

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar – El Oued



Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

Cours:

***Asservissements Echantillonnés et
Régulation Numérique***

Niveau : 1^{ère} Année Master Machines Electriques

Préparé et Enseigné par :

Dr. BEKAKRA Youcef
Maître de Conférences -A-

Chapitre I : Modélisation des Signaux et des Systèmes Echantillonnés

I.1 Introduction :

Dans les cours d'automatique des années précédentes, vous avez étudié la commande des systèmes linéaires continus. Le schéma de correction utilisé était alors le suivant (Figure I.1) :

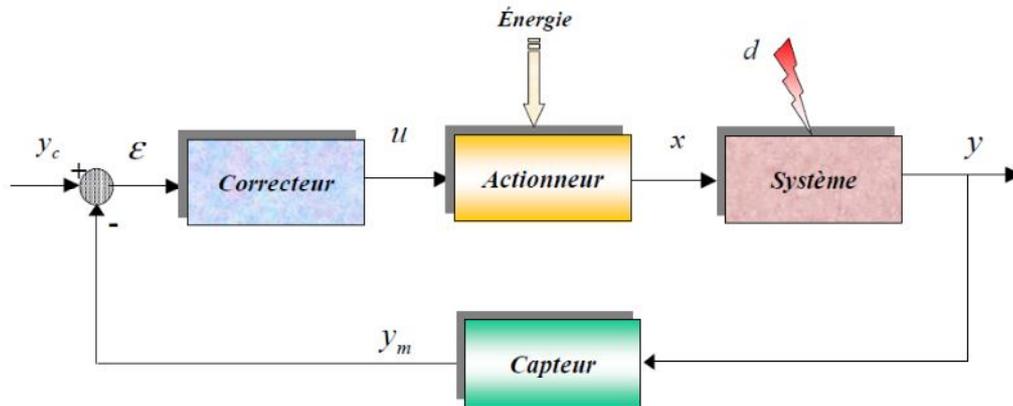


Figure I.1 Schéma de correction des systèmes linéaires continus

Dans ce schéma, on distingue différents *signaux* :

$y(t)$, la *sortie* du processus à réguler,

$y_m(t)$, la *mesure* de la sortie $y(t)$ par l'intermédiaire d'un capteur,

$y_c(t)$, la valeur de *consigne* de $y_m(t)$,

$\varepsilon(t)$, l'*erreur*, c'est-à-dire l'écart entre la consigne et la mesure,

$u(t)$, la variable de *commande* pour l'actionneur,

$x(t)$, la variable d'*action*,

$d(t)$, une *perturbation* quelconque agissant sur le système, et différents systèmes :

- le *système étudié*, qui est un processus physique pour lequel on a obtenu une modélisation, c'est-à-dire un ensemble d'équations mathématiques décrivant le plus fidèlement possible son comportement physique.

- le *capteur* qui permet d'obtenir une mesure de la sortie du système à corriger, mesure utilisée pour générer l'erreur,

- le *correcteur* qui, s'il est conçu de manière adéquate, permet de calculer, sur la base de l'écart entre la consigne et la mesure de sortie, la commande à appliquer en entrée du système pour annuler cet écart,

- l'**actionneur**, relais physique de la commande, qui permet sa mise en œuvre en agissant directement sur le système.

Dans ces différents cours n'ont jamais été abordées les questions de mise en œuvre d'une telle commande, une fois son calcul effectué. C'est l'objet principal du cours à venir, qui concerne la **commande automatique des systèmes par ordinateur numérique**. Le schéma de principe est donné par la Figure I.2 :

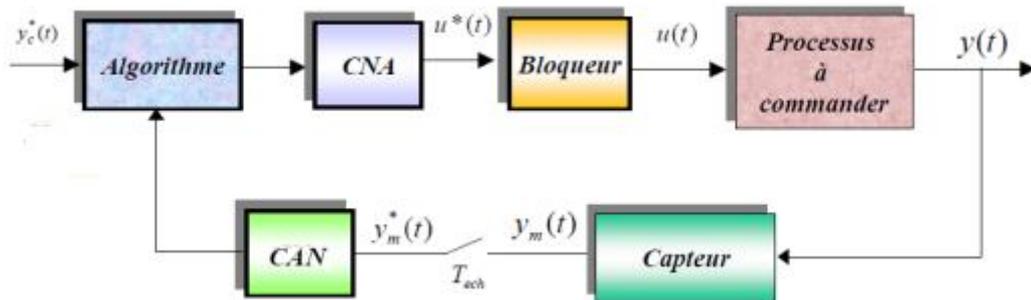


Figure I.2 Schéma de correction des systèmes par ordinateur numérique

L'utilisation d'un tel ordinateur placé dans la boucle de correction nécessite l'emploi de **convertisseurs** des informations d'entrée et de sortie du ordinateur : il impose donc en particulier le choix à l'entrée du ordinateur d'une fréquence de discrétisation temporelle (**échantillonnage**), ainsi que celui d'un mode de lissage des informations binaires sortant du ordinateur afin d'adapter celles-ci à l'entrée des actionneurs (**reconstitution**). Il est dans ce cas possible de représenter la boucle de correction comme suit.

• L'opération d'**échantillonnage** (représenté de manière symbolique par un interrupteur) est la transformation d'une fonction continue du temps $f(t)$ en une suite d'unités d'informations $f^*(t)$ sur cette fonction à des instants discrets du temps nommés **instants d'échantillonnage**. On a :

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT),$$

avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.

soit graphiquement :

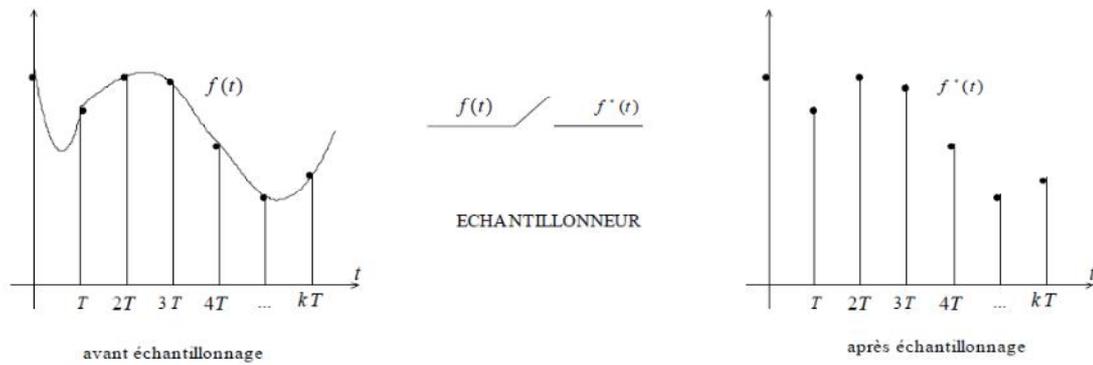


Figure I.3

Le réel T est la **période d'échantillonnage**, constante pour un processus donné. L'échantillonneur est commandé par l'horloge du calculateur, il peut être assimilé à un interrupteur normalement ouvert qui se ferme aux instants d'échantillonnage $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, etc...

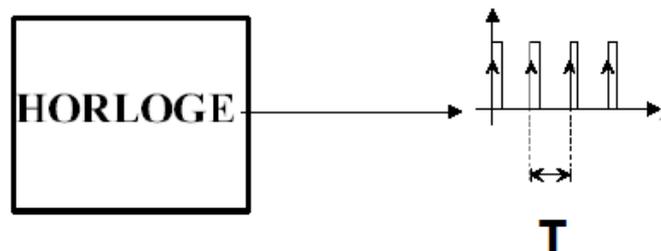


Figure I.4

- Le **convertisseur CAN** (analogique \rightarrow numérique) effectue ensuite la conversion d'un signal échantillonné $f^*(t)$ en un signal numérisé f_n (nombres entiers binaires en 8 bits, 12 bits, 16 bits) apte à être traité par le calculateur. Celui-ci exécute l'**algorithme de commande** programmé par l'utilisateur, et génère, en utilisant l'erreur entre la sortie mesurée et sa consigne, un signal numérisé de commande du système.
- Le **convertisseur CNA** (numérique \rightarrow analogique) effectue alors la conversion inverse de celle du CAN.
- L'opération de **reconstitution**, ou de **blocage**, consiste enfin à transformer une fonction $f^*(t)$ définie aux instants d'échantillonnage en une fonction continue du temps $f(t)$ telle que, pour tout k .

$$f(t) = f^*(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T[,$$

Soit graphiquement :

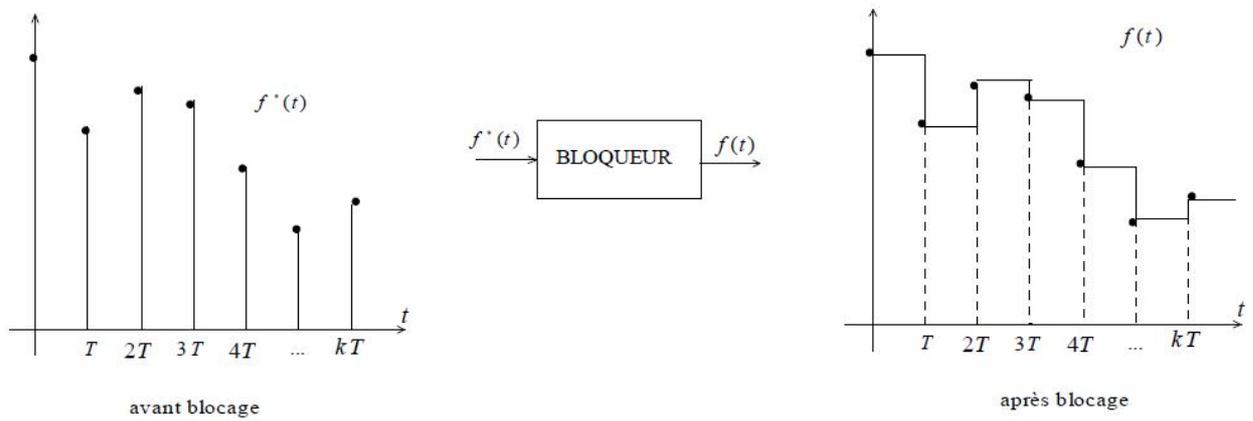


Figure I.5

Le bloqueur sert donc à *maintenir constant le signal de commande* entre deux instants d'échantillonnage.

Le schéma fonctionnel général d'une régulation numérique ainsi que l'allure des différents signaux sont représentés par la figure I.6 :

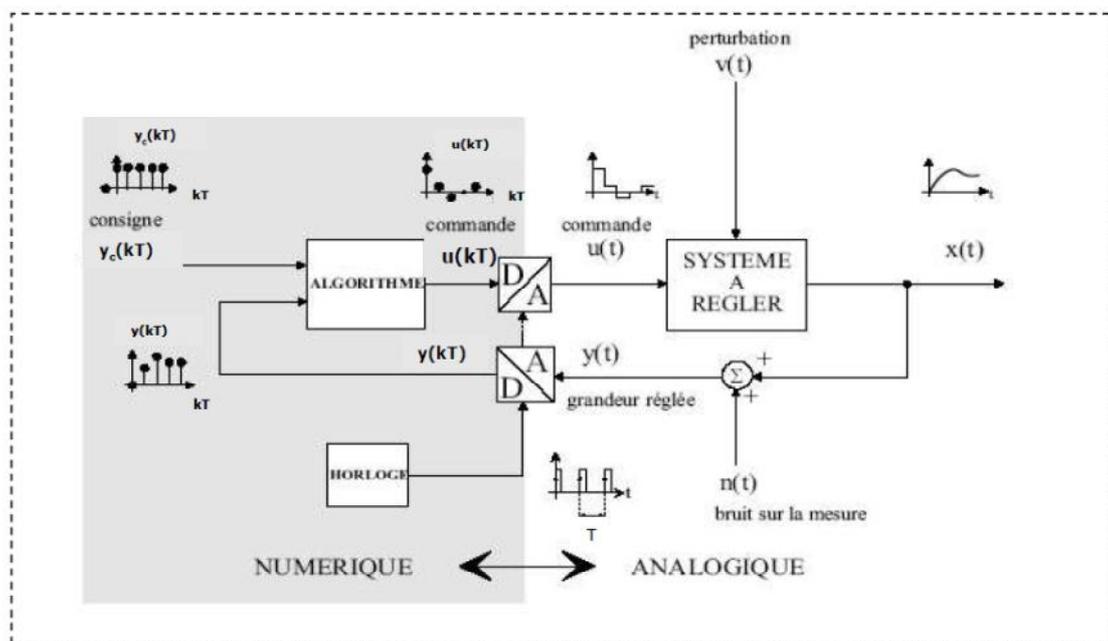


Figure I.6

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités (Figure I.7). De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

Remarque : On parle aussi de systèmes et de signaux à temps discret par opposition à la notion de temps continu.

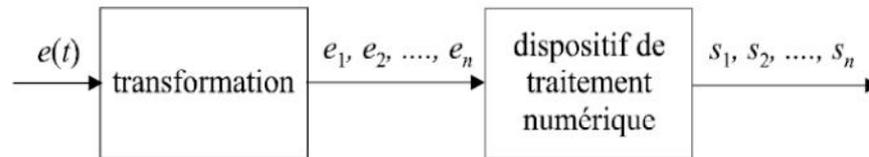


Figure I.7 Traitement numérique d'un signal

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatible avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (figure I.8).

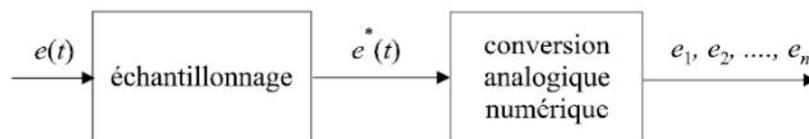


Figure I.8 Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal

Par convention, on notera $e^*(t)$ le signal échantillonné avant sa conversion analogique numérique.

I.2 Principes Fondamentaux de l'Echantillonnage des Signaux :

I.2.1 Définition :

L'échantillonnage d'un signal temporel $f(t)$ consiste à transformer celui-ci en une suite discrète $f(nT_e)$ de valeurs prises à des instants nT_e . T_e est appelée période d'échantillonnage (en anglais *sampling*).

Les instants nT_e sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage $p(t)$, nulle partout, sauf au voisinage des instants nT_e . Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne, est représentée sur la figure I.9. Le résultat d'une opération d'échantillonnage, visible sur la figure I.10.

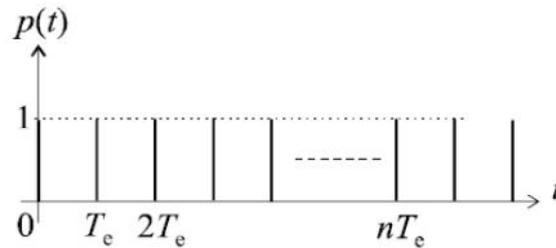
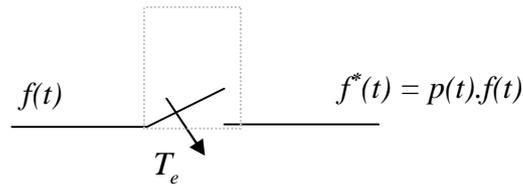


Figure I.9 Fonction d'échantillonnage

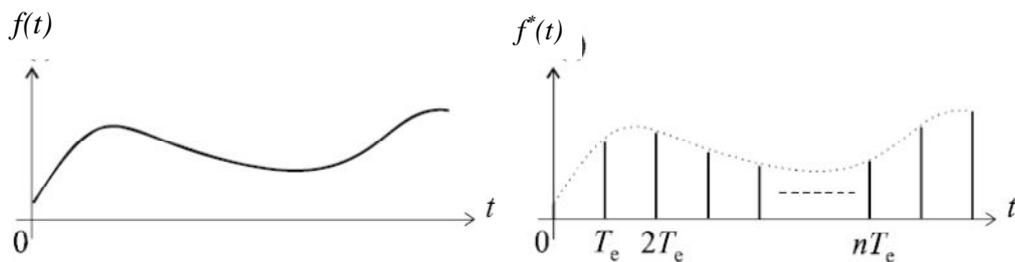


Figure I.10 Échantillonnage d'un signal quelconque

L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal $f(t)$, la suite :

$$f(0), f(T_e), f(2T_e), \dots, f(nT_e)$$

que l'on note, en général : $f^*(t) = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

ou encore : $f(k) = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

Remarque : En toute logique, cette suite ne correspond pas encore à des valeurs numériques. Ce signal échantillonné est un signal analogique à temps discret. Toutefois, on notera de la même manière la suite numérique obtenue après conversion analogique numérique.

I.3 Exemples de Signaux Échantillonnés Simples :

I.3.1 Impulsion unité :

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

$$\delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} \delta^*(nT_e) = 1 \text{ pour } n = 0 \\ \delta^*(nT_e) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Remarque : Nous considérerons comme nuls pour t négatif, tous les signaux que nous étudierons. La figure I.11 propose une représentation schématique de cette impulsion unité.

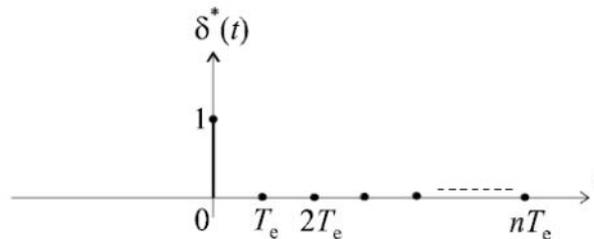


Figure I.11 Impulsion unité

I.3.2 Échelon unité :

On définit l'échelon unité échantillonné par le signal :

$$u^*(t) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} u^*(nT_e) = 1 ; \forall n \geq 0 \\ u^*(nT_e) = 0 ; \forall n < 0 \end{cases}$$

La figure I.12 propose une représentation schématique de cet échelon unité.

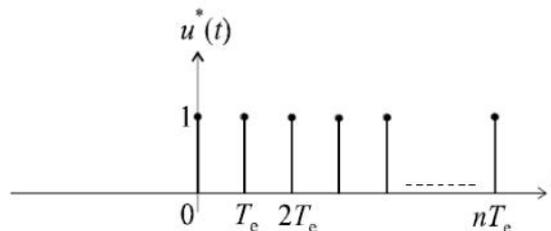


Figure I.12 Échelon unité

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t) = \delta^*(t) + \delta^*(t - T_e) + \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

$$\text{Soit : } u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta^*(t - kT_e)$$

$$\text{On pose parfois : } \delta^*(t - kT_e) = \delta_k$$

$$\text{Ce qui nous conduit à la notation : } u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta_k$$

I.4 Transformée en z des Signaux Échantillonnés :

I.4.1 Définition :

Soit $f(t)$ un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une période T_e .

La transformée de Laplace pour les signaux continus s'écrit :

$$F(p) = TL(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Dès lors, avec ce qui précède il est possible de définir la transformée de Laplace d'un signal discret à la donnée d'une période T_e .

$$F^*(p) = TL(f^*(t)) = \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-pt} dt$$

En ce cas, le signal $f^*(t)$ étant non nul que pour certaines valeurs discrètes du temps on trouve :

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p}$$

C'est à partir de ce résultat que la transformée en z des signaux discrets a été proposée.

On appelle transformée en z de la séquence $\{f_k\}$, $k \in N$ la série entière définie par :

$$F(z) = TZ[\{f_k\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) z^{-k} \quad \text{où } (z = e^{T_e p})$$

En résumé :

$$\begin{array}{l} f(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \\ \downarrow \text{par échantillonnage} \\ f(kT_e) \xrightarrow{TZ} F(z) = F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e) z^{-k} \end{array}$$

$$\text{Où : } f^*(t) = f(kT_e) = f_k$$

On peut remarquer que cette expression permet de calculer $F(z)$ à partir de $f(t)$. Mais le signal est souvent connu non pas par $f(t)$, mais sa transformée de Laplace $F(p)$.

D'où l'intérêt de la relation suivante -que l'on admettra- qui exprime $F(z)$ en fonction de $F(p)$:

$$F(z) = \sum \text{sur les pôles } p_i \left[\text{résidus de } \frac{F(\xi)}{1 - e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}} \right] \text{ de } F(\xi)$$

Théorème
de Résidus

Pour appliquer cette relation, on utilise le plus souvent les résultats suivants du calcul des résidus :

- Si $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$ a des pôles **simples** p_i :

$$F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{T_e p_i} \cdot z^{-1}}$$

En notant $D'(\xi) = \frac{dD(\xi)}{d\xi}$

- Si $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$ a des pôles **multiples**, le résidu r_i relatif au pôle p_i d'ordre n a pour valeur :

$$F(z) = r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left\{ (\xi - p_i)^n \cdot \frac{F(\xi)}{1 - e^{T_e \xi} \cdot z^{-1}} \right\} \right]_{\xi=p_i}$$

N.B : Toutes ces relations sont valables aussi bien pour les pôles p_i **réels** que pour les pôles p_i **complexes**.

I.4.2 Intérêt de la transformée en z :

Nous allons retrouver avec la transformée en z , le même intérêt que celui que nous avons trouvé à la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu. Lorsque nous saurons modéliser le fonctionnement d'un système numérique par une fonction de transfert en z , nous disposerons d'un outil complet permettant de décrire, donc d'étudier leur fonctionnement.

Tout comme l'on écrivait : $F(p) = G(p).E(p)$

On écrira alors : $F(z) = G(z).E(z)$

Ce formalisme, qui peut paraître quelque peu ésotérique au départ n'est rien d'autre que la méthode de modélisation, donc de description, des signaux et systèmes échantillonnés.

I.4.3 Propriétés de la transformée en z :

La transformée en z est une simple variante de la transformée de Laplace et elle conserve ses propriétés à quelques modifications près. Voici les principales propriétés :

a) Linéarité :

Pour les signaux à temps continu on rappelle que :

$$TL[\alpha.f(t) + \beta.g(t)] = \alpha.TL[f(t)] + \beta.TL[g(t)]$$

De même, on a pour la transformée en z :

$$TZ[\alpha.\{f_k\} + \beta.\{g_k\}] = \alpha.TZ[\{f_k\}] + \beta.TZ\{g_k\}$$

b) Théorème du retard :

On désigne par $f(t - a)$ le signal identique à $f(t)$ mais retardé de la durée a . on a :

$$TL[f(t - a)] = e^{-ap} TL[f(t)] = e^{-ap} F[p]$$

De même, si f_{k-h} est le signal à temps discret f_k retardé de h périodes :

$$TZ[\{f_{k-h}\}] = z^{-h}.TZ[\{f_k\}] = z^{-h}.F(z)$$

Ce résultat permet de signaler que l'opérateur z^{-1} s'apparente à l'opérateur "retard d'une période".

c) Théorème de la sommation :

Pour les signaux à temps continu on parle de théorème de l'intégration et il s'écrit :

$$TL\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F[p]$$

Pour les signaux à temps discret on a :

$$TZ\left[\left\{\sum_{i=0}^k f_i\right\}\right] = \frac{z}{z-1}.TZ[\{f_k\}] = \frac{z}{z-1}.F(z)$$

d) Multiplication par le temps :

Pour tout signal temporel $f(t)$ on a :

$$TZ[t.f(t)] = -zT_e \cdot \frac{d}{dz} (TZ[f(t)])$$

e) Théorème de la valeur initiale :

La valeur initiale d'un signal à temps continu se déduit de sa transformée de Laplace comme suit:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

La version discrète de ce théorème est donnée par :

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

f) Théorème de la valeur finale :

Si $pF(p)$ est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont à partie réelle négative alors le signal $f(t)$ converge pour $t \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

De même, si $\frac{z-1}{z}F(z)$ est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont dans le cercle unité alors le signal f_k converge pour $r \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

I.4.4 Exemples de Calculs de Transformées en z :

a) Impulsion unité :

L'impulsion unité étant définie par :

$$\delta_k = 1 \text{ pour } k = 0$$

$$\delta_k = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

On a :

$$F(z) = \Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

b) Échelon unité :

L'échelon unité étant défini par :

$$\begin{cases} u^*(kTe) = 1 ; \forall k \geq 0 \\ u^*(kTe) = 0 ; \forall k < 0 \end{cases}$$

On a :

$$F(z) = U(z) = TZ \left[u^*(kT_e) \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

c) Exponentielle décroissante :

Soit $f(t)$ le signal défini par $f(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$, donc $f(kT_e) = e^{-akT_e}$; $k \geq 0$; bien plus souvent

rencontré sous la forme : $F(p) = \frac{1}{p+a}$

La transformée en z de ce signal:

- A partir de la définition, on trouve :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-aT_e} \right)^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^{aT_e} z} \right)^k$$

D'où par sommation de la série :

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT_e} z}} = \frac{e^{aT_e} z}{e^{aT_e} z - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

- Par le calcul des résidus :

$$F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)} = \frac{1}{\xi + a} \text{ a un seul pôle simple, soit } -a$$

$$\left. \begin{array}{l} N(\xi) = 1 \\ D(\xi) = \xi + a \Rightarrow D'(\xi) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{Te p_i} \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

d) Réponse impulsionnelle d'une « double constante de temps » :

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

On peut appliquer le théorème de résidus, dans le cas des pôles simples :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } \begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = (p+a)(p+b) \Rightarrow D'(p) = 2p + a + b \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(z) = \frac{N(-a)}{D'(-a)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} + \frac{N(-b)}{D'(-b)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-bT_e} \cdot z^{-1}}$$

$$\text{Soit : } F(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - e^{-bT_e} \cdot z^{-1}}$$

e) Rampe unité :

La rampe unité en temps continu est définie par :

$$f(t) = t \text{ pour } t \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad F(p) = \frac{1}{p^2}$$

Méthode 01 :

En remarquant que $f(t) = t.u(t)$ ($u(t)$: échelon unitaire) et en utilisant la propriété étudiée précédemment, on obtient :

$$\text{Soit : } F(z) = -zT_e.TZ[u(t)] = -zT_e \frac{dU(z)}{dz} = -zT_e \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right)$$

$$\text{D'où : } F(z) = \frac{T_e.z}{(z-1)^2}$$

Méthode 02 :

- A partir de la définition, on trouve :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} kT_e.z^{-k} = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k.z^{-k}$$

Cette fois, ce n'est pas une série géométrique, mais on remarque que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ en dérivant les 2 membres par } z, \text{ on trouve : } \sum_{k=0}^{+\infty} (-k).z^{-k-1} = \frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\text{En multipliant les 2 membres par } (-z) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k.z^{-k} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\text{Finalement, on obtient : } F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT_e.z^{-k} = \frac{T_e.z}{(z-1)^2}$$

Méthode 03 :

- A partir de résidus, on remarque que $F(p)$ possède un seul pôle double à l'origine ; son résidu vaut, d'après la relation donnée précédemment :

$$F(z) = r = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\xi} \left\{ (\xi-0)^2 \cdot \frac{\frac{1}{\xi^2}}{1-e^{T_e\xi}.z^{-1}} \right\} \right]_{\xi=0} = \left[\frac{T_e.e^{T_e\xi}.z^{-1}}{(1-e^{T_e\xi}.z^{-1})^2} \right]_{\xi=0} = \frac{T_e.z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e.z}{(z-1)^2}$$

$$\text{Donc } F(z) = r = \frac{T_e.z}{(z-1)^2}$$

f) Signal ayant une transformée $F(p)$ plus complexe :

Soit à calculer la transformée en z de $F(p) = \frac{a}{p^2(p+a)}$, on décompose $F(p)$ en éléments simples :

$$\frac{a}{p^2(p+a)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p+a)}$$

- On multiplie les 2 membres par p^2 , puis on fait $p=0$; il vient $1=A \Rightarrow A=1$
- On multiplie les 2 membres par $(p+a)$, puis on fait $p=-a$; il vient $\frac{1}{a} = C \Rightarrow C = \frac{1}{a}$
- On multiplie les 2 membres par p , puis on fait $p \rightarrow +\infty$; il vient $0=B+C$
 $\Rightarrow B = -C = \frac{-1}{a}$

Donc :

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(p+a)}$$

La transformée en z étant linéaire, il s'ensuit :

$$F(z) = TZ \left[\frac{1}{p^2} \right] - \frac{1}{a} \cdot TZ \left[\frac{1}{p} \right] + \frac{1}{a} \cdot TZ \left[\frac{1}{(p+a)} \right] \Rightarrow F(z) = \frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

I.4.5 Tableau de la Transformées en z :

$f(t)$	$f^*(t) = f(kT_e)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$: impulsion unité	$\delta(kT_e)$	1	1
$u(t)$: échelon unité	$u(kT_e)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t.u(t)$: rampe unité	$kT_e \cdot u(kT_e)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e \cdot z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{1}{2!} (kT_e)^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	e^{-akT_e}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$t.e^{-at}$	$kT_e e^{-akT_e}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{T_e \cdot z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT_e}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT_e})}{(z-e^{-aT_e})(z-1)}$
$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT_e)e^{-akT_e}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\frac{z[z-e^{-aT_e}(1+aT_e)]}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$1-(1+akT_e)e^{-akT_e}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$\frac{z[z(1-e^{-aT_e}-aT_e e^{-aT_e})+e^{-2aT_e}-e^{-aT_e}+aT_e e^{-aT_e}]}{(z-e^{-aT_e})^2(z-1)}$
$\sin(at)$	$\sin(akT_e)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{z \cdot \sin(aT_e)}{z^2 - (2\cos(aT_e))z + 1}$
$\cos(at)$	$\cos(akT_e)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{z(z - \cos(aT_e))}{z^2 - (2\cos(aT_e))z + 1}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$e^{-akT_e} \cos(bkT_e)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT_e}\cos(bT_e))}{z^2 - 2e^{-aT_e}(\cos(bT_e))z + e^{-2aT_e}}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$e^{-akT_e} \sin(bkT_e)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT_e}\sin(bT_e)}{z^2 - 2e^{-aT_e}(\cos(bT_e))z + e^{-2aT_e}}$

-Théorème de Shannon :

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage f_e **doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.**

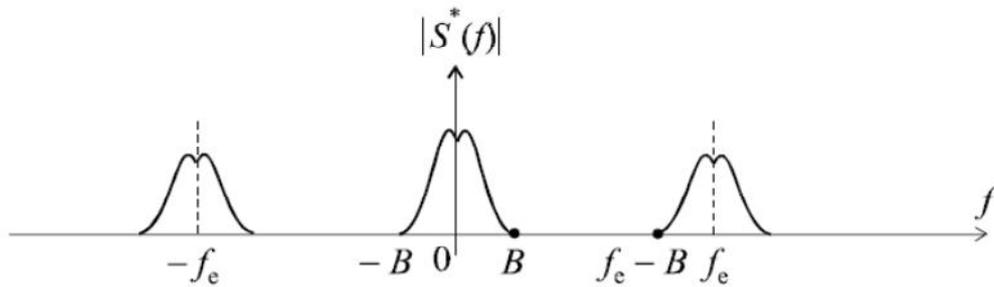


Figure I.13 Spectre d'un signal échantillonné

Si B est la largeur spectrale du signal $s(t)$, autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de $s^*(t)$, qui se trouve centré sur la fréquence f_e , s'étend de $f_e - B$ à $f_e + B$.

La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

$$B < f_e - B$$

Soit :

$$f_e > 2.B$$

I.6 Transformée de Fourier à Temps Discret :**I.6.1 Définition :**

Soit $s(t)$ un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence f_e (soit une période T_e), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon. Soit $S(z)$ sa transformée en z .

Rappelons que :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

et que la transformée en z a été obtenue en posant $z = e^{pT_e}$:

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

Exactement comme nous pouvons calculer la transformée de Fourier d'un signal à temps continu en posant $p = j\omega$ (à condition qu'il soit à énergie finie, rappelons-le), nous pouvons tout autant poser $e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$ à condition, bien sûr, que la somme, ainsi transformée, converge vers une valeur finie, ce que nous supposons.

On obtient alors :

$$S^*(j\omega) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j\omega k T_e} \quad \text{ou encore} \quad \sigma(f) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j2\pi k f T_e}$$

La fonction $\sigma(f)$ est appelée transformée de Fourier à temps discret du signal s_k . Son module représente, bien sûr, le spectre du signal échantillonné.

I.7 Comportement Fréquentiel des Systèmes Echantillonnés :

I.7.1 Principes Généraux :

Considérons un système de fonction de transfert en z égale à $G(z)$ sollicité par un signal d'entrée possédant une transformée en z , $E(z)$ et délivrant un signal de sortie de transformée en z , $S(z)$ (figure I.14).



Figure I.14 Schéma général d'un système échantillonné

Le système est régi par l'équation : $S(z) = G(z).E(z)$

En posant $z = e^{j\omega T_e}$, on obtient : $S(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e}).E(e^{j\omega T_e})$

Les termes $E(e^{j\omega T_e})$ et $S(e^{j\omega T_e})$ représentent respectivement les transformées de Fourier à temps discret des signaux d'entrée et de sortie. Par conséquent, $G(e^{j\omega T_e})$ représente le comportement fréquentiel du système : il s'agit de sa fonction de transfert en fréquence.

Comme pour les systèmes continus, ce comportement peut être représenté graphiquement, par exemple sous forme de diagramme de gain.

La fonction $G(\omega) = |G(e^{j\omega T_e})|$ correspond, notamment, au gain réel du système en fonction de la pulsation ω . On prendra soin, toutefois, de toujours limiter le tracé à l'intervalle $[0, f_e/2]$, afin de respecter le théorème de Shannon : l'expression trouvée n'a en effet aucun sens au delà de $f_e/2$.

I.7.2 Exemple :

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence :

$$s_k = \frac{1}{2}(e_k + s_{k-1})$$

En appliquant la transformée en z à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2} [E(z) + z^{-1} \cdot S(z)]$$

D'où :
$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Soit :

$$G(\omega) = \left| \frac{0.5}{1 - 0.5 \cdot e^{-j\omega T_e}} \right| = \frac{0.5}{|1 - 0.5(\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e)|}$$

Finalement :
$$G(\omega) = \frac{0.5}{\sqrt{(1 - 0.5 \cos \omega T_e)^2 + 0.25 \sin^2 \omega T_e}} \Rightarrow G(\omega) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos \omega T_e}}$$

Ou encore :

$$G(f) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos 2\pi f T_e}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos 2\pi \frac{f}{f_e}}}$$

Il convient de tracer cette fonction pour f variant de 0 à $f_e/2$. Sur cet intervalle, $\cos 2\pi f T_e$ décroît de 1 à -1. $G(f)$ est donc une fonction strictement décroissante.

On a :
$$G_{max} = G(0) = \frac{0.5}{\sqrt{0.25}} = 1$$

et :
$$G_{min} = G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{0.5}{\sqrt{1.25 - \cos \pi}} = \frac{0.5}{\sqrt{2.25}} = \frac{1}{3}$$

La figure I.15 représente le diagramme de gain fréquentiel du système.

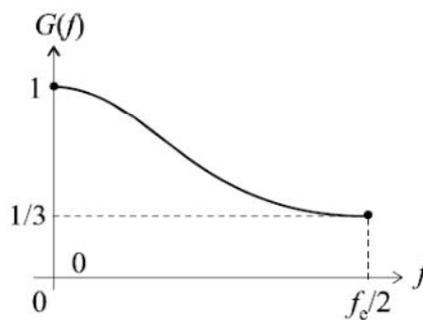


Figure I.15 Diagramme de gain du système

Remarque : Au contraire des systèmes à temps continus, l'usage pour les systèmes échantillonnés, consiste à tracer la courbe de gain directement en coordonnées cartésiennes linéaires. On peut certes exprimer le gain en décibels, mais on préférera utiliser une échelle linéaire pour l'axe des abscisses.

I.8 Relations entre les Modèles à Temps Continu et à Temps Discret :

I.8.1 Problématique :

Considérons (Figure I.16) un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert $G(p)$. Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s'interroger sur l'existence d'un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel.

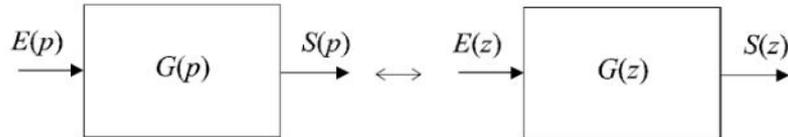


Figure I.16 Recherche d'une équivalence temps continu – temps discret

Le système échantillonné $G(z)$ sera réputé équivalent au système $G(p)$ si, soumis à un signal d'entrée $E(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal continu $e(t)$ représenté par $E(p)$, il délivre à sa sortie un signal $S(z)$ correspondant à l'échantillonnage du signal $s(t)$ qui aurait été délivré par le système $G(p)$.

I.8.2 Équivalence à la Dérivation :

La variation dx/dt en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette équivalence est d'autant plus vraie que la fréquence d'échantillonnage est grande. Or la transformée en z de l'expression de droite est :

$$TZ\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} X(z)(1 - z^{-1})$$

De même, le terme dx/dt a pour transformée de Laplace : $pX(p)$.

Par conséquent, l'équivalence naturelle entre une fonction de transfert continue en p et sa fonction de transfert échantillonnée en z est :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

- **Comparaison fréquentielle des deux modèles :**

$$G(p) \xrightarrow{p=j\omega} G(j\omega)$$

$$G(z) \xrightarrow{z=e^{j\omega T_e}} G(j\omega)$$

La transformation $p \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$ va donc se traduire par $p \leftrightarrow \frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e}$

Il est clair que $\frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e} \neq j\omega$ mais, pour des valeurs faibles de la fréquence $\omega/2\pi$, on peut

écrire :
$$\frac{1-e^{-j\omega T_e}}{T_e} \approx \frac{1-(1-j\omega T_e)}{T_e} = j\omega$$

Nous en concluons que le modèle échantillonné censé être équivalent au modèle à temps continu en utilisant l'équivalence à la dérivation est relativement correct pour les basses fréquences.

I.8.3 Équivalence à l'Intégration :

a) *Définition :*

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. Nous mentionnons ici cette

équivalence sans la justifier :
$$p \leftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

I.9 Fonction de Transfert en z de Systèmes Echantillonnés :

I.9.1 Définition de la Fonction de Transfert Echantillonné :

Considérons un système continu et linéaire de fonction de transfert $G(p)$ qui est attaqué par un signal échantillonné $e^*(t)$.

La sortie $s(t)$ du système continu est évidemment, par nature un signal continu, présent à chaque instant. Dans le domaine de Laplace, elle s'exprime sous la forme : $S(p) = E^*(p).G(p)$

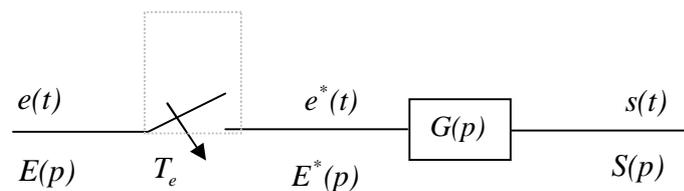


Figure I.17

Mais l'expression de $S(p)$ est d'un emploi peu commode, car elle contient des termes en p et e^{Tp} . Pour simplifier l'analyse du système, on procède de la façon suivante : on ne s'intéresse aux valeurs prises par la sortie qu'aux valeurs prises par la sortie qu'aux seuls instants

d'échantillonnage ; cela revient à considérer en série un échantillonneur *fictif* , synchrone du premier.

On peut alors définir la fonction échantillonnée du système, de la manière suivant :

$$H^*(p) = \frac{S^*(p)}{E^*(p)} , \text{ ou encore } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

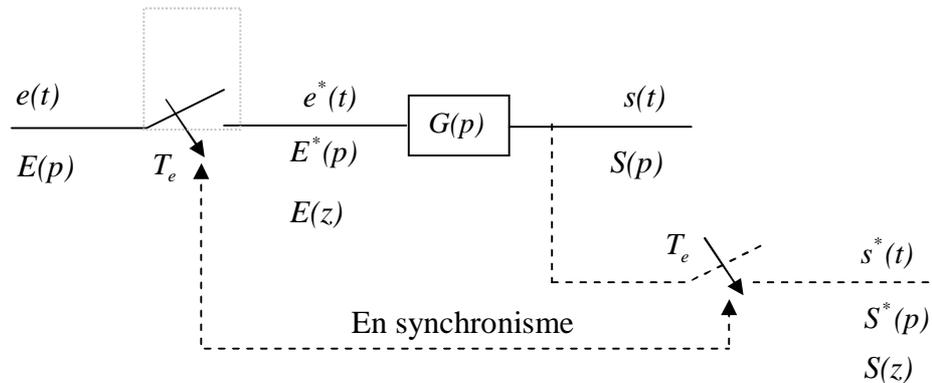
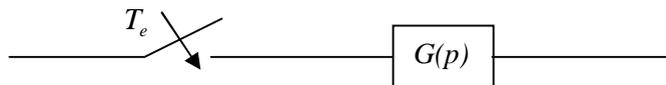


Figure I.18

Donc :

La fonction de transfert échantillonné du système suivant :



est la transformée en z $G(z)$ de la fonction de transfert continue $G(p)$.

I.9.2 Notions de schéma bloc :

Rappels sur la réduction des schémas-blocs :

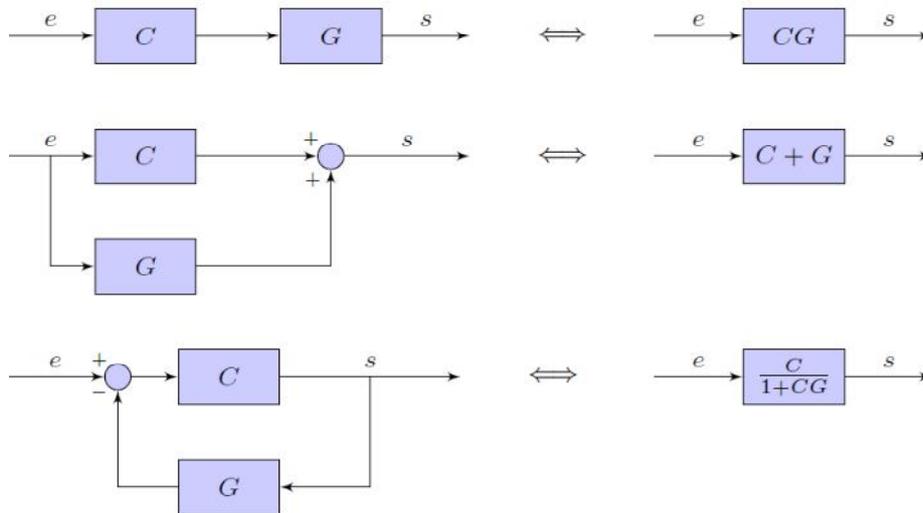


Figure I.19 Opérations fondamentales de réduction des graphes. Le schéma de droite est équivalent à celui de gauche

I.9.3 Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0 :

Le bloqueur d'ordre 0 (en anglais "Zero Order Hold") est l'objet physique qui permet de passer d'un signal numérique échantillonné, qui ne contient que de l'information et seulement aux instants d'échantillonnage, à un signal analogique continu par morceaux.

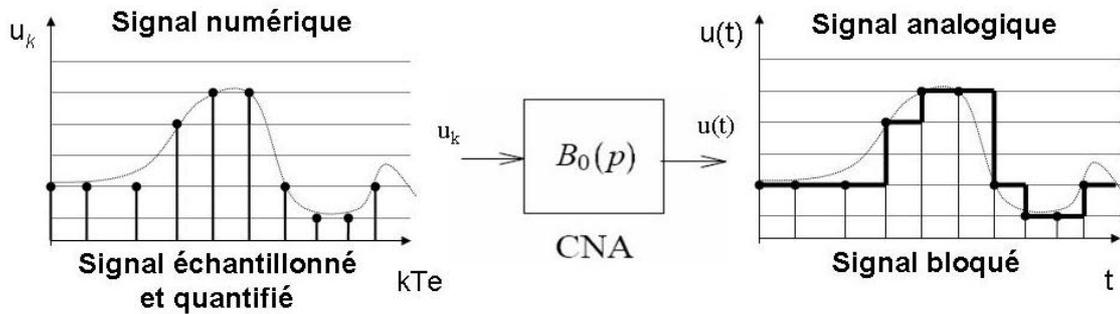


Figure I.20 Signaux d'entrée et de sortie d'un bloqueur d'ordre 0

On cherche la transformée en z du schéma bloc donnée en figure I.21.

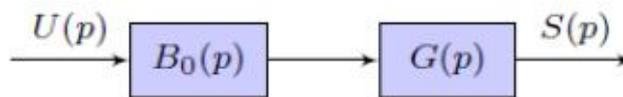
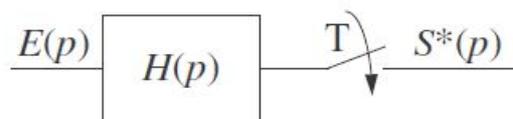


Figure I.21 Fonction de transfert continue précédée d'un bloqueur d'ordre 0

I.9.4 Fonction de Transfert en série :

a. Premier cas :



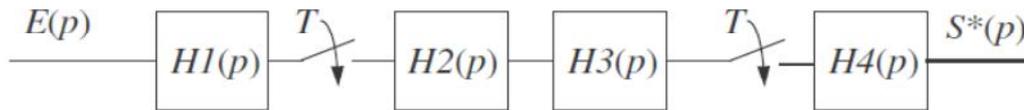
$$S(p) = E(p).H(p)$$

$S^*(p) = \overline{EH}^*(p)$ Cette notation indique que l'on échantillonne le produit $E(p).H(p)$.

Remarque n° 1 : On vérifie que $\overline{EH}^*(p) \neq E^*(p).H^*(p)$

Ainsi si $S(z) = \overline{EH}(z)$ on ne peut pas définir une fonction de transfert.

b. Deuxième cas :



On trouve facilement que :

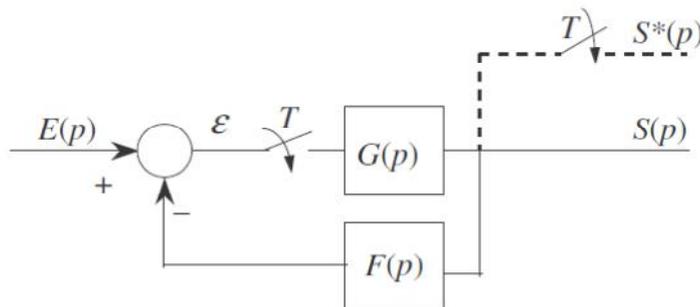
$$S^*(p) = \overline{EH_1}^*(p) \cdot \overline{H_2H_3}^*(p) \cdot H_4^*(p) \quad \Rightarrow \quad S(z) = \overline{EH_1}(z) \cdot \overline{H_2H_3}(z) \cdot H_4(z)$$

En résumé :

- Si deux éléments continus H_1 et H_2 sont séparés par un échantillonneur, la fonction de transfert échantillonnée équivalente est égale au produit des fonctions de transferts échantillonnées ;
- Si les deux éléments ne sont pas séparés par un échantillonneur la fonction de transfert échantillonnée équivalente est égale à la transformée en z du produit $H_1(p) \cdot H_2(p)$.

I.9.5 Fonction de Transfert en Boucle Fermée :

Calculons *la fonction de transfert en boucle fermée FTBF(z)*, ainsi que *l'erreur séquentielle* $\varepsilon(z)$ (erreur aux instants d'échantillonnage) du système ci dessous. Ce système comporte un élément de retour (un capteur) de fonction de transfert $F(p)$.



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot F(p) \\ S(p) &= \varepsilon^*(p) \cdot G(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon^*(p) \cdot G(p) \cdot F(p)$$

Où :

$$\varepsilon^*(p) = E^*(p) - \varepsilon^*(p) \cdot \overline{GF}^*(p) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{GF}^*(p)}$$

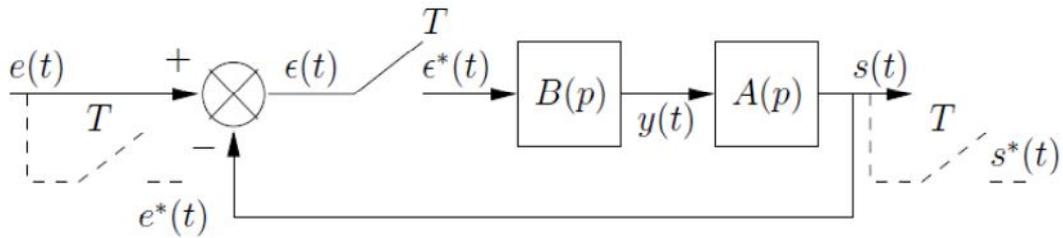
$$\varepsilon^*(z) = \frac{E(z)}{1 + \overline{GF}(z)} \quad \text{ainsi} \quad \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GF}(z)} = FTBF(z)$$

En résumé :

CONFIGURATION DU SYSTEME BOUCLE	SORTIE $S(z)$
	$\frac{G(z)}{1 + \overline{G \cdot H}(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{G(z)}{1 + G(z) \cdot H(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{G_2(z) \cdot \overline{E \cdot G_1}(z)}{1 + \overline{H \cdot G_1 \cdot G_2}(z)}$
	$\frac{G_1(z) \cdot G_2(z)}{1 + \overline{G_1(z) \cdot G_2 \cdot H}(z)} \cdot E(z)$
	$\frac{\overline{E \cdot C}(z)}{1 + \overline{G \cdot H}(z)}$

Exemple illustratif :

On considère, le système de la figure suivante :



Où : $A(p) = \frac{A_0}{p + a}$

Et

$$B(p) = B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

Où A_0 et a sont des scalaires réels.

Montrer que la fonction de transfert en z ; $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ a pour expression :

$$F(z) = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} = \frac{A_0}{a} \frac{1 - e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e}) + \frac{A_0}{a}(1 - e^{-aT_e})}$$

I.9.6 Bloqueur d'Ordre Zéro :

Durant un intervalle d'échantillonnage $[nT, (n+1)T]$, le bloqueur d'ordre zéro maintient le signal continu à une valeur constante, égale à la valeur de l'échantillon e_n . Le signal ainsi obtenu est donc constant par morceaux.

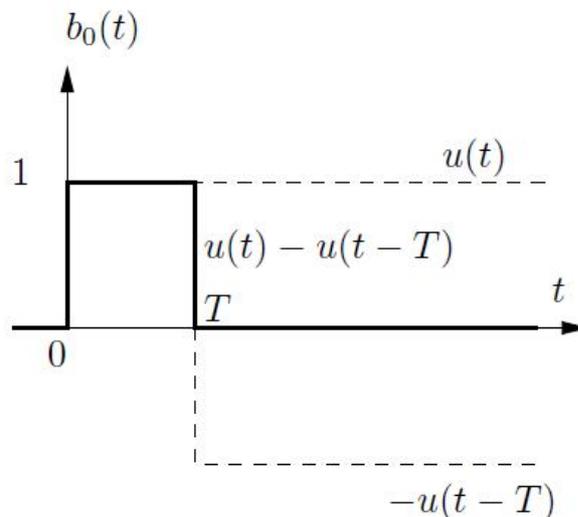


Figure I.22 Construction d'un signal créneau

On utilisera l'abréviation BOZ pour désigner un bloqueur d'ordre zéro.

On dit aussi que le *bloqueur d'ordre zéro* permet l'extrapolation linéaire de degré 0 entre nT et $(n+1)T$ à partir de la valeur e_n .

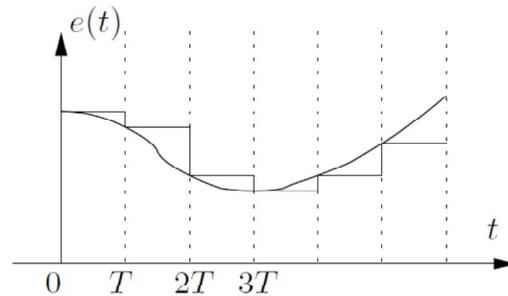


Figure I.23 Comportement du bloqueur d'ordre zéro

Propriété :

La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre zéro est donnée par : $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$

I.6.10 Modélisation des CAN et CNA :

a. Cas du CAN (Convertisseur Analogique Numérique) :

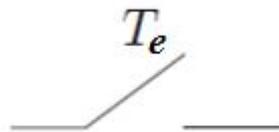


Figure I.24 Représentation usuelle du CAN

b. Cas du CNA (Convertisseur Numérique Analogique) :

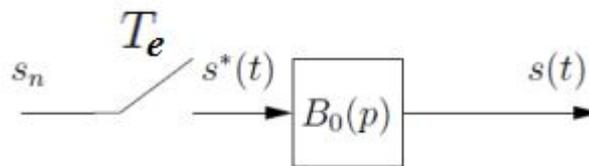


Figure I.25 Représentation usuelle du CNA

I.6.11 Structure Typique d'Asservissement Numérique :

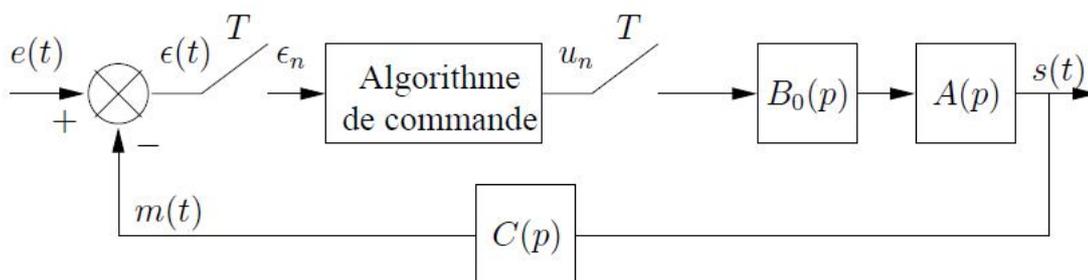


Figure I.26 Structure typique d'asservissement numérique

Chapitre II :

Stabilité et Performances des Systèmes Echantillonnés Asservis

II.1 Condition Générale de Stabilité :

II.1.1 Définition 1:

Un signal échantillonné $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n \delta_n$ est borné si les échantillons e_n sont majorés, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in N, |e_n| \leq M$$

II.1.2 Définition 2:

Un système est dit stable au sens « entrée bornée – sortie bornée » (en anglais BIBO « *Bounded Input, Bounded Output* ») lorsqu'à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

II.1.3 Propriété :

La stabilité du système échantillonné, tout comme celle du **système continu**, est liée directement à la localisation des pôles p_i de sa fonction de transfert $G(p)$; la stabilité exige que **tous les pôles aient leur partie réelle négative**.

$$Re(p_i) < 0$$

Un **système échantillonné (discret)**, de fonction de transfert $G(z)$, est stable **si et seulement si** les pôles de $G(z)$ sont de modules strictement inférieurs à 1 (soit $|z_i| < 1$).

Remarque :

- Cette règle est générale puisqu'elle s'applique aussi bien si $G(z)$ représente un système en boucle ouverte ou un système asservi (c'est-à-dire un système en boucle fermée).
- La correspondance entre *stabilité en temps continu et stabilité en temps discret* est illustrée par la figure II.1.

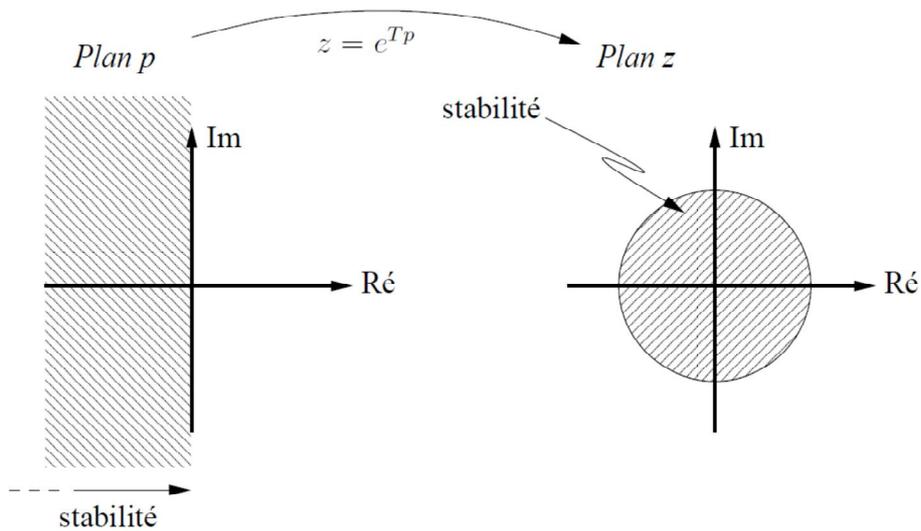


Figure II.1

Les critères présentés ci-après permettent de juger de la stabilité d'un système asservi échantillonné à partir de la connaissance de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Considérons à nouveau la structure d'asservissement échantillonnée représenté par le schéma de la figure II.2 :

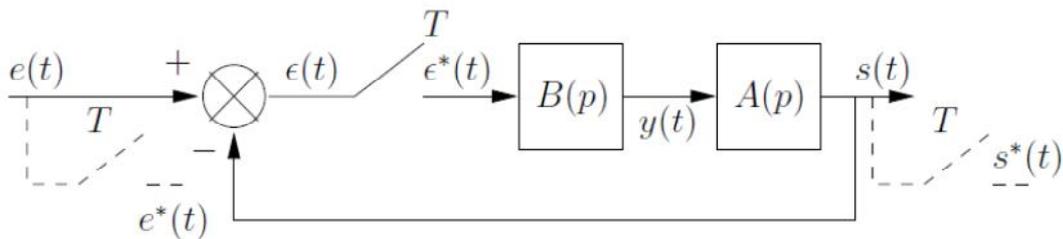


Figure II.2

II.2 Critères Algébriques :

Le point de départ de ces critères est l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée du système échantillonné (Figure II.2):

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} = \frac{\gamma_n z^n + \dots + \gamma_0}{c_n z^n + \dots + c_0} \tag{II.1}$$

II.2.1 Définition :

L'équation caractéristique de la fonction de transfert de l'équation (II.1) est obtenue en annulant le dénominateur de la fonction de transfert :

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0 \tag{II.2}$$

II.2.2 Critère de Routh-Hurwitz :

II.2.2.1 Transformation en ω :

Afin de pouvoir appliquer, pour les systèmes échantillonnés, les mêmes outils d'analyse de stabilité que pour les systèmes continus, on cherche une transformation *conforme* qui, à tout nombre complexe à l'intérieur du cercle unité, fasse correspondre un nombre complexe et un seul dans le demi-plan gauche du plan complexe.

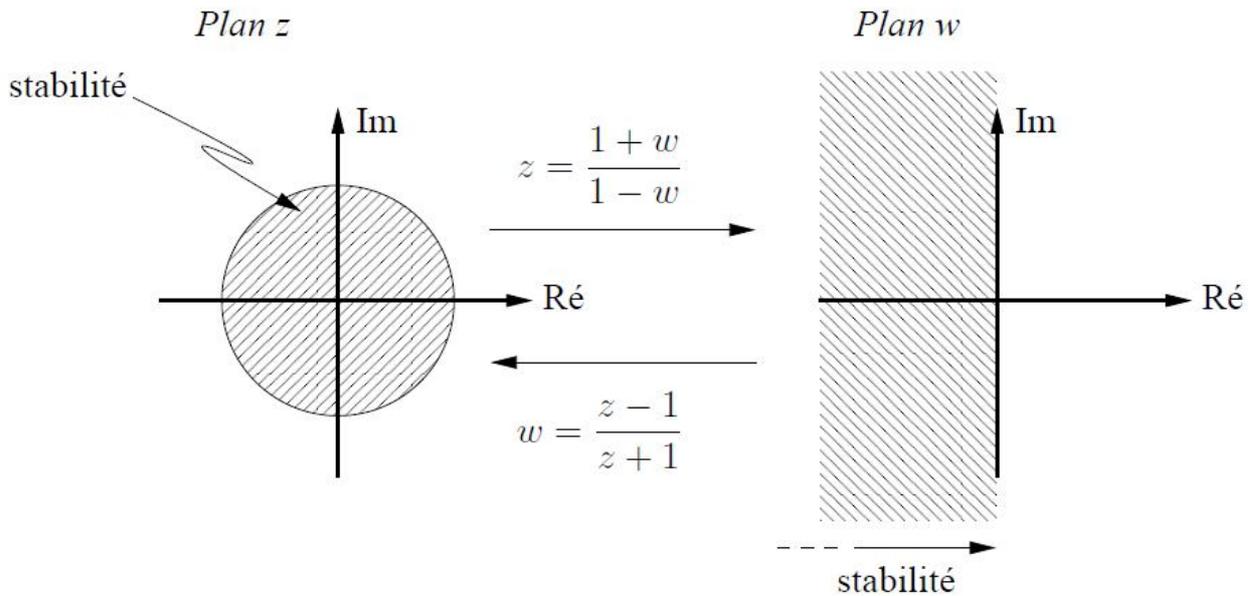


Figure II.3

Pour le passage du plan z au plan ω , cette transformation se définit en posant :

$$z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \quad (\text{II.3})$$

et pour le passage inverse (du plan ω au plan z) :

$$\omega = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (\text{II.4})$$

L'intérêt principal de cette transformation est qu'elle conserve la structure de fractions rationnelles des fonctions de transfert. En effet, en reprenant l'équation caractéristique énoncée précédemment (équation (II.2)) et en utilisant l'équation (II.3), il vient :

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0$$

$$\Rightarrow c_n \left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right)^n + c_{n-1} \left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right)^{n-1} + \dots + c_1 \left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right) + c_0 = 0 \quad (\text{II.5})$$

Ce qui donne, après développement, l'équation caractéristique en ω :

$$\alpha_n \omega^n + \alpha_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + \alpha_1 \omega + \alpha_0 = 0 \quad (\text{II.6})$$

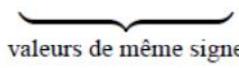
Où les coefficients réels α_k , $k = [0, 1, \dots, n]$ dépendent des coefficients c_k de l'équation caractéristique en z .

Il est alors possible d'appliquer le critère algébrique de *Routh*, bien connu pour les systèmes continus.

Alors, le **critère de Routh-Hurwitz** est comme suit:

Il consiste, dans un premier temps, à former le tableau suivant à partir des coefficients de l'équation caractéristique en ω « Equation (II.6) »:

Donné par l'éq. car.	w^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	α_{n-6}	\dots
	w^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	\dots	
A remplir	w^{n-2}	x_{n-2}	x_{n-3}	x_{n-4}	\dots	\dots
	w^{n-3}	y_{n-3}	\vdots	\vdots		
	\vdots	\vdots	\vdots			
	w^0	\vdots				



valeurs de même signe

Avec :

$$x_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-3} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-4} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-6} - \alpha_n \alpha_{n-7}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-5} = \dots$$

et à la ligne suivante :

$$y_{n-3} = \frac{x_{n-2} \alpha_{n-3} - x_{n-3} \alpha_{n-1}}{x_{n-2}}$$

$$y_{n-4} = \dots$$

\vdots

II.2.2.2 Propriétés :

– Une **Condition Nécessaire et Suffisante** pour que les racines de l'équation caractéristique en ω soient toutes à partie réelle négative est que **les coefficients de la première colonne du tableau de Routh soient tous de même signe.**

Le nombre de racines instables (c'est-à-dire à partie réelle positive) est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

Remarques :

- Ce critère marche quel que soit l'ordre du système.
- Un tel critère ne donne aucune indication sur le degré de stabilité comme la marge de gain ou la marge de phase.
- Il ne s'applique pas aux systèmes contenant un retard.
- Un moyen de vérifier que le tableau de *Routh* est correctement construit est de vérifier que le terme de la dernière ligne de la première colonne n'est autre que le coefficient α_0 .

Exemple :

Soit le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25 = 0, \text{ où } K > 0$$

On pose $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$, il vient le polynôme :

$$\omega^3(K + 0.5) + \omega^2(3 - K) + \omega(4.5 - K) + K = 0$$

La table de *Routh* correspondante s'écrit :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{l} K + 0.5 \\ 3 - K \\ -8K + 13.5 \\ \hline 3 - K \\ K \end{array} & \begin{array}{l} 4.5 - K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Le système est stable si :

$$\begin{cases} 3 - K > 0 \\ \text{et } \frac{-8K + 13.5}{3 - K} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < 3 \\ \text{et } K < 1.6875 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 1.6875$$

II.2.3 Critère de Jury :

Le critère de Jury adresse la stabilité à partir de la connaissance du polynôme caractéristique :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (\text{II.7})$$

Il est ainsi possible d'évaluer la stabilité d'un système partant d'une fonction de transfert en étudiant le polynôme au dénominateur sans en calculer les racines.

Théorème :

Un système linéaire à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients de son polynôme caractéristique vérifient les relations qui suivent. Les conditions dépendent de l'ordre du système nous ne les donnons que pour $n = 1, 2, 3$ et 4 . Les ordres supérieurs peuvent être générés sans difficulté mais sont fastidieux. Pour plus de simplicité on suppose que $a_n > 0$. Dans le cas contraire il suffit de multiplier tous les coefficients par -1 .

$$\text{Pour : } n = 1 : \begin{cases} a_0 + a_1 > 0 \\ -a_0 + a_1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour : } n = 2 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour : } n = 3 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Pour : } n = 4 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0 \\ a_4^2 - a_0^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 - a_2 + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) > 0 \end{cases}$$

Exemple :

Soit le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25 = 0, \text{ où } K > 0$$

L'application du critère de Jury conduit à l'ensemble d'équations:

$$\text{Pour : } n = 3 : \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = K > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 = K + 0.5 > 0 \\ a_3 - |a_0| = 1 - 0.25 > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 = -K + 1.6875 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < K < 1.6875$$

Dont l'intersection donne $0 < K < 1.6875$ comme condition de stabilité.

II.3 Asservissements Continus Commandés ou Corrigés en Temps Discret :

II.3.1 Définition :

Les systèmes asservis comportent assez souvent à la fois des éléments fonctionnant à temps discret et d'autres qui fonctionnent à temps continu. Parmi ces systèmes, on rencontre notamment des asservissements de systèmes continus pour lesquels on envisage une correction par ordinateur. Dans ce cas, les signaux de consignes et de sortie sont continus ; seuls les signaux entrant et sortant du correcteur sont échantillonnés (Figure II.4).

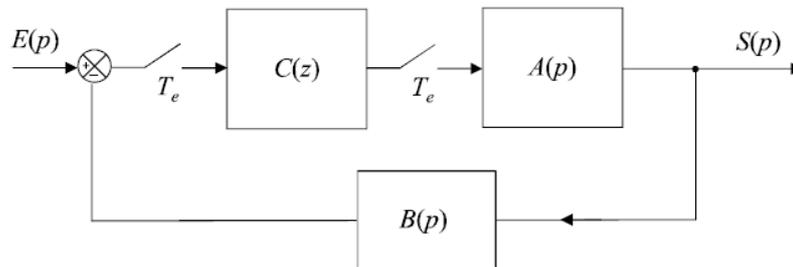


Figure II.4 Asservissement continu avec correction numérique

Dans d'autres cas, l'asservissement complet d'un système continu est piloté par un signal échantillonné (Figure II.5).

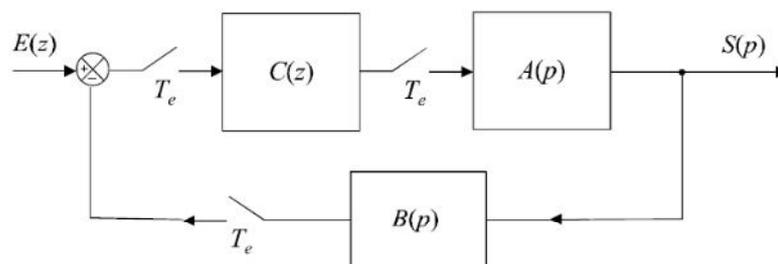


Figure II.5 Asservissement continu commandé par un signal échantillonné

II.3.2 Interfaçage entre un système discret et un système continu :

Un problème subsiste dans les deux cas que nous venons de mentionner : la connexion d'un système échantillonné vers un système à temps continu n'est *a priori* pas possible. En effet, le signal délivré par le système $C(z)$ est un signal identique à celui présenté sur la figure II.6. Il s'agit même, en général, d'une suite de nombres délivrés sous forme binaire. Ce type de signal est bien sûr incompatible avec l'entrée d'un système à temps continu.

Pour retrouver un signal « admissible », il est nécessaire de reconvertir la suite numérique en impulsions discrètes, au moyen d'un convertisseur numérique analogique, puis (et c'est cela qui transforme véritablement le signal en temps discret en signal continu) de procéder à un blocage du signal grâce à un système appelé bloqueur.

Le blocage consiste à maintenir la valeur de l'échantillon jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant. Le signal $x^*(t)$, après blocage, devient le signal continu représenté sur la figure II.7.

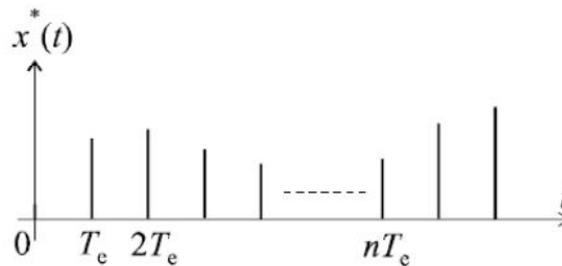


Figure II.6 Signal issu du correcteur

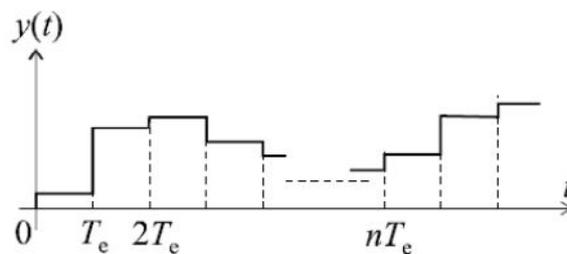


Figure II.7 Signal continu obtenu après blocage du signal échantillonné

Remarque :

Il existe plusieurs types de bloqueurs ; celui qui vient d'être décrit est appelé bloqueur d'ordre 0. On admettra qu'un bloqueur d'ordre 0 peut être modélisé par une fonction de transfert en temps

continu égale à :
$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

II.3.3 Première méthode d'étude simple : recherche d'un système à temps continu équivalent :

La première méthode d'étude du système consiste à rechercher le système continu auquel il est équivalent. Prenons l'exemple du système représenté sur la figure II.4. Le correcteur $C(z)$ possède sans aucun doute un équivalent en temps continu, soit $C(p)$.

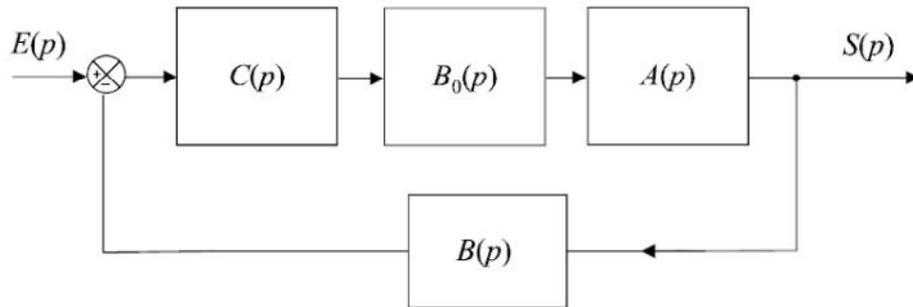


Figure II.8 Équivalence en temps continu du système

Nous pouvons alors proposer un schéma équivalent en continu, en veillant à ne pas oublier le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps continu, effectue l'interfaçage entre le correcteur et le système à commander (Figure II.8).

II.3.4 Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système à temps discret équivalent :

On peut également étudier le système en recherchant le système à temps discret auquel il est équivalent. Reprenons l'exemple du système représenté sur la figure II.4. Soit $A(z)$ et $B(z)$ les équivalents en temps discrets des fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$.

Nous pouvons immédiatement proposer le schéma équivalent en temps continu (figure II.9), en veillant, surtout, à ne pas y inclure le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps discret, n'a aucune raison d'être.

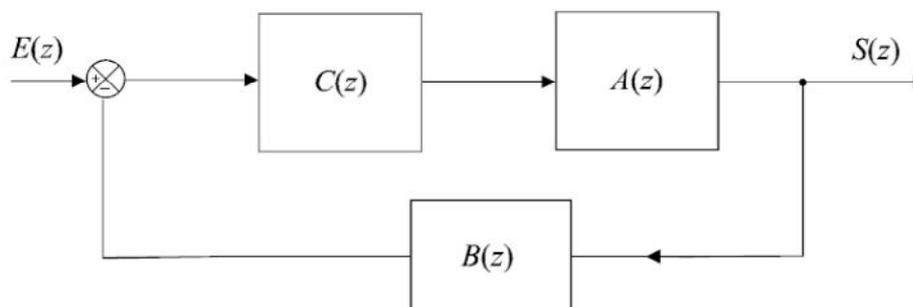


Figure II.9 Équivalence en temps discret du système

II.4 Précision des Asservissements Échantillonnés :

II.4 Erreurs de Position (statique) et de Vitesse (traînage):

On définit, pour les systèmes à temps discret, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position et de vitesse, où :

- L'erreur de position ε_p correspondant à une entrée en **échelon**.
- L'erreur de vitesse ε_v correspondant à une entrée en **rampe**.

Considérons un système échantillonné asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$, placé dans une boucle à retour unitaire et représenté sur la figure II.10.

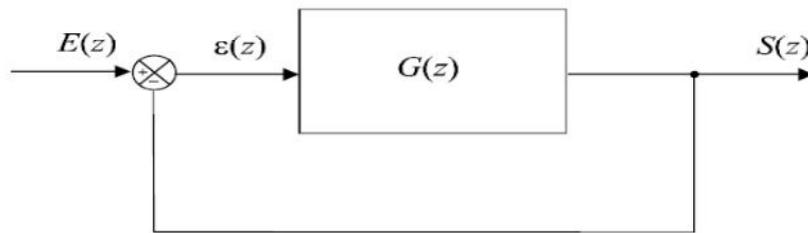


Figure II.10 Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

II.4.2 Erreur de Position :

On définit l'erreur de position ε_p par :

$$\varepsilon_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k \quad \text{pour une } \underline{\text{entrée en échelon unitaire.}}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \varepsilon(z) \right]$$

$$\text{Or : } \varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$$

$$\text{D'où : } \varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + G(z)}$$

$$\text{On a donc : } \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1 + G(z)} \right]$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + G(z)} \right]$$

II.4.3 Erreur de Vitesse :

On définit également l'erreur de vitesse ε_v par :

$\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k$ pour une entrée en rampe.

On a toujours : $\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$

Avec cette fois :

$$E(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right]$$

On rappelle que :

	Signal $e^*(t)$	
	Echelon	Rampe
Transformée en z : $E(z)$	$\frac{z}{(z-1)}$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$

Chapitre III : Correction des Systèmes Echantillonnés Asservis

III.1 Objectifs de la Correction :

Les performances naturelles d'un système (stabilité, précision, rapidité, etc...) peuvent ne pas correspondre à un degré d'exigence spécifié dans un cahier des charges. L'objectif de toute correction est de modifier ces performances afin qu'elles respectent au mieux ce cahier des charges.

De façon qualitative :

- Pour rendre le système *stable*, il faut rassembler tous les pôles du système dans le cercle unité et pour garantir une meilleure stabilité, il faut éloigner le plus possible les pôles de ce cercle en les rapprochant de l'origine.

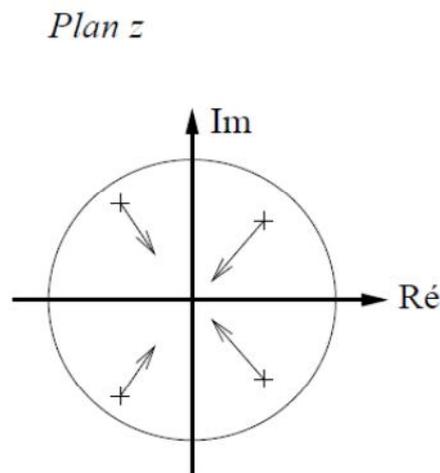


Figure III.1

III.1 Principes Généraux :

III.1.1 Rappel du Cahier des Charges d'un Asservissement :

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement.

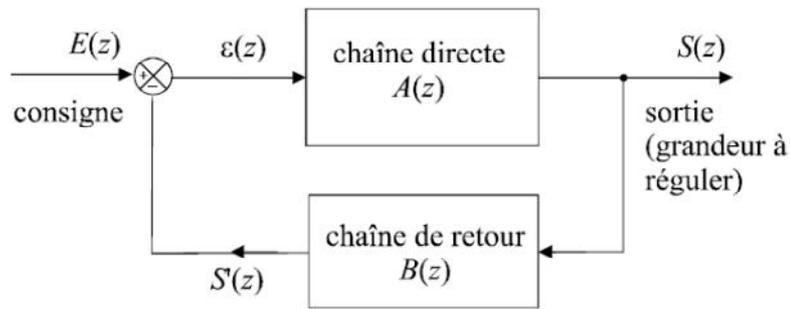


Figure III.2 Schéma général d'un système échantillonné asservi

Considérons un système constitué d'une chaîne directe et d'une chaîne de retour. La plupart du temps, on ne choisit ni les lois de fonctionnement des systèmes $A(z)$ et $B(z)$, ni, bien sûr, leurs fonctions de transfert qui, en général, sont des données imposées par la conception même du système asservi en cours d'élaboration.

III.1.2 Rôle du correcteur :

Le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial (Figure III.3). Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.

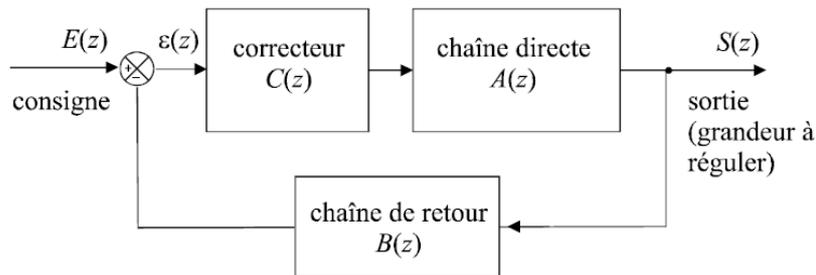


Figure III.3 Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé

Si $G_i(z)$ et $H_i(z)$ sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système initial et $G_c(z)$ et $H_c(z)$ les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système corrigé, on aura :

$$G_i(z) = A(z).B(z) \quad \text{et} \quad H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z).B(z)}$$

$$G_c(z) = C(z).A(z).B(z) \quad \text{et} \quad H_c(z) = \frac{C(z).A(z)}{1 + C(z).A(z).B(z)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert $C(z)$ pour ce correcteur numérique de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces corrections sont en général assurées par un ordinateur.

III.1.3 Correction Numérique d'un Système à Temps Continu :

Très souvent, on choisit, pour des questions de souplesse et de précision, de corriger numériquement un système à temps continu. Le schéma de la boucle d'asservissement correspondante est représenté sur la figure III.4. Un bloqueur doit, bien entendu, être intercalé entre le correcteur numérique et le système à commander.

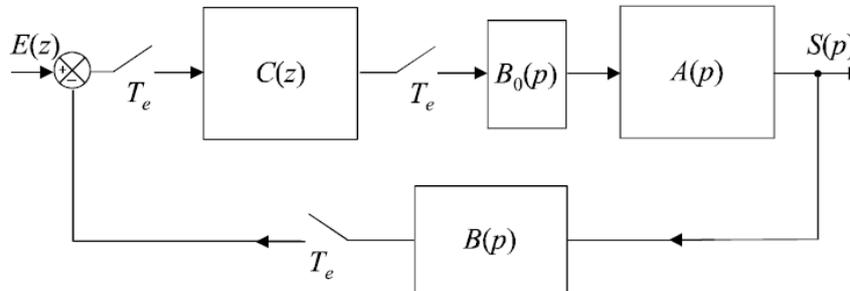


Figure III.4 Asservissement continu commandé et corrigé numériquement.

III.2 Tentatives d'Actions Correctives Simples :

III.2.1 Amélioration de la Précision :

a) Correcteur à Action Intégrale :

La présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un intégrateur (i.e. d'un pôle égal à 1) assure la nullité de l'erreur de position, c'est-à-dire la précision statique parfaite. Si ce pôle est au moins double (s'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe), l'erreur de vitesse est nulle, autrement dit la précision dynamique parfaite est assurée. Par conséquent, pour améliorer simplement la précision, en boucle fermée, d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :

$$C(z) = \frac{K}{(1 - z^{-1})^n}$$

On choisira $n = 1$ si le cahier des charges impose uniquement une condition de nullité de l'erreur de position et $n = 2$ si l'erreur de vitesse doit être nulle également.

b) Conséquence sur les Autres Performances :

Analysons au travers d'un exemple simple, l'influence de l'introduction d'un intégrateur sur le comportement global d'un asservissement.

Exemple :

Soit un système à temps discret de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{2z}{z - 0.5}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z}{3z - 0.5}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence : $s_k = 0,17s_{k-1} + 0,67e_k$.

Ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit : $p_1 = \frac{0.5}{3} = 0.17 < 1$

Considérons les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau III.1) et représentons-les graphiquement (figure III.5).

Tableau III.1 Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0,667	0,777	0,796	0,799	0,800	0,800	0,800

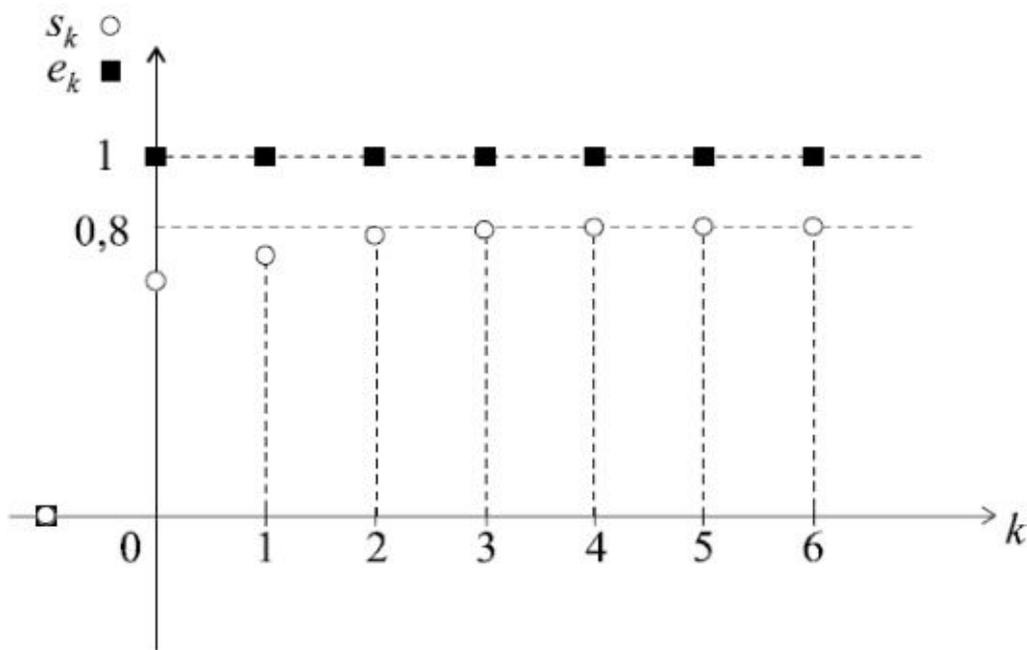


Figure III.5 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée

L'erreur de position a pour valeur :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{2z}{z - 0.5}} \right] = \frac{1 - 0.5}{1 - 0.5 + 2} = 0.2 = 20\%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe. On a, à présent :

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z - 0.5} = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0.5)} \quad \text{avec } K=1 \text{ dans un premier temps.}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0.5) + 2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2 - 1.5z + 0.5}$$

$$\text{Ou encore : } H(z) = \frac{2}{3 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,5s_{k-1} - 0,17s_{k-2} + 0,67e_k$$

Les pôles de cette fonction de transfert (les racines de l'équation $3z^2 - 1,5z + 0,5 = 0$) se calculent aisément et on peut vérifier sans peine que leurs modules sont inférieurs à 1. La condition de stabilité est donc toujours vérifiée.

$$\text{En effet : } \Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 6 = -3,75$$

$$p_{1/2} = \frac{1.5 \pm j\sqrt{3.75}}{6} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = 0.41$$

Toutefois, les modules de ces pôles sont plus proches de 1 que l'unique pôle du système non corrigé (qui était égal à 0,17). On peut donc en déduire que la marge de stabilité est légèrement diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable).

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau III.2) et représentons-les graphiquement (figure III.6).

Tableau III.2 Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0,667	1,000	1,056	1,028	1,005	0,998	0,998

On note la présence d'un faible dépassement (environ 6 %) ce qui corrobore la légère perte de marge de stabilité et une rapidité accrue puisque le temps de montée correspond à l'échantillon $k = 1$, soit $t_m = T_e$.

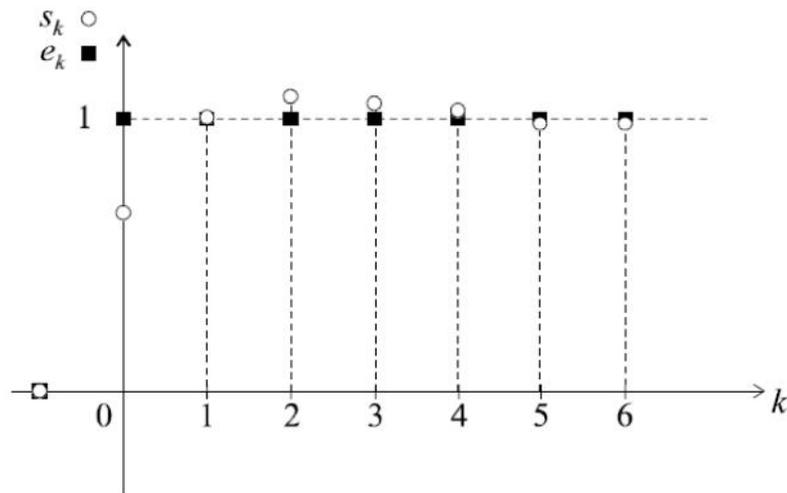


Figure III.6 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction

III.2.2 Action Dérivée :

Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert $C(z)$ égale à :

$$C(z) = K(1 - z^{-1}) \quad \text{avec } K > 0$$

Analysons, au travers d'un exemple simple, l'influence d'un tel correcteur.

Exemple :

Soit $A(z)$ un système échantillonné placé dans une boucle de régulation à retour unitaire et précédé d'un correcteur à action dérivée, avec :

$$A(z) = \frac{1}{z - 0.1}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé est :

$$H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{1}{z + 0.9}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert est :

$$p_1 = -0,9$$

Ce pôle possède bien un module inférieur à 1 mais sa valeur est proche de la limite d'instabilité ; le système est donc stable en boucle fermée mais mériterait sans doute d'être corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable. L'équation de récurrence en boucle fermée étant :

$$s_k = -0,9s_{k-1} + e_{k-1}$$

On peut aisément calculer et représenter graphiquement la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unité pour constater qu'effectivement, le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

Tableau III.3. Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	1	0,1	0,910	0,181	0,837	0,247	0,778	0,300

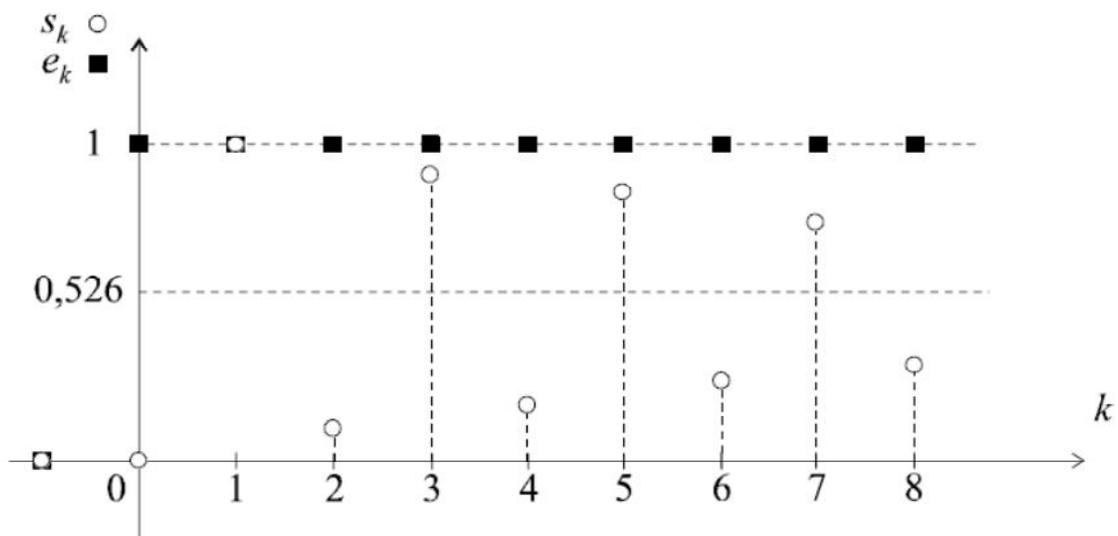


Figure III.7 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée avant correction

En présence du correcteur à action dérivée, on a :

$$G(z) = G(z)A(z) = \frac{K(1-z^{-1})}{z-0.1} = \frac{K(z-1)}{z(z-0.1)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé est donc :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1-z^{-1})}{z(z-0.1)+K(z-1)} = \frac{K(z-1)}{z^2+(K-0.1)z-K}$$

L'équation de récurrence correspondante est :

$$s_k = (0,1 - K) s_{k-1} + Ks_{k-2} + Ke_{k-1} - Ke_{k-2}$$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert.

Cette fois, on a : $\Delta = b^2 - 4ac = (K - 0,1)^2 + 4K$

Ce déterminant étant toujours positif, on a :

$$p_{1/2} = \frac{-(K - 0,1) \pm \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

soit :

$$|p_1| = \frac{0,1 - K + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

et :

$$|p_2| = \frac{K - 0,1 + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

On peut représenter, sur un même graphique, les variations de $|p_1|$ et de $|p_2|$ en fonction de K (figure III.8).

Pour que le système soit stable, il faut que les deux pôles aient un module inférieur à 1.

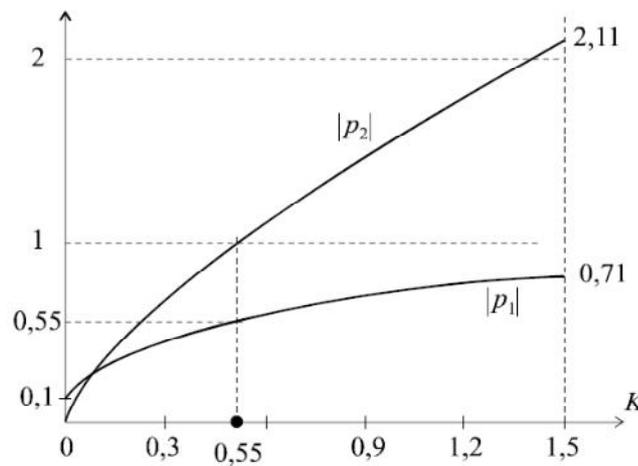


Figure III.8 Variations des modules des pôles en fonction du gain K

On en déduit donc : $K < 0,55$

Choisissons par exemple $K = 0,4$ puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie du système lorsque celui-ci est soumis à un échelon unité (tableau III.4 et figure III.9). Dans ce cas, on a :

$$s_k = -0,3s_{k-1} + 0,4s_{k-2} + 0,4e_{k-1} - 0,4e_{k-2}$$

Tableau III.4. Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0,400	-0,120	0,196	-0,107	0,110	-0,076	0,067	-0,050

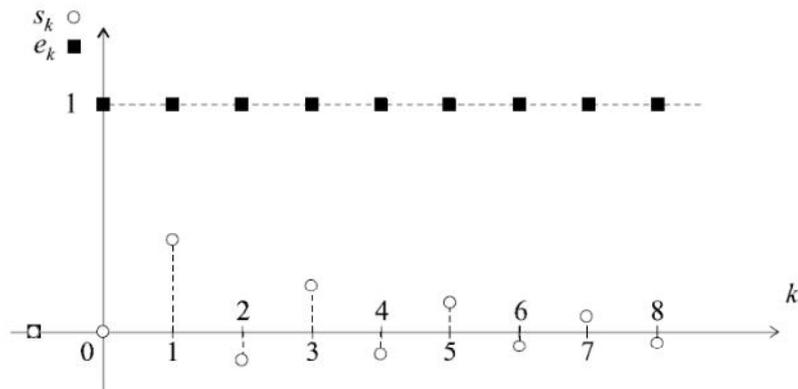


Figure III.9 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction

Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

Soit : $|p_1| = 0,5$ et $|p_2| = 0,8$

Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position atteint à présent 100%.

Exercice :

On considère un système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{z - 0.2}{z - 0.7}$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, calculer l'erreur de position en boucle fermée et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité.

On introduit ensuite un intégrateur dans la chaîne directe, soit : $C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

Montrer que le système est toujours stable et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité. Conclure.

TD N° 01

Exercice 01 : (Détermine de la transformée en z d'un train d'impulsion)

On considère un signal échantillonné $f(kT_e)$, défini par:

$$f(kT_e) = 1 \text{ pour } 0 \leq k \leq k_0,$$

$$f(kT_e) = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et pour } k > k_0.$$

Soit T_e la période d'échantillonnage.

- Déterminer la transformée en z de ce signal.

Exercice 02 : (Détermine de la transformée en z d'une sinusoïde échantillonnée)

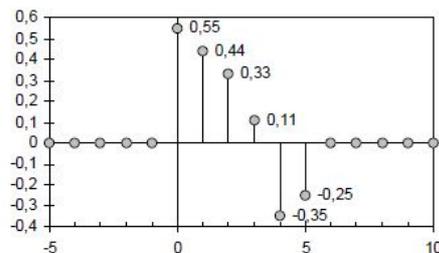
On considère un signal échantillonné $f^*(t)$ résultant de l'échantillonnage, à une période T_e , du signal défini par :

$$f(kT_e) = \sin \omega k T_e \text{ pour } k \geq 0,$$

$$f(kT_e) = 0 \text{ pour } k < 0.$$

Déterminer la transformée en z de ce signal.

Exercice 03 :



Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète $x(n)$ représentée par le graphique ci-contre (elle est aussi nulle dans les parties non représentées).

Exercice 04 :

Déterminer la transformée en z de la fonction causale suivante et calculer ses zéros et/ou ses pôles.

n	0	1	2	3	4	$5 \dots \infty$
$x(n)$	1	4	6	4	1	$0 \dots 0$

Exercice 05 :

Déterminer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale et finale s'appliquent.

$$x(n)=0.8^n \cdot u(n) \quad \text{et} \quad y(n)=n0.8^n \cdot u(n)$$

Exercice 06 :

On considère un système échantillonné de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

- Établir la relation de récurrence entre les suites d'échantillons d'entrée et de sortie.
- Calculer les 9 premiers échantillons de sortie lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.
- Représenter graphiquement le signal de sortie et calculer sa valeur finale.

TD N° 02

Exercice 01 : *(Mise en équation d'un asservissement et étude de sa stabilité)*

On considère un système échantillonné de fonction de transfert $G(z)$ placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{K}{(z - 0.4)(z - 0.8)} \quad \text{avec } K > 0$$

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée par deux méthodes.

Le système étant sollicité, en boucle fermée, par un échelon unité, calculer les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie dans le cas $K = 0,3$ et dans le cas $K = 1$.

Exercice 02 : *(Stabilité et précision d'un système échantillonné asservi)*

On considère un système échantillonné de fonction de transfert $G(z)$ placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{K.z}{(z - 0.9)} \quad \text{avec } K > 0 \text{ réglable}$$

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée par deux méthodes.

Calculer l'erreur de position en fonction de K .

Le système étant sollicité, en boucle fermée, par un échelon unité, calculer les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie dans le cas où K est réglé de manière à obtenir une erreur statique égale à 0,1.

Exercice 03 : *(Influence d'un intégrateur sur la stabilité d'un système)*

On considère un système échantillonné de fonction de transfert $G(z)$ placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{K}{(z - 0.6)^3} \quad \text{avec } K > 0 \text{ réglable}$$

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée par deux méthodes.

Calculer l'erreur de position (statique) en fonction de K et déterminer les valeurs minimales et maximales de cette erreur de position.

On introduit à présent un intégrateur dans la chaîne directe. Déterminer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée et montrer que, dans ces conditions, il sera pratiquement impossible de régler K pour assurer la stabilité du système.

Exercice 04 : (*Influence du choix de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité*)

Un système à temps continu de fonction de transfert $G(p)$ est placé dans une boucle de régulation à temps discret à retour unitaire et commandé numériquement. La fréquence d'échantillonnage T_e est réglable.

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{p + 10}, K > 0$$

Déterminer, en fonction de K les conditions de stabilité du système échantillonné en boucle fermée. Comparer les conditions de stabilité du système pour $T_e = 1$ s, $T_e = 0,1$ s et $T_e = 0,02$ s. La valeur du gain étant réglée sur $K = 50$, déterminer la condition sur T_e pour que le système soit stable.

But :

Ce TP a pour but de familiariser l'étudiant avec l'utilisation du logiciel Matlab pour la génération des différents types de formes d'ondes.

The *Signal Processing Toolbox* de MATLAB contient des fonctions pour la génération des formes d'ondes couramment utilisées périodiques et non périodiques, séquences (impulsion, échelon, rampe), train d'impulsions...

Exercice :

1. Génération des signaux : Impulsion Unité et Echelon Unité

Deux signaux élémentaires de base sont : l'impulsion Unité et l'échelon Unité.

L'impulsion unité $u[n]$ de longueur N peut être générée en utilisant la commande Matlab suivante :

$$u = [1 \text{ zeros}(1, N-1)] ;$$

De même, l'impulsion unité $u_d[n]$ de longueur N et décalées de M échantillons, tel que $M < N$, peut être générée par la commande MATLAB suivante :

$$u_d = [\text{zeros}(1, M) \ 1 \ \text{zeros}(1, N-M-1)];$$

L'échelon unité $s[n]$ de longueur N peut être généré en utilisant la commande Matlab suivante :

$$s = [\text{ones}(1, N)]$$

La version décalée de l'échelon unité s'obtient de la même manière que dans le cas de l'impulsion unité.

Le programme P1 peut être utilisé pour générer et tracer un signal impulsion unité :

```
*****
%Programme P1
% Génération d'une impulsion unité
% Génération d'un vecteur de -10 à 20
n=-10:20;
% Génération de l'impulsion unité
u = [zeros(1,10) 1 zeros(1,20)];
% Tracer le signal généré
stem(n,u);
xlabel('Temps indexe en n');
ylabel('Amplitude');
title('Impulsion Unite');
axis([-10 20 0 1.2]);
*****
```

Travail demandé 1 :

1- Modifier le programme précédent pour générer une impulsion unité décalée de 11 échantillons. Exécuter le programme et tracer le signal généré.

2- Modifier le programme précédent pour générer un échelon unité décalé de 20 échantillons.

2. Génération des signaux périodiques

Une autre classe de signaux très utile en traitement du signal et en automatique sont les signaux sinusoïdaux de la forme : $x[n] = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \phi)$

Avec Matlab, ce type de signaux peut être généré en utilisant les opérateurs trigonométriques cos et sin.

Le programme P2 est un exemple qui génère un signal sinusoïdal.

```
*****
% Programme P2
% Generation d'un signal sinusoidal
n = 0:100;
f = 0.1;
phase = 0;
A = 1.5;
arg = 2*pi*f*n - phase;
x = A*cos(arg);
clf; %efface l'ancienne figure
stem(n,x);
axis([0 100 -2 2]);
grid;
title('Signal Sinusoidal');
xlabel('Temps indexe en n');
ylabel('Amplitude') ;
axis ;
*****
```

Travail demandé 2 :

1- Modifier le programme précédent pour générer et tracer un signal sinusoïdal de longueur 50, fréquence 0.08, amplitude 2.5 et phase décalée de 90 degrés.

2- Générer et tracer les séquences définies ci-dessous :

$$x_1(n) = \sin\left(\frac{\pi}{7}n\right) \quad 0 \leq n \leq 35$$

$$x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi}{7}n\right) \quad -15 \leq n \leq 25$$

$$x_3(n) = \sin\left(3\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \quad -15 \leq n \leq 15$$

$$x_4(n) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{23}}n\right) \quad 0 \leq n \leq 50$$

3. Comparaison entre un signal continu et un signal discret :

Exécuter sur Matlab le programme P3 suivant :

```
*****  
% Programme P3  
% Génération d'un signal continu et un signal discret  
x = 1:0.1:2;  
y=sin(x);  
clf; % efface l'ancienne figure  
stem(x,y);  
grid;  
xlabel('Temps');  
ylabel('Amplitude') ;  
hold on  
plot(x,y, 'r') % 'r' : couleur rouge  
*****
```

Travail demandé 3 :

1- Ecrire un programme pour générer et tracer un signal sinusoïdal de longueur 10, fréquence 0.6, amplitude 5 et phase décalée de -90 degrés.

1. Soit le système continu suivant :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 0.15p + 0.01}$$

- Définir la fonction de transfert $G(p)$ du système sous Matlab (utiliser les commandes *num*, *den* et *tf*).
- Calculer les pôles du système (racines du dénominateur), (utiliser la commande *roots* ou *pole*).
- Tracer avec Matlab le lieu des racines de $G(p)$ (utiliser la commande *rlocus*). Vérifier la stabilité de ce système.
- Ce système est-il stable ? Pourquoi.
- Transformée en z avec BOZ (Bloqueur d'Ordre Zéro), prenez le temps d'échantillonnage $T_e = 1$, utiliser la commande *c2d*.
- Calculer l'amplitude de chaque pôle.
- Ce système est-il stable ? Pourquoi.
- Vérifier la stabilité de système discret par le lieu des racines de $G(z)$ utiliser la commande *rlocus*.
- Tracer dans une même figure la réponse de système continu et discret, pour une entrée en échelon unitaire.
- Ce système est-il stable ? Pourquoi.

2. Représenter le système $G(p)$ sous la forme de la représentation d'état, utiliser la commande *tf2ss*.

- Représenter $G(p)$ comme un système continu sous Simulink, utiliser ses matrices A, B, C et D comme des blocs. (Voir figure 1)

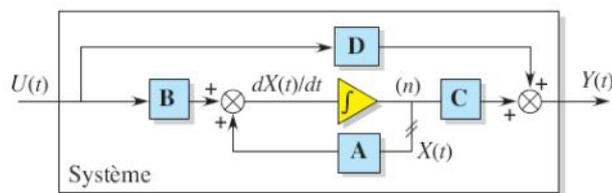


Figure 1

- Représenter $G(p)$ comme un système discret sous Simulink, utiliser ses matrices A, B, C et D comme des blocs. (Voir figure 2)

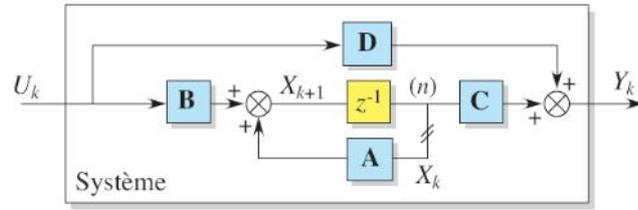


Figure 2