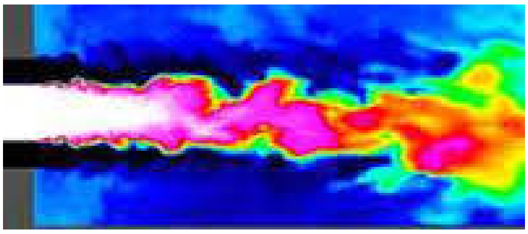
Mécanique des fluides

COURS Mécanique des fluides , Chapitre 2



DJARALLAH.R

Mars 2017
1.0

Table des matières

Chapitre 2

I

La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. Plus précisément, elle concerne toutes les situations dans lesquelles il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules fluides :

- fluides au repos
- fluides uniformément accélérés

Il n'y a pas de *contraintes dues aux frottements* entre particules.

Les forces en jeu sont uniquement des forces de volume dues au poids et de forces de surface dues à la *pression*.

1. Équation fondamentale de la statique des fluides.

1.1. introduction

La masse volumique du fluide est en tout point la même : ρ = cte (fluide incompressible). Par ailleurs, on peut considérer que l'accélération de la pesanteur est une constante :

g = cte.

Par conséquent :

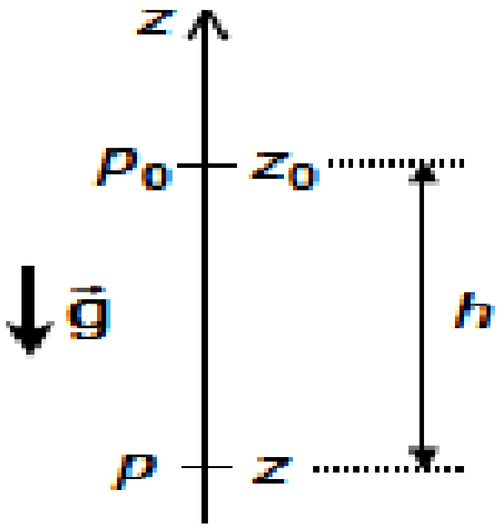
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = cte$$

math

Et par intégration :

$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = -\int \rho g dz = -\rho g z + cte$$

math_02



imageA

Soit :

$$\boxed{p(z)+\rho g z = cte = p_0 + \rho g z_0}$$

math_03

Donc : $p(z) = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 0 + \rho g h$ où h est la hauteur de fluide sous le niveau de référence.

Un tel champ de pression, affine en z, est appelé champ de pression hydrostatique, et l'équation ci-dessus encadrée est l'équation de l'hydrostatique (équation fondamentale de la statique des fluides dans le cas particulier d'un fluide isovolume dans le champ de pesanteur).

La plupart du temps, on prendra $z_0 = 0$ le niveau de référence correspondant à la surface libre du fluide où $p_0 =$ Pa. Pour les applications numériques, on prendra la pression atmosphérique standard : $p_a = 1{,}013\ 10^5$ Pa.

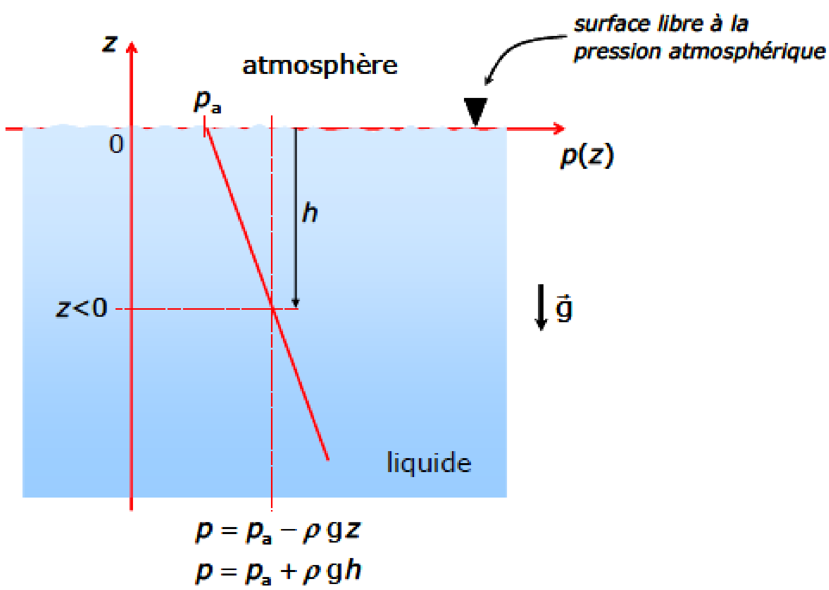


IMAGE B

Exemple : Lois d'Hydrostatique

En supposant la pression atmosphérique égale à $p_0 = 1{,}013\ 10^5$ Pa, on va déterminer la pression P qui régnera à l'extérieur d'un sous-marin, enfoncé et immobile, en un point situé à 38 m de profondeur. La masse volumique de l'eau est prise égale à 1 000 kg/m^3. D'après la relation de l'hydrostatique, nous avons immédiatement :

$p = 1{,}013\ 10^5 + 1000 \times 9{,}81 \times 38 = 4{,}74\ 10^5$ Pa.

Conséquences

Les conséquences de l'équation fondamentale de l'hydrostatique sont les suivantes :

- Les surfaces d'égale pression dans un fluide homogène sont des plans horizontaux (plans isobares). En effet, quand p = cte nous avons z = cte. Réciproquement la pression est

constante dans un plan horizontal quelconque.

- Si nous avons deux fluides différents, de masses volumiques différentes, non miscibles, la surface de séparation est horizontale. Le fluide le plus lourd est en dessous (équilibre stable).

En particulier, la surface libre d'un liquide surmonté d'un gaz au repos (comme l'air atmosphérique) est un plan horizontal (plan où la pression est la pression atmosphérique

constante). En effet :

Soit S l'interface entre deux fluides de masses volumiques respectives ρ et ρ'. Soient A (respectivement A') et B (respectivement B') deux points distincts sur S.

On a :

$p(A) = p(A')$ et $p(B) = p(B')$ en vertu du principe de l'action et de la réaction,

$z(A) = z(A')$ et $z(B) = z(B')$ puisque ce sont les mêmes points géométriques,

$p(A) - p(B) = \rho g[z(B) - z(A)]$ et $p(A') - p(B') = \rho' g[z(B') - z(A')]$ d'après l'équation

fondamentale de la statique.

D'où, $\rho g[z(B) - z(A)] = \rho'\ g[z(B') - z(A')]$ soit $(\rho - \rho')g[z(B) - z(A)] = 0$.

Si ρ ρ' , alors $z(B) = z(A)$, et ceci quels que soient les points A et B. Il en résulte que, sous l'action de la gravité, la surface libre d'un liquide ou la surface de séparation de deux

liquides non miscibles en équilibre est un plan horizontal.

On en déduit le « principe des vases communicants » : dans plusieurs vases de forme quelconque, communiquant entre eux et contenant un seul liquide en équilibre, les surfaces

libres dans les différents vases sont dans le même plan horizontal.

Ce point est à la base de la mesure de la différence de pression entre deux gaz à l'aide du manomètre en U. Il suffit de mesurer la différence de niveau du liquide dans les deux

branches et de connaître la masse volumique de ce liquide .

- La différence de pression $p_A - p_B$ entre deux points quelconques A et B pris à l'intérieur du fluide ne dépend que de la distance verticale entre les deux points. Elle est égale au poids d'une colonne de fluide ayant comme base l'unité de surface et comme hauteur la différence de niveau entre les deux points. En effet :

$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$

$(p_B - p_A) = \rho g(z_A - z_B)$

avec ρg poids volumique du fluide.

L'expérience du tonneau de Pascal en est une bonne illustration. Pascal installe au-dessus d'un tonneau un tuyau vertical très étroit et très haut (plusieurs mètres). L'implantation du

tuyau sur le tonneau est parfaitement étanche. Le tonneau étant plein d'eau, Pascal verse alors en haut du tube (depuis une fenêtre de la maison en bordure de laquelle l'expérience a lieu) une quantité infime d'eau, suffisante pour remplir le tube : le tonneau éclate ! Cette expérience montre bien que ce qui définit la pression, ce n'est pas le poids du liquide situé au dessus, mais son poids par unité de surface.

- Dans un fluide incompressible en équilibre, les variations de pression se transmettent intégralement en tout point du fluide. La différence (p_B - p_A) calculée précédemment reste constante quelles que soient les pressions. Si p_A varie, p_B varie simultanément de la même quantité. Ceci constitue le théorème de Pascal.9 Dans l'expérience du tonneau de Pascal, si la hauteur de l'eau dans le tube est h, la pression p en chaque point du tonneau a augmenté de ρgh et les forces de pression sur les parois du tonneau peuvent devenir considérables. Le tube vertical étant assez étroit, il est possible d'obtenir ce résultat en introduisant un poids d'eau très faible vis-à-vis du poids total de l'eau contenu dans le tonneau.

2. Forces de pression sur une paroi plane

Soit une paroi de surface S située entre les profondeurs h_1 et h_2 au-dessous de la surface libre du liquide. Soit p_0 la pression atmosphérique. Cette surface est soumise aux deux forces F_1 et F_2 normales à S et de directions opposées : F_1 la force exercée par le fluide sur la paroi et F_2 la force exercée par le milieu extérieur sur la paroi.

Les poussées élémentaires $-pn_1dS$ reçues par la paroi sont des vecteurs parallèles qui se composent

en une résultante normale à la surface ; son intensité est :

$$\vec{F}_1 = \int -p\vec{n}_1\, dS\, ou'\, p = p_0 + \rho\, gh$$

math_04

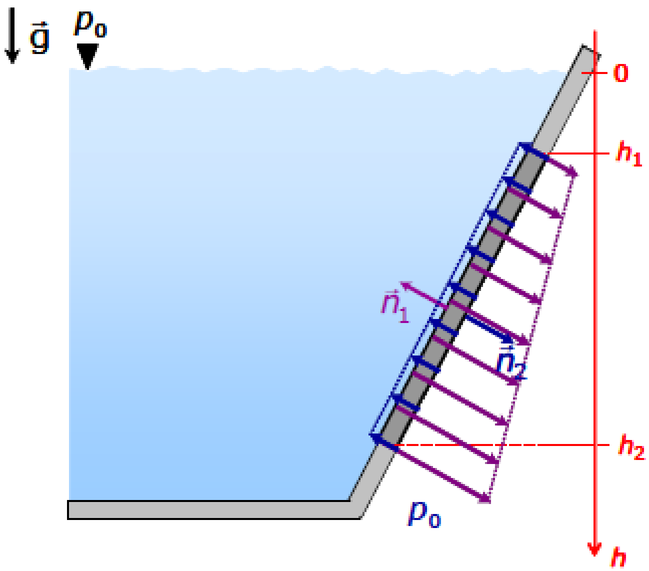


IMAGE C

$$\vec{F}_1 = -\vec{n}_1 \int_S (p_0 + \rho g h) dS = -\vec{n}_1 \left(p_0 S + \rho g \int_S h\, dS\right)$$

math_05

Par ailleurs,

$$\vec{F}_2 = -\vec{n}_2 S\, p_0$$

math_06

D'où la résultante de ces deux actions :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\rho g h_G S \vec{n}_1 = \rho g h_G S \vec{n}_2$$

math_07

La pression atmosphérique s'applique de part et d'autre de la paroi et n'intervient donc plus sur la résultante.

3. Poussée d'Archimède

Définition

On cherche l'effort exercé sur un *objet immerg é*, c'est-à-dire la force totale exercée par le fluide sur l'obstacle qui occupe le volume V totalement entouré par le fluide.

On sait que cette force s'exprime par:

$$\vec{F} = \iint_S -p\,\vec{n}\,dS$$

math_08

où le vecteur n est la normale unitaire en tout point de la surface S qui limite V, orientée vers le milieu qui agit.

La formule du gradient, rappelée ci-contre, permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume :

$$\iint_S f\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \vec{grad}\, f dV$$

math_09

Dans le cas présent, il vient :

$$\vec{F} = \iiint_V -\vec{grad} p dV$$

math_10

Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire :

$$\vec{grad} p = \rho\,\vec{g}\, d'ou'\,\vec{F} = -\vec{g}\iiint_V \rho\, dV = -\rho\, V\,\vec{g}$$

math_11

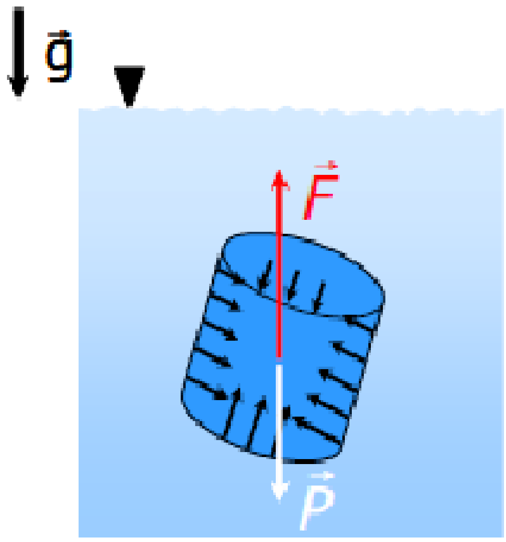


IMAGE D

en supposant g constant sur tout le volume .

ρV est la masse de fluide déplacé par le volume solide.

La poussée F n'a pas de composante horizontale et sa composante verticale est égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps (c'est la poussée d'Archimède).

4. Exercice

[Solution p]

La mécanique des fluides étudie et caractérise

- ☐ Le comportement mécanique des fluides
- ☐ Le comportement chimique des fluides
- ☐ Le comportement thermodynamique des fluides

5. Exercice

[Solution p]

La mécanique des milieux continus est le cadre général dans lequel s'applique la mécanique des fluides

- ☐ non
- ☐ oui

6. Exercice

[Solution p]

La viscosité d'un fluide caractérise

- ☐ sa texture
- ☐ sa couleur
- ☐ sa capacité à s'écouler
- ☐ sa résistance à l'écoulement

7. Exercice

[Solution p]

Les fluides ont une structure moléculaire :

- ☐ ordonnée
- ☐ désordonnée
- ☐ cristalline
- ☐ cubique

8. Exercice

[Solution p]

Que traduit le module d'élasticité cubique d'un fluide ?

- ☐ sa raideur vis-à-vis des sollicitations de cisaillement

☐ sa raideur vis-à-vis des sollicitations de compression et de traction

☐ sa souplesse vis-à-vis des sollicitations de cisaillement

☐ sa souplesse vis-à-vis des sollicitations de compression et de traction

9. Problème général de statique des fluides

Si le champ de force de volume F est connu (par exemple champ de pesanteur g par unité de masse), le problème général concerne trois inconnues (ρ, p et T) et nécessite le traitement de trois équations : l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{grad}\, p = \rho \vec{F}$$

math_12

à laquelle on ajoute l'équation d'état du fluide (ρ = cte ou ρ =M / RT p ou.....) et la condition qui favorise l'équilibre (par exemple, T uniforme dans tout le volume).