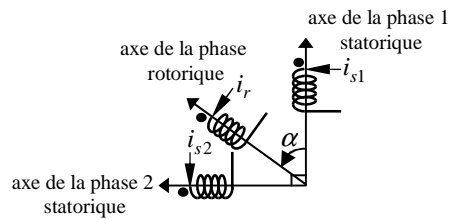
$$\text{avec } [i] = [i_{s1} \quad i_{s2} \quad i_r]^t, [L(\alpha)] = \begin{bmatrix} L_s & M_{12} & M_{1r} \\ M_{21} & L_s & M_{2r} \\ M_{r1} & M_{r2} & L_r \end{bmatrix}, M_{21} = M_{12}, M_{1r} = M_{r1}, M_{2r} = M_{r2}$$

La relation entre les flux d'induction totalisés dans les phases et leurs courants s'écrit par définition :

$$[\phi] = [L(\alpha)] [i] \quad \text{avec } [\phi] = [\phi_{s1} \quad \phi_{s2} \quad \phi_r]^t$$

Couple électromagnétique  $C_e$  exercé sur le rotor :  $C_e = \frac{\partial W_{em}}{\partial \alpha}$

1. Établir les expressions des inductances mutuelles  $M_{12}$ ,  $M_{1r}$ ,  $M_{2r}$  en fonction de  $\hat{M}$  et  $\alpha$ .
2. Donner les expressions des flux sous forme matricielle dans les trois enroulements en fonction des inductances propres et mutuelle, des courants et l'angle  $\alpha$ .
3. Déterminer l'expression du couple électromagnétique en fonction de  $\hat{M}$ ,  $\alpha$ ,  $i_{s1}$ ,  $i_{s2}$ ,  $i_r$ .



#### EXERCICE 4:

Le modèle de la partie électrique de machine synchrone à pôles lisses dans le repère  $d-q$  lié au rotor s'écrit :

$$\begin{cases} \psi_d = L_d i_d + \psi_f \\ \psi_q = L_q i_q \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_d = R i_d + \psi_d \frac{di}{dt} - \psi_q \frac{d\theta_r}{dt} \\ v_q = R i_{sq} + \frac{d\psi_{sq}}{dt} + \psi_d \frac{d\theta_r}{dt} \end{cases}$$

1. Précisez à quoi correspondent les différentes grandeurs et les différentes équations.
2. Donnez les équations du modèle en fonction des courants et des tensions.
3. Représentez les équations de la machine sous forme matricielle.
4. Mettez ce modèle sous forme de schéma bloc permettant la simulation sous simulink.