



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

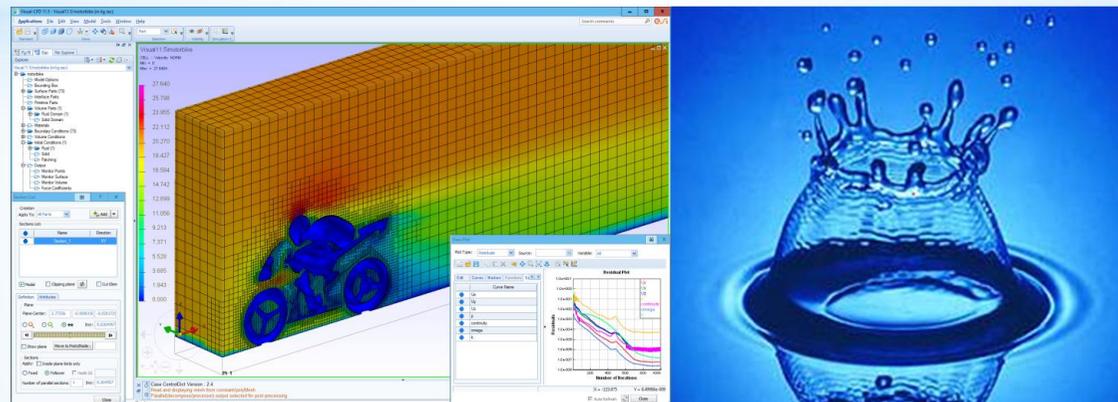


Cours de Méthode de Volume Finis

Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Energétique

Présentée par :

Dr. ATIA Abdelmalek



2019-2020

Contenu de Cours

Semestre : 2
Unité d'enseignement : UEM 1.2
Matière : Méthode des volumes finis
VHS : 45h00 (cours: 01h30, TP:1h30)
Crédits : 4
Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement:

- Maîtriser la discrétisation des EDP par la méthode des volumes finis.
- Résoudre les équations discrétisées par des algorithmes de calcul (SIMPE, SIMPLER...)
- Permettre aux étudiants d'élaborer des codes de calculs en volumes finis.

Connaissances préalables recommandées :

Méthodes numériques approfondies

Contenu de la matière :

- Chapitre 1** : Généralités sur le calcul de dynamique des fluides (CFD). (1semaine)
Chapitre 2 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion. (2semaines)
Chapitre 3 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion. (3semaines)
Chapitre 4 : Les algorithmes de solution (SIMPLE, SIMPLER, PISO). (3semaines)
Chapitre 5 : Solution des équations algébriques discrétisées. (2semaines)
Chapitre 6 : La méthode des volumes finis pour les écoulements transitoires. (2semaines)
Chapitre 7 : La méthode des volumes pour les problèmes de convection-diffusion (méthode $\psi-\omega$). (2semaines)

Mode d'évaluation:

Contrôle Continu : 40%, Examen : 60%.

Références bibliographiques:

1. H.K. Versteeg, W. Malasasekera, "Introduction to Computational Fluid Dynamics: The finite method (2nd Edition)", Pearson, Prentice Hall, 2007.
2. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington, DC,

Connaissances préalables recommandées :

Méthodes numériques approfondies

Contenu de la matière :

- Chapitre 1** : Généralités sur le calcul de dynamique des fluides (CFD). (1semaine)
Chapitre 2 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion. (2semaines)
Chapitre 3 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion. (3semaines)
Chapitre 4 : Les algorithmes de solution (SIMPLE, SIMPLER, PISO). (3semaines)
Chapitre 5 : Solution des équations algébriques discrétisées. (2semaines)
Chapitre 6 : La méthode des volumes finis pour les écoulements transitoires. (2semaines)
Chapitre 7 : La méthode des volumes pour les problèmes de convection-diffusion (méthode $\psi-\omega$). (2semaines)

Chapitre I : Généralités sur le calcul de dynamique des fluides (CFD)

CFD: Computational Fluid Dynamics

Mécanique des Fluides Numérique

Introduction

Les scientifiques et les ingénieurs utilisent plusieurs techniques pour la résolution des problèmes de champ (diffusion de la chaleur, propagation d'ondes ...etc). Ces techniques peuvent être expérimentales, analytiques ou numériques.

Les méthodes expérimentales sont très chères, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et même dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation.

La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limites. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.

Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration de structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique

1. What is Computational Fluid Dynamics (CFD) ?

2. Why use CFD ?

3. Where is CFD used?

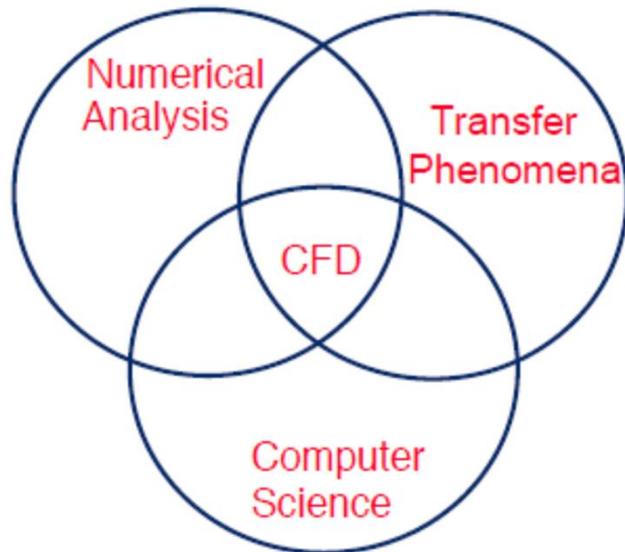
4. CFD steps

1. What is Computational Fluid Dynamics (CFD) ?



Computational Fluid Dynamics Introduction

CFD is an interdisciplinary topic



CFD

=

1. Transport Phenomena

+

2. Numerical Analysis

+

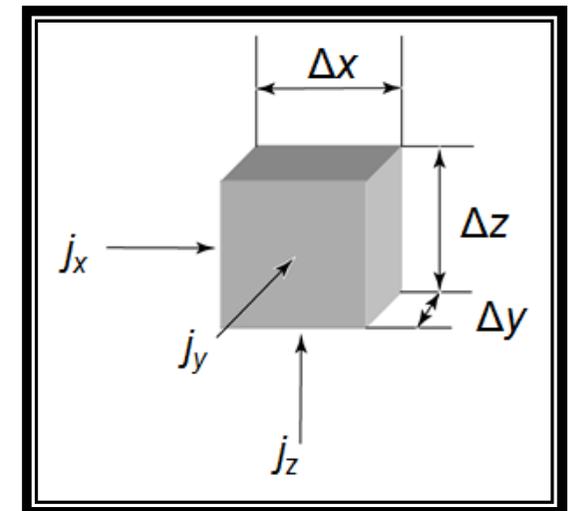
3. Computer Science

Transport Phenomena: Fluid Flow, Heat Transfer, and Mass Transport

Dans le but de simuler les écoulements de fluides, de transferts thermiques ainsi que d'autres phénomènes physiques relatifs, il est nécessaire de décrire la physique associée par des termes mathématiques. La grande partie des phénomènes qui nous intéressent sont gouvernés par des principes de conservation et sont régis par les EDP exprimant ces principes. Par exemple, les équations de quantité de mouvement expriment la conservation de la quantité de mouvement, l'équation d'énergie exprime la conservation de l'énergie totale, ...etc.

Résoudre les équations qui décrivent les phénomènes de transport et interpréter les résultats est un moyen efficace de comprendre les systèmes étudiés. Cette méthodologie est utilisée avec succès pour étudier l'écoulement des fluides, le transfert de chaleur et le transport des espèces chimiques dans de nombreux domaines, y compris :

- Sciences de l'ingénieur
- La biologie
- Chimie
- Sciences environnementales
- Géologie
- Science matérielle
- Médicament
- Météorologie
- La physique



Transport Phenomena: Fluid Flow, Heat Transfer, and Mass Transport

Naturels

Météorologie

Océanographie
Hydraulique,...

Biomécanique, BioMédical,...

énergie éolienne

Transport Phenomena
c'est le domaine
d'énergétique

Énergie solaire

Industriels

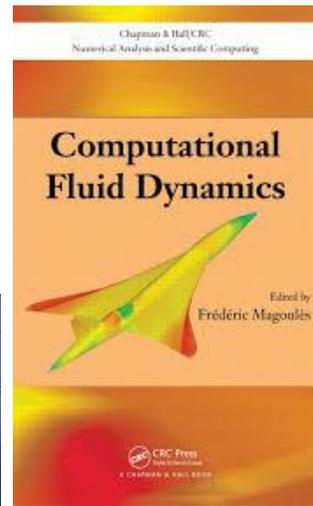
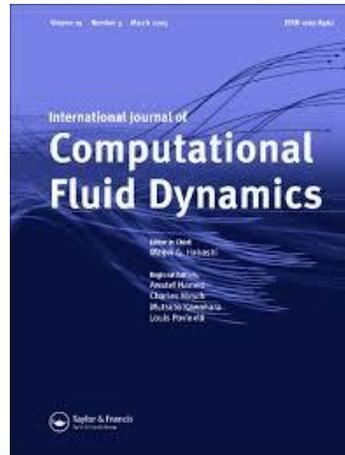
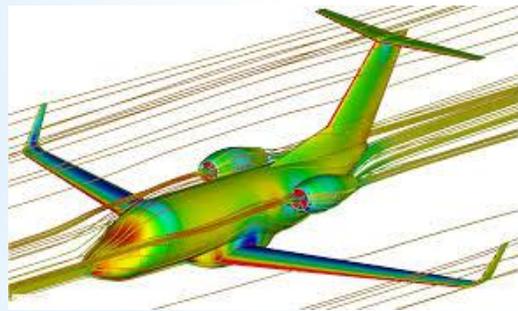
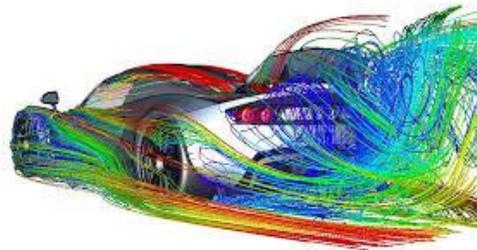
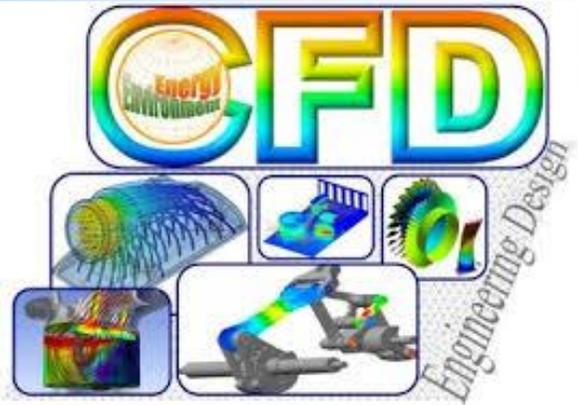
Génie Pétrolier

Génie Nucléaire

Génie des Procédés

Mécanique des fluides/ transfert de chaleur/ transfert de matière

Transport Phenomena



Industrie pharmaceutique



Appli. Aéronavales



Centrale thermique

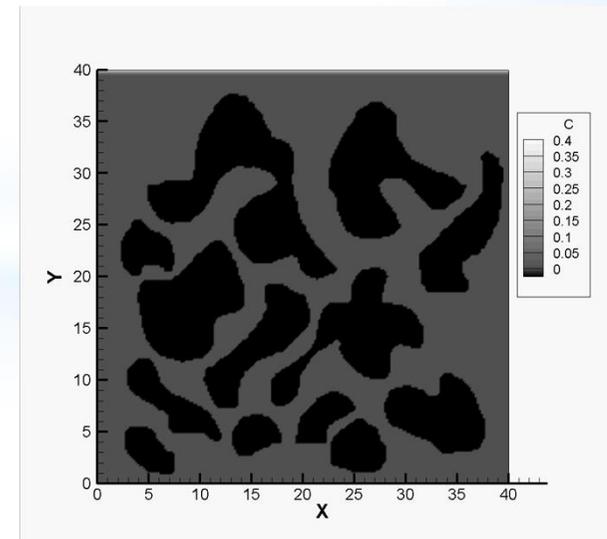
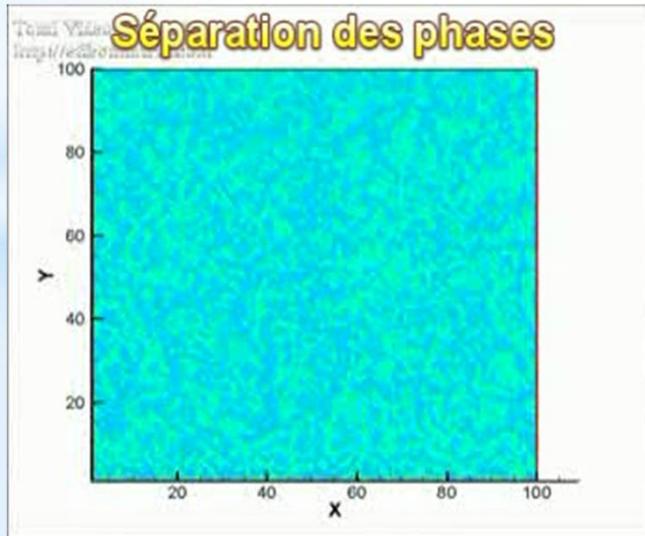
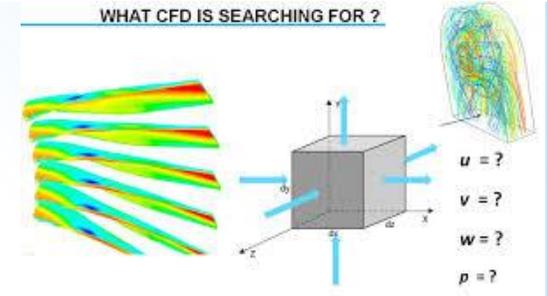


Centrale nucléaire



hydrodynamique

Transport Phenomena



Numerical Analysis: Méthodes Numériques

Pour comprendre ces phénomènes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Étude expérimentale

Modélisation
mathématique

Étude numérique
(solution approché)

recherche à la solution
Analytique (solution exacte)

Approach	Advantages	Disadvantages
Experimental	Capable of being most realistic	Equipment required, Scaling problems, Measurement Difficulty, Operating Cost
Theoretical	General Information in Formula form	Restricted to simple geometry and physics, Usually for Linear problems
Computational	Complicated Physics, Details of Flow	Truncation Errors, Computer Costs, Boundary conditions

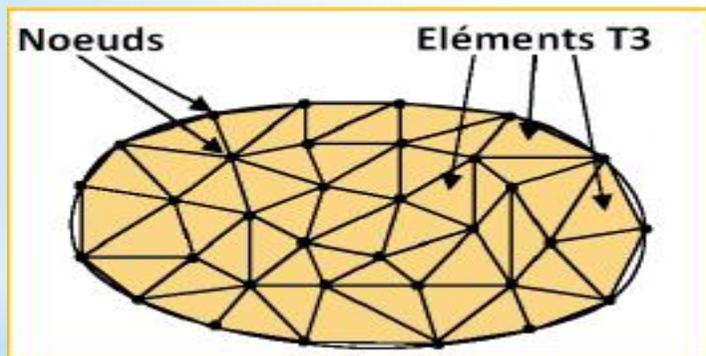
Numerical
Analysis:
Méthodes
Numériques

Numerical Analysis: Méthodes Numériques

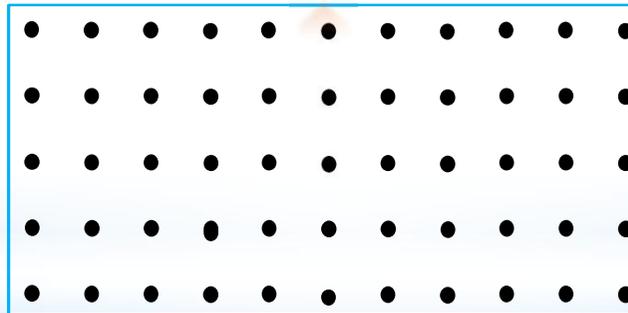
Les méthodes de simulation numérique

Avec maillage

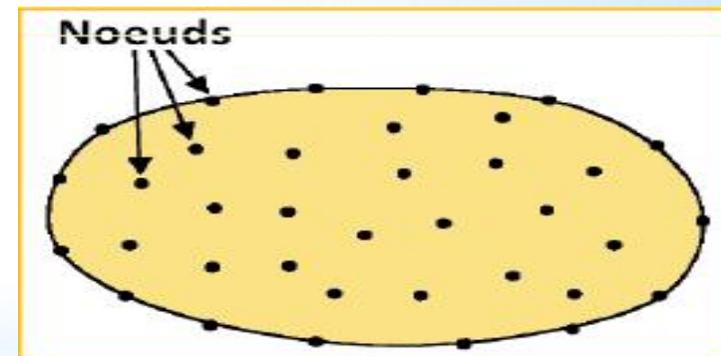
Sans maillage



La géométrie est discrétisée par des éléments.



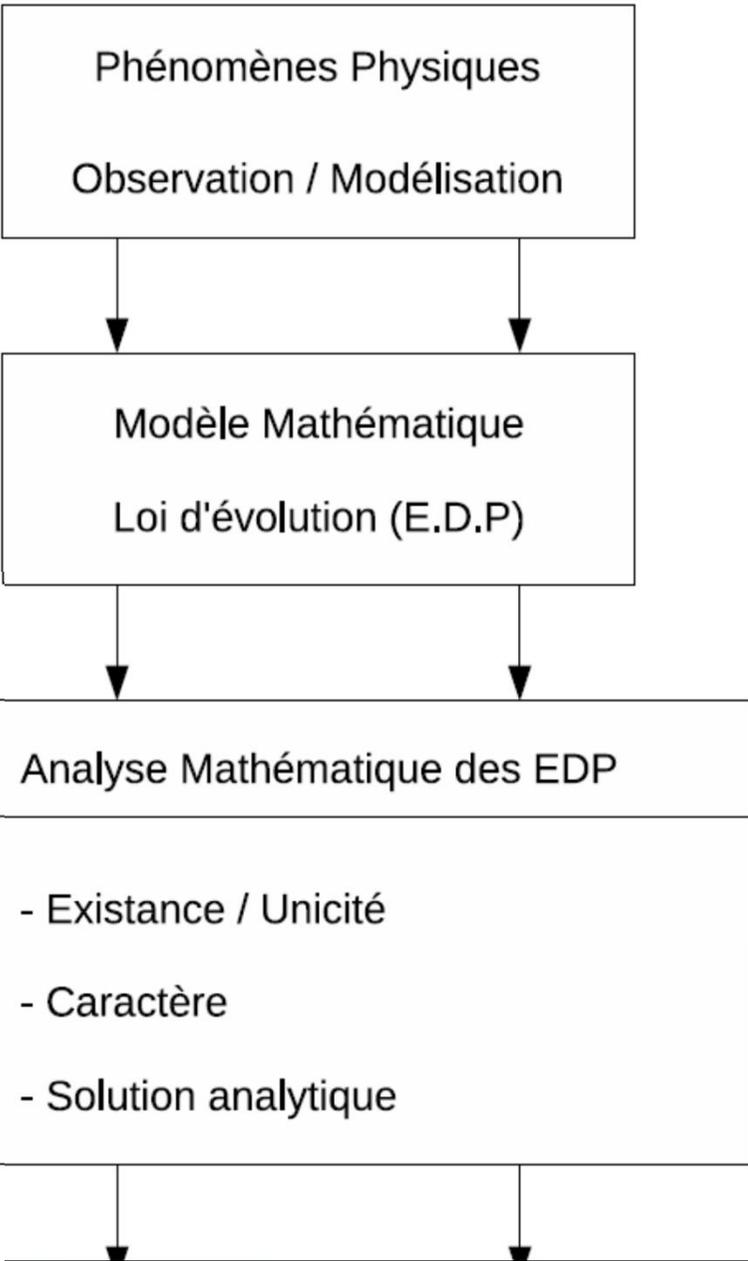
On peut considérer avec maillage et sans maillage au même temps. Dans ces méthodes les noeuds est distribuer d'une façon régulière.



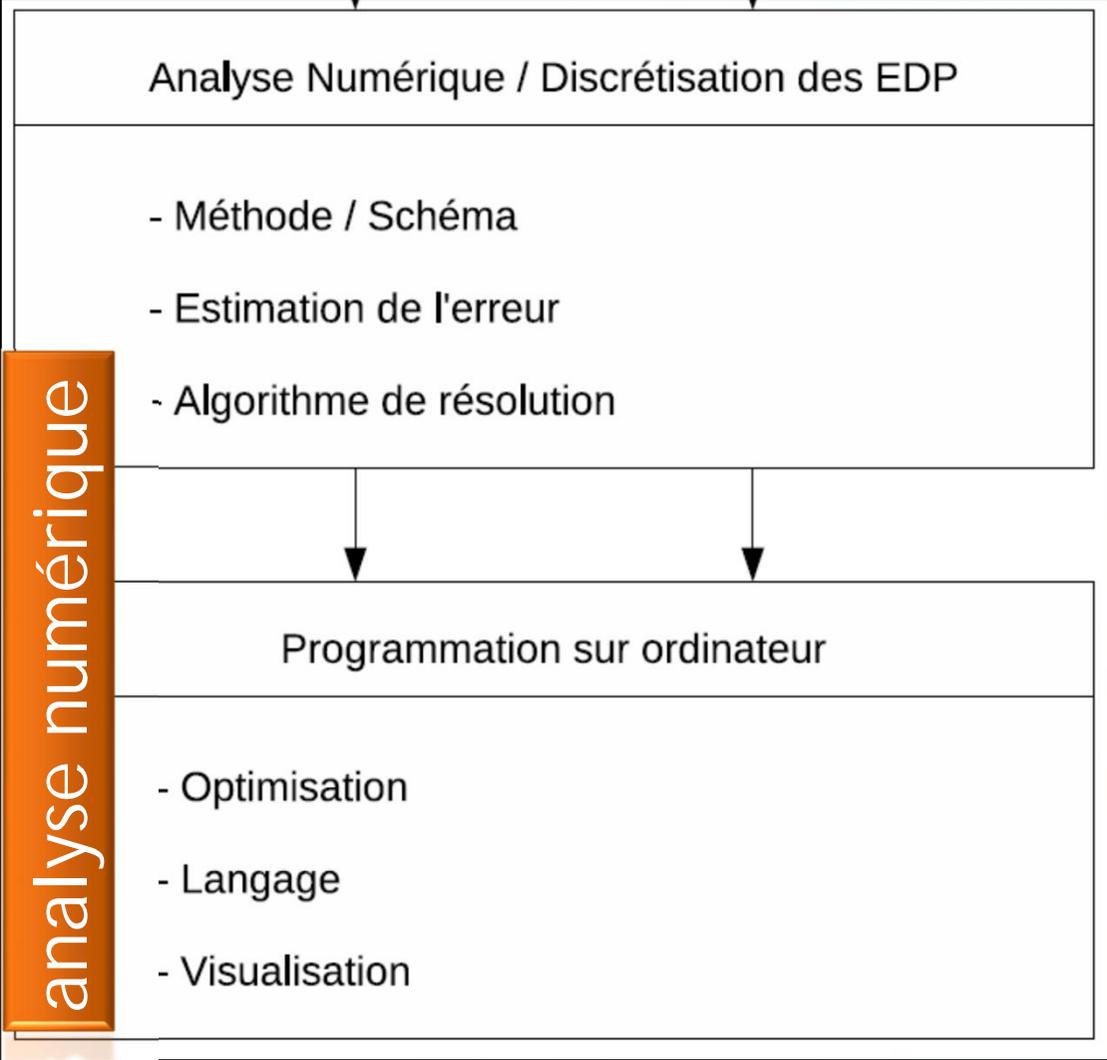
Dans les méthode sans maillage, la géométrie est représentée par des noeuds distribué aléatoirement sur le domaine et son frontière

Analyse analytique vs analyse numérique

Analyse analytique



analyse numérique



Numerical Analysis: Méthodes Numériques

1.2. Avantage des méthodes sans maillage

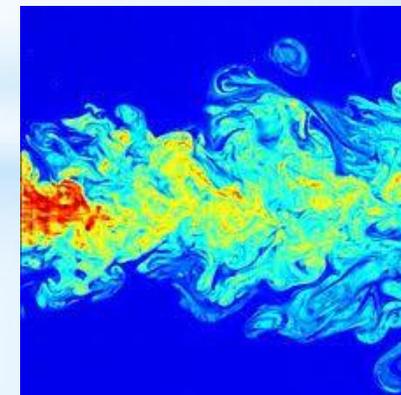
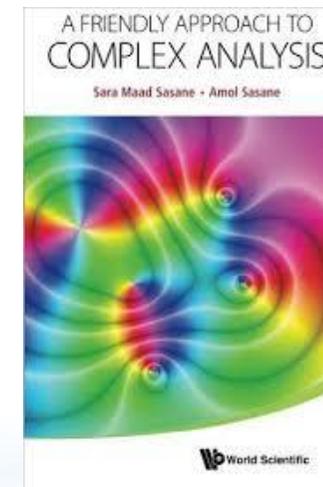
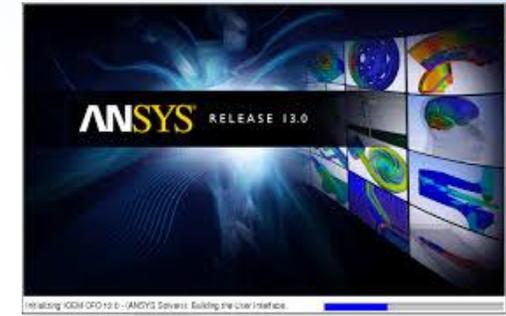
1. Le principal avantage des méthodes sans maillage dans la simulation des procédés est la possibilité de traiter plus facilement les problèmes en grandes transformations que dans les méthodes classiques. Les performances des méthodes meshless sont expliquées par les facteurs suivants :

(a) dans les formulations lagrangiennes, totales, l'opérateur gradient de la transformation calculé en un point d'intégration est construit sur la base d'un voisinage de nœuds généralement plus important que les seuls nœuds de l'élément dans la MEF. Ainsi, la matrice jacobienne associée ne deviendra singulière que pour des distorsions beaucoup plus importantes du voisinage [7].

(b) la qualité de la solution est beaucoup moins sensible à la position relative des nœuds, autorisant, de construire la solution à partir de positions relatives entre les nœuds, ce qui interdites dans les méthodes classique.

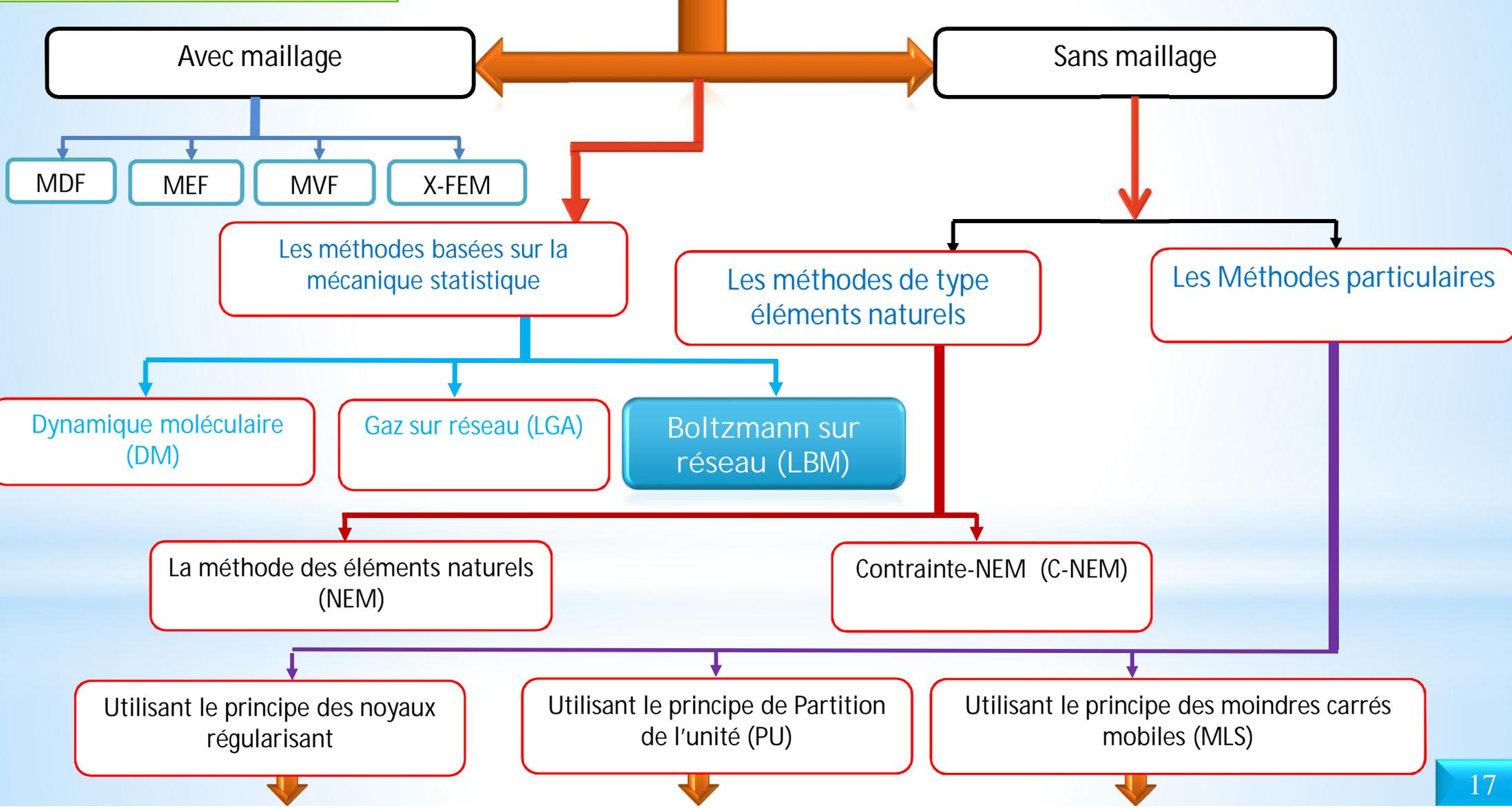
(c) la non-nécessite de construire un maillage pour la construction de l'approximation permet de traiter des domaines de géométries complexes, en 2D et en 3D, en utilisant seulement le nuage de nœuds [8].

2. Un autre avantage majeur des méthodes sans maillage est la possibilité d'insérer, ou de retirer des nœuds très facilement, la position relative des nœuds entre eux étant très peu influente sur la qualité de la solution.

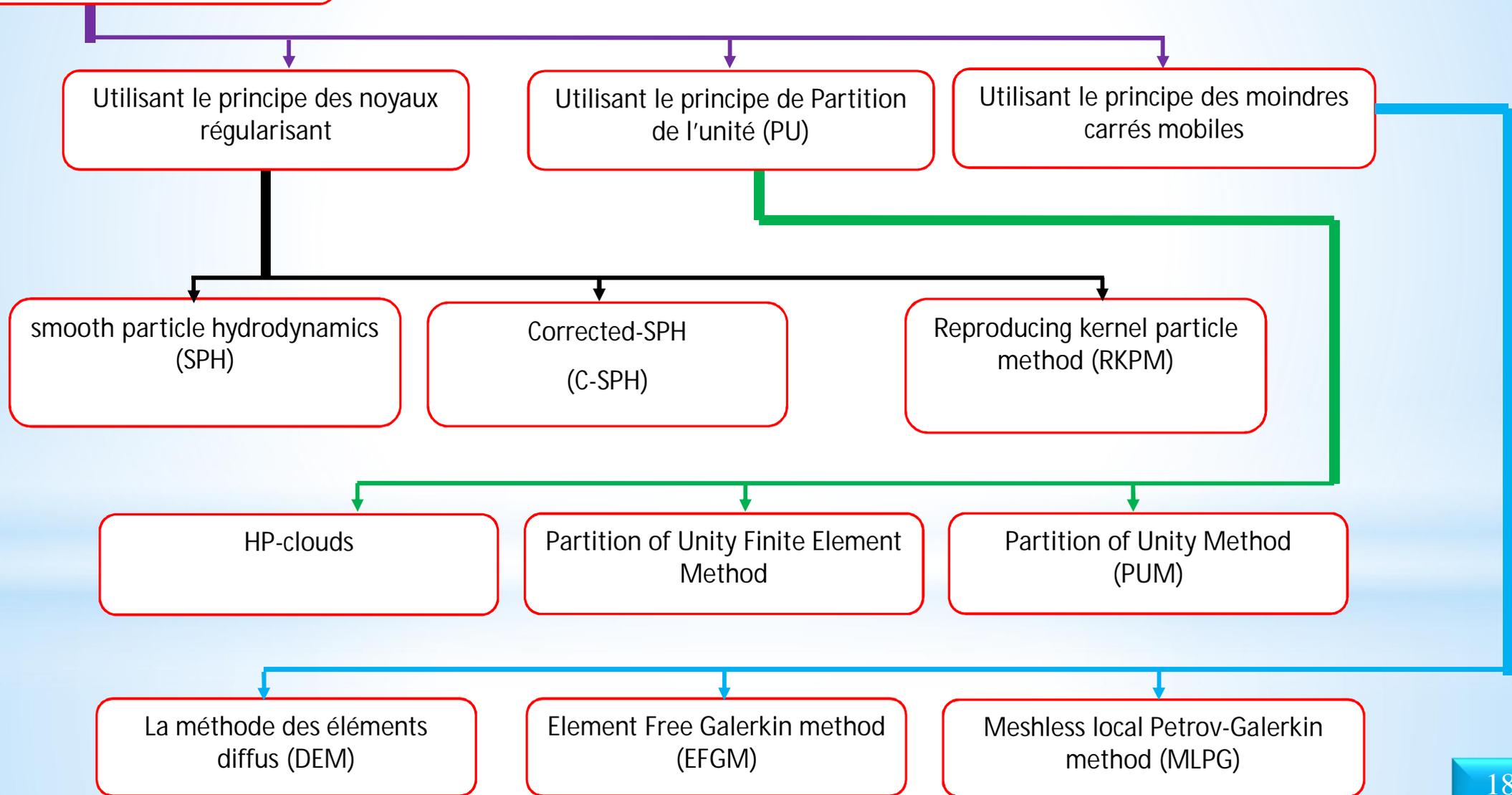


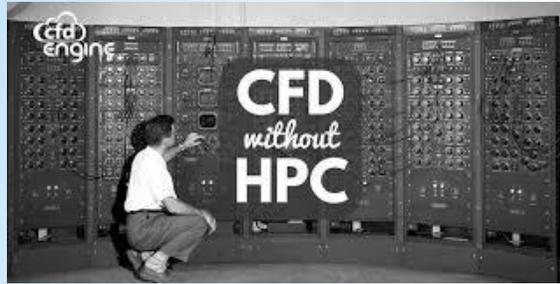
Numerical Analysis

Les méthodes de simulation numérique



Les Méthodes particulières





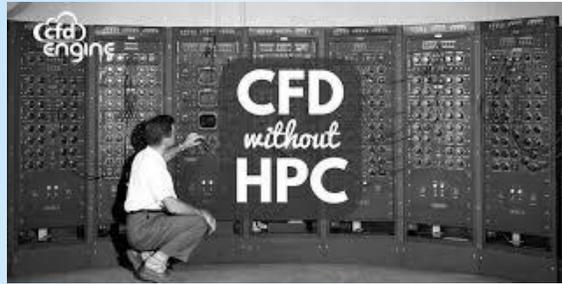
3. Computer Science



Logiciels

- Codes CFD commerciaux: ANSYS FLUENT, ANSYS CFX (www.ansys.com) , Star-CD (www.cd-adapco.com), CFDRC, CFD2000, Comsol Multiphysics (www.comsol.com), etc.
- Codes CFD de recherche: CFDSHIP-IOWA
- Logiciel de domaine public (Open source CFD) : FEATFLOW (www.featflow.de), OpenFOAM (www.openfoam.com), PHI3D, HYDRO & WinpipeD, SU2(su2.stanford.edu), etc.)
- D'autres logiciels CFD comprennent le logiciel de génération de maillage(par exemple Gridgen, Gambit, Gmesh, TGrid) , & le logiciel de visualisation d'écoulement (Tecplot, FieldView, Paraview, GnuPlot)



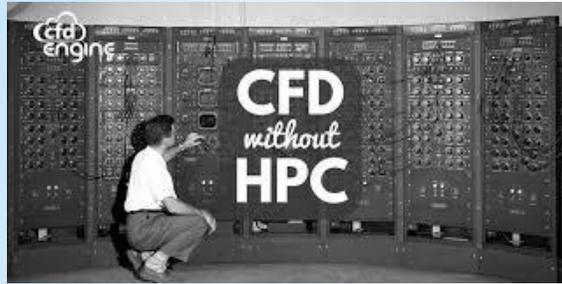


3. Computer Science



Outils de programmation





3. Computer Science



Outils de visualisation



2. Why use CFD ?

2. Why use CFD ?

■ Analyse & Conception

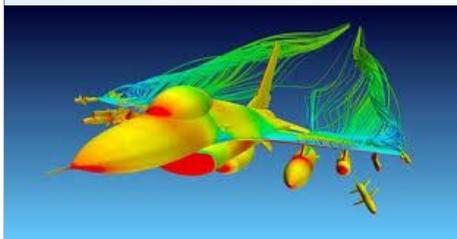
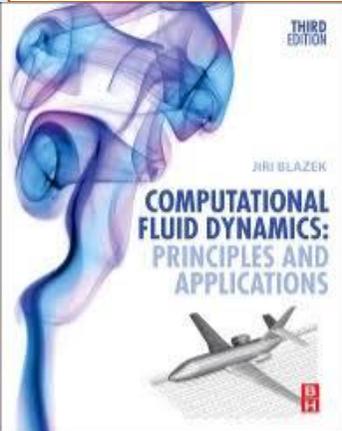
1. Conception basée sur la simulation au lieu de "construire & tester«

- Plus rentable et plus rapide que la EFD
- CFD fournit une base de données haute fidélité pour le diagnostic du champ d'écoulement

2. Simulation de phénomènes d'écoulements physiques difficiles à expérimenter

- Simulations à grande échelle (ex. navires, avions)
- Effets environnementaux (vent, météo, etc.)
- Risques (ex. explosions, rayonnements, pollution)
- Physique (ex. couche limite planétaire, évolution stellaire)

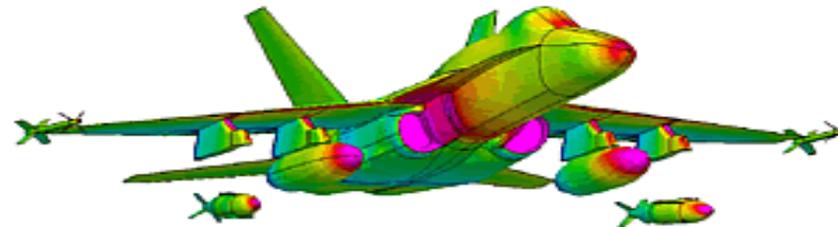
■ Connaissance & exploration de la physique des écoulements



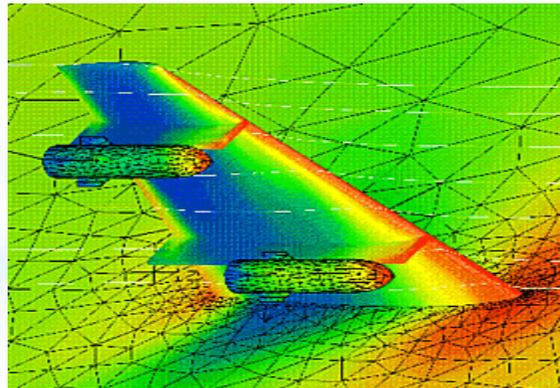
3. Where is CFD used?

Where is CFD used? (Aerospace)

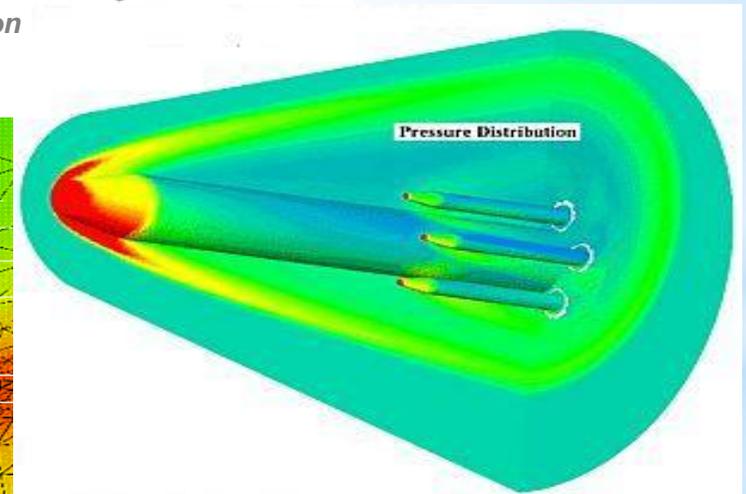
- Where is CFD used?
 - Aerospace
 - Appliances
 - Automotive
 - Biomedical
 - Chemical Processing
 - HVAC&R
 - Hydraulics
 - Marine
 - Oil & Gas
 - Power Generation
 - Sports



F18 Store Separation



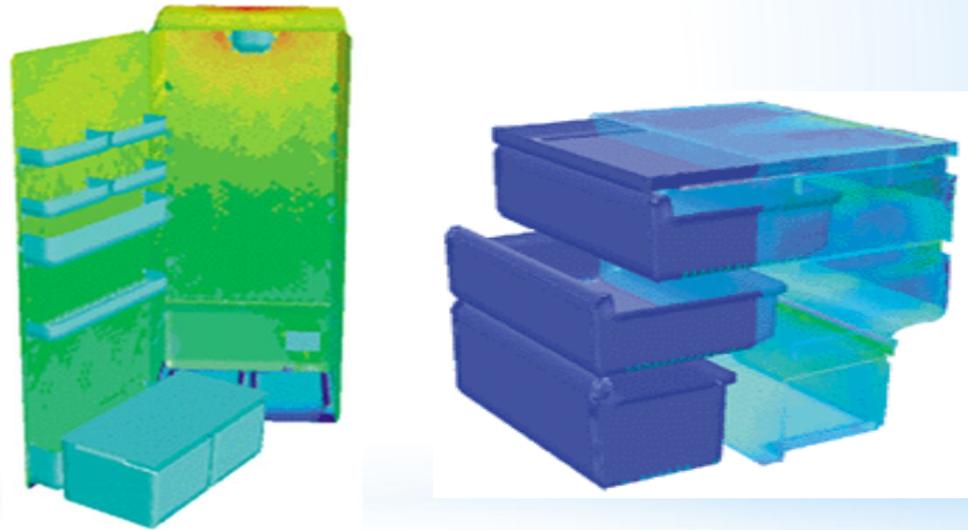
Wing-Body Interaction



Hypersonic Launch Vehicle

Where is CFD used? (Appliances)

- Where is CFD used?
 - [Aerospace](#)
 - [Appliances](#)
 - [Automotive](#)
 - [Biomedical](#)
 - [Chemical Processing](#)
 - [HVAC&R](#)
 - [Hydraulics](#)
 - [Marine](#)
 - [Oil & Gas](#)
 - [Power Generation](#)
 - [Sports](#)

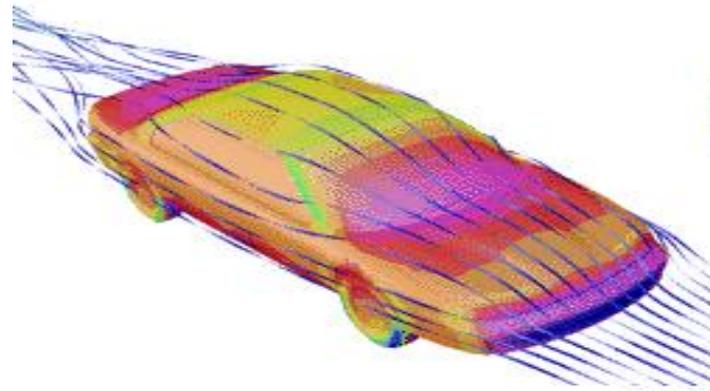


Surface-heat-flux plots of the No-Frost refrigerator and freezer compartments helped BOSCH-SIEMENS engineers to optimize the location of air inlets.

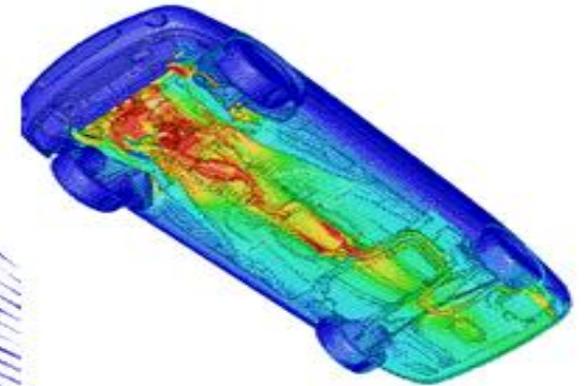
Where is CFD used? (Automotive)

- Where is CFD used?

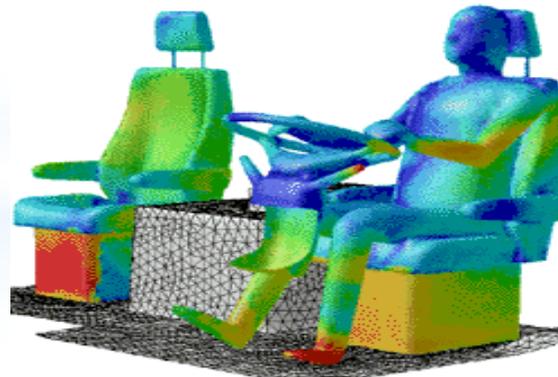
- [Aerospace](#)
- [Appliances](#)
- [Automotive](#)
- [Biomedical](#)
- [Chemical Processing](#)
- [HVAC&R](#)
- [Hydraulics](#)
- [Marine](#)
- [Oil & Gas](#)
- [Power Generation](#)
- [Sports](#)



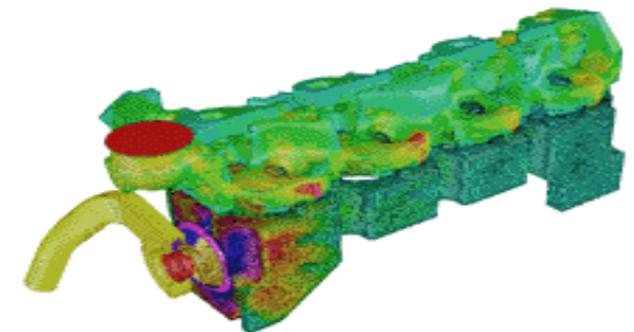
External Aerodynamics



Undercarriage Aerodynamics



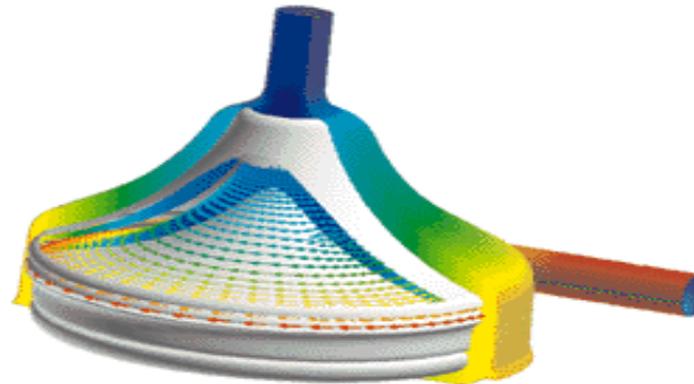
Interior Ventilation



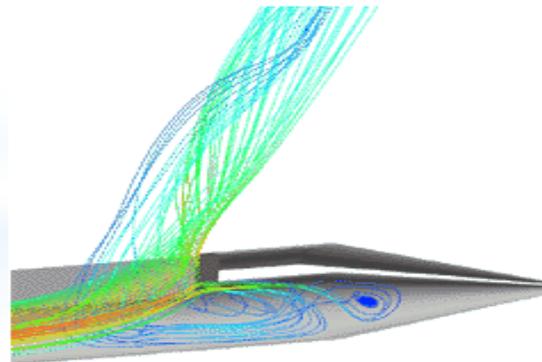
Engine Cooling

Where is CFD used? (Biomedical)

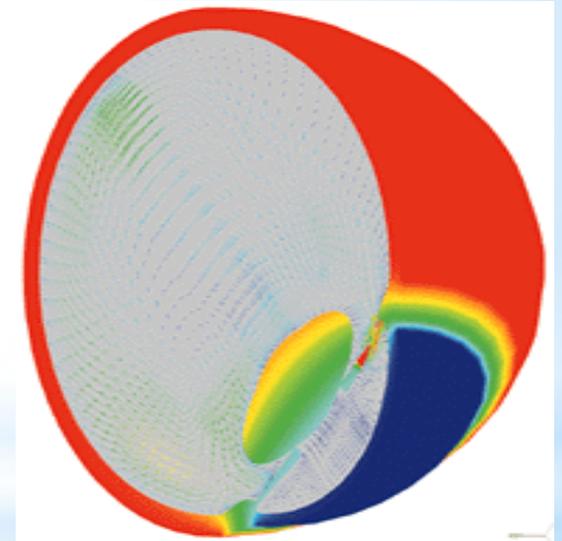
- Where is CFD used?
 - [Aerospace](#)
 - [Appliances](#)
 - [Automotive](#)
 - [Biomedical](#)
 - [Chemical Processing](#)
 - [HVAC&R](#)
 - [Hydraulics](#)
 - [Marine](#)
 - [Oil & Gas](#)
 - [Power Generation](#)
 - [Sports](#)



Medtronic Blood Pump



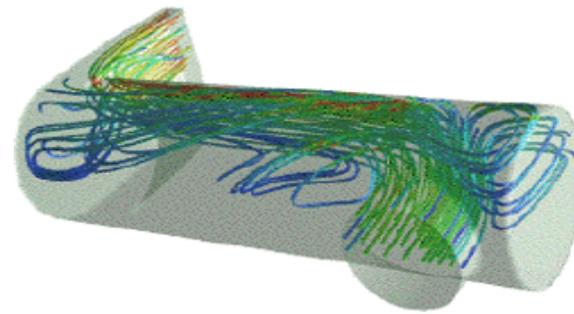
28
Spinal Catheter



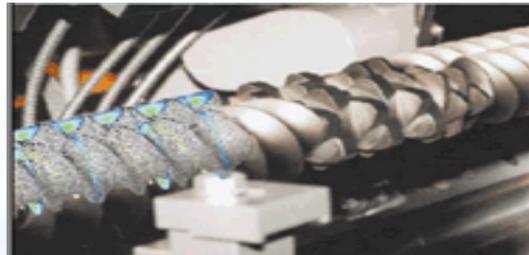
Temperature and natural convection currents in the eye following laser heating.

Where is CFD used? (Chemical Processing)

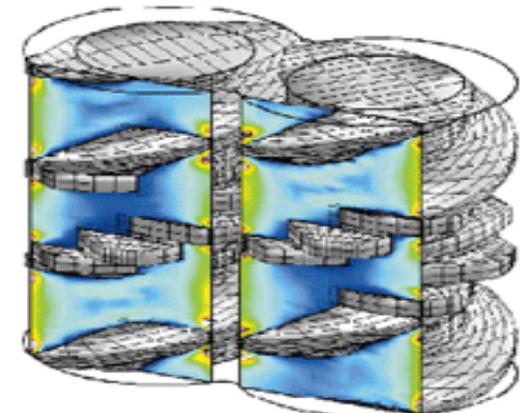
- Where is CFD used?
 - [Aerospace](#)
 - [Appliances](#)
 - [Automotive](#)
 - [Biomedical](#)
 - [Chemical Processing](#)
 - [HVAC&R](#)
 - [Hydraulics](#)
 - [Marine](#)
 - [Oil & Gas](#)
 - [Power Generation](#)
 - [Sports](#)



Polymerization reactor vessel - prediction of flow separation and residence time effects.



Twin-screw extruder modeling

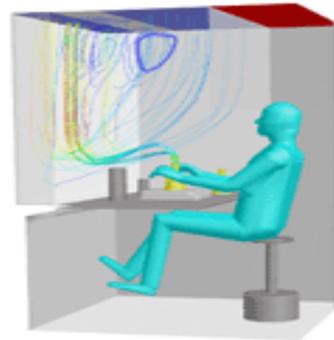


Shear rate distribution in twin-screw extruder simulation

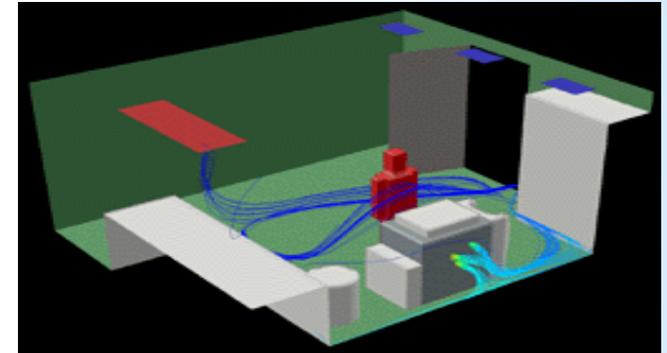
Where is CFD used? (HVAC&R)

- Where is CFD used?

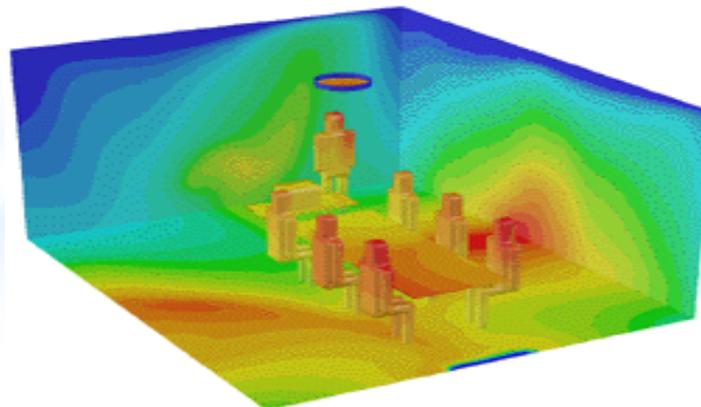
- [Aerospace](#)
- [Appliances](#)
- [Automotive](#)
- [Biomedical](#)
- [Chemical Processing](#)
- [HVAC&R](#)
- [Hydraulics](#)
- [Marine](#)
- [Oil & Gas](#)
- [Power Generation](#)
- [Sports](#)



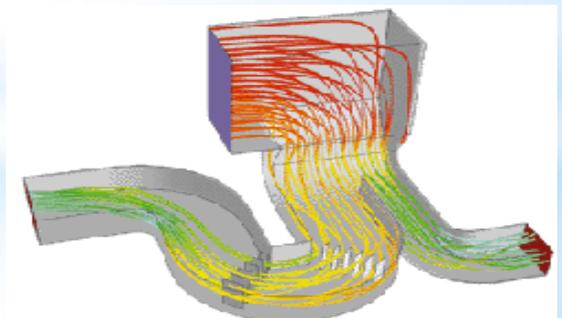
Streamlines for workstation ventilation



Particle traces of copier VOC emissions colored by concentration level fall behind the copier and then circulate through the room before exiting the exhaust.



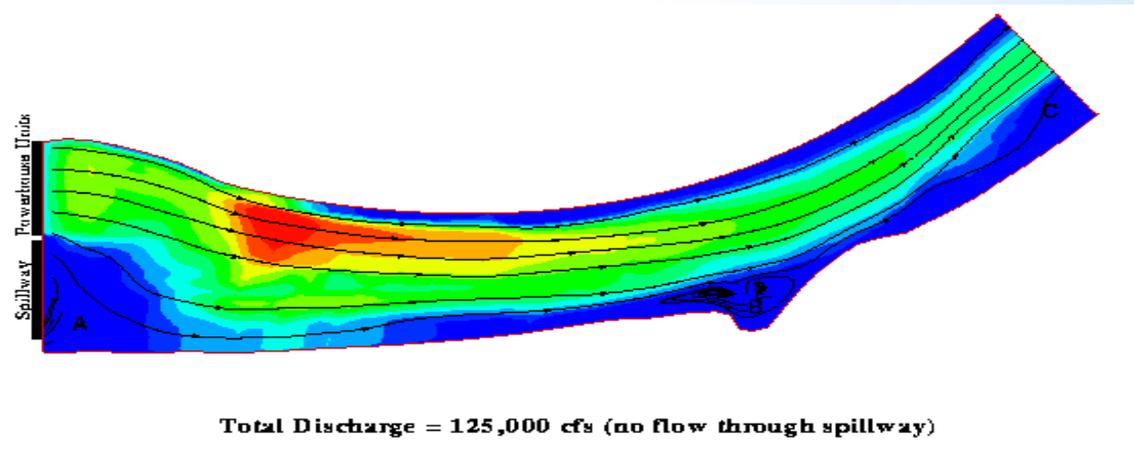
Mean age of air contours indicate location of fresh supply air



Flow pathlines colored by pressure quantify head loss in ductwork

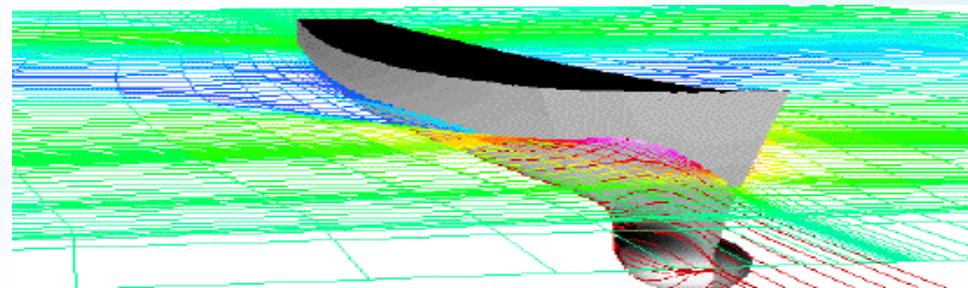
Where is CFD used? (Hydraulics)

- Where is CFD used?
 - [Aerospace](#)
 - [Appliances](#)
 - [Automotive](#)
 - [Biomedical](#)
 - [Chemical Processing](#)
 - [HVAC&R](#)
 - [Hydraulics](#)
 - [Marine](#)
 - [Oil & Gas](#)
 - [Power Generation](#)
 - [Sports](#)



Where is CFD used? (Marine)

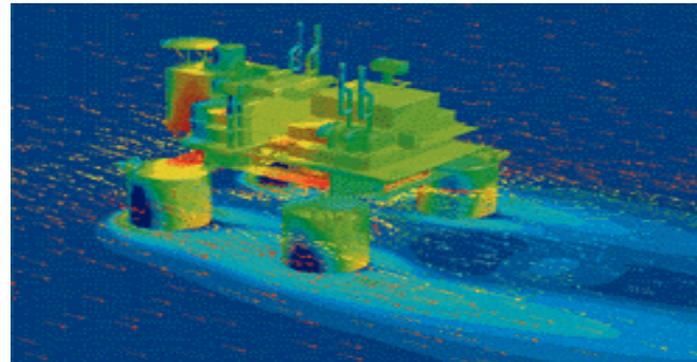
- Where is CFD used?
 - [Aerospace](#)
 - [Appliances](#)
 - [Automotive](#)
 - [Biomedical](#)
 - [Chemical Processing](#)
 - [HVAC&R](#)
 - [Hydraulics](#)
 - [Marine](#)
 - [Oil & Gas](#)
 - [Power Generation](#)
 - [Sports](#)



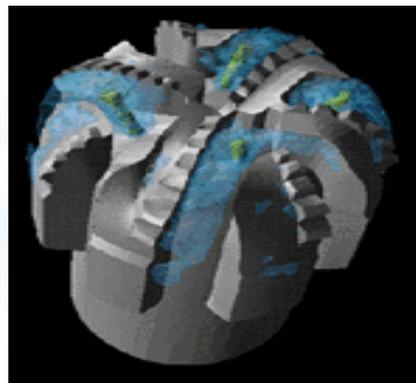
Where is CFD used? (Oil & Gas)

- Where is CFD used?

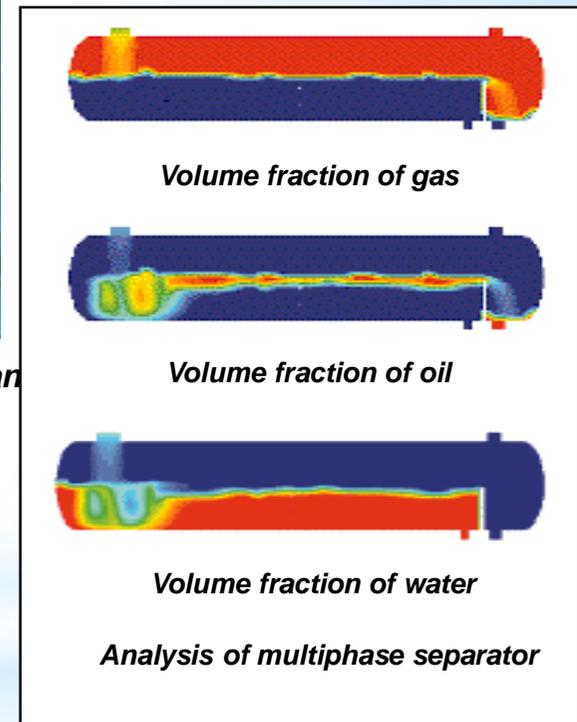
- [Aerospace](#)
- [Appliances](#)
- [Automotive](#)
- [Biomedical](#)
- [Chemical Processing](#)
- [HVAC&R](#)
- [Hydraulics](#)
- [Marine](#)
- [Oil & Gas](#)
- [Power Generation](#)
- [Sports](#)



Flow vectors and pressure distribution on an offshore oil rig



Flow of lubricating mud over drill bit



Volume fraction of gas

Volume fraction of oil

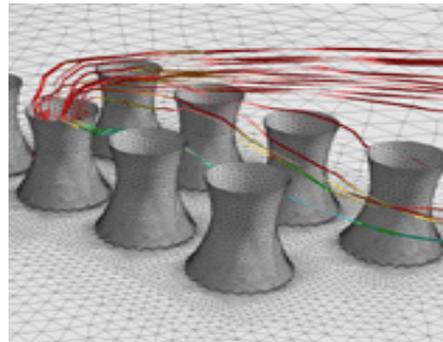
Volume fraction of water

Analysis of multiphase separator

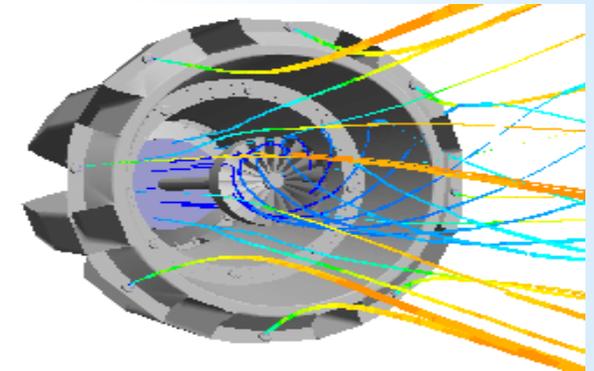
Where is CFD used? (Power Generation)

- Where is CFD used?

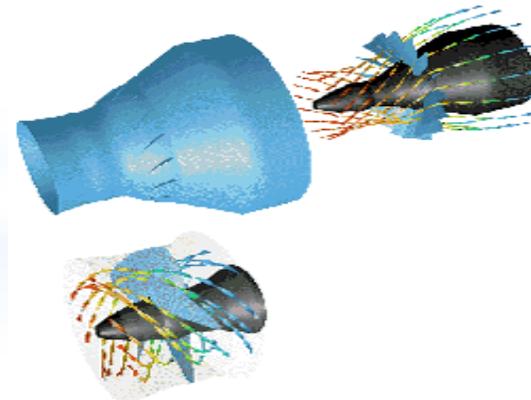
- [Aerospace](#)
- [Appliances](#)
- [Automotive](#)
- [Biomedical](#)
- [Chemical Processing](#)
- [HVAC&R](#)
- [Hydraulics](#)
- [Marine](#)
- [Oil & Gas](#)
- [Power Generation](#)
- [Sports](#)



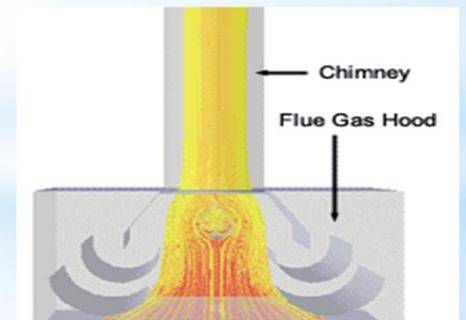
Flow around cooling towers



Flow in a burner



Flow pattern through a water turbine.

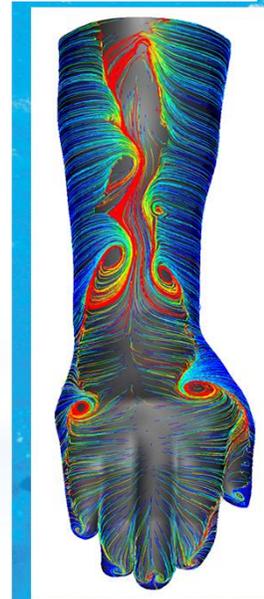
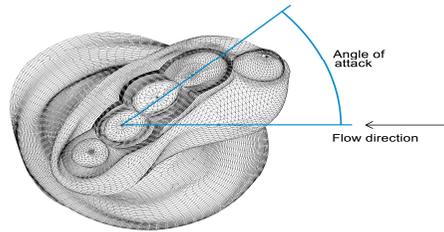


Pathlines from the inlet colored by temperature during standard operating conditions

Where is CFD used? (Sports)

- Where is CFD used?

- [Aerospace](#)
- [Appliances](#)
- [Automotive](#)
- [Biomedical](#)
- [Chemical Processing](#)
- [HVAC&R](#)
- [Hydraulics](#)
- [Marine](#)
- [Oil & Gas](#)
- [Power Generation](#)
- [Sports](#)



4. CFD steps

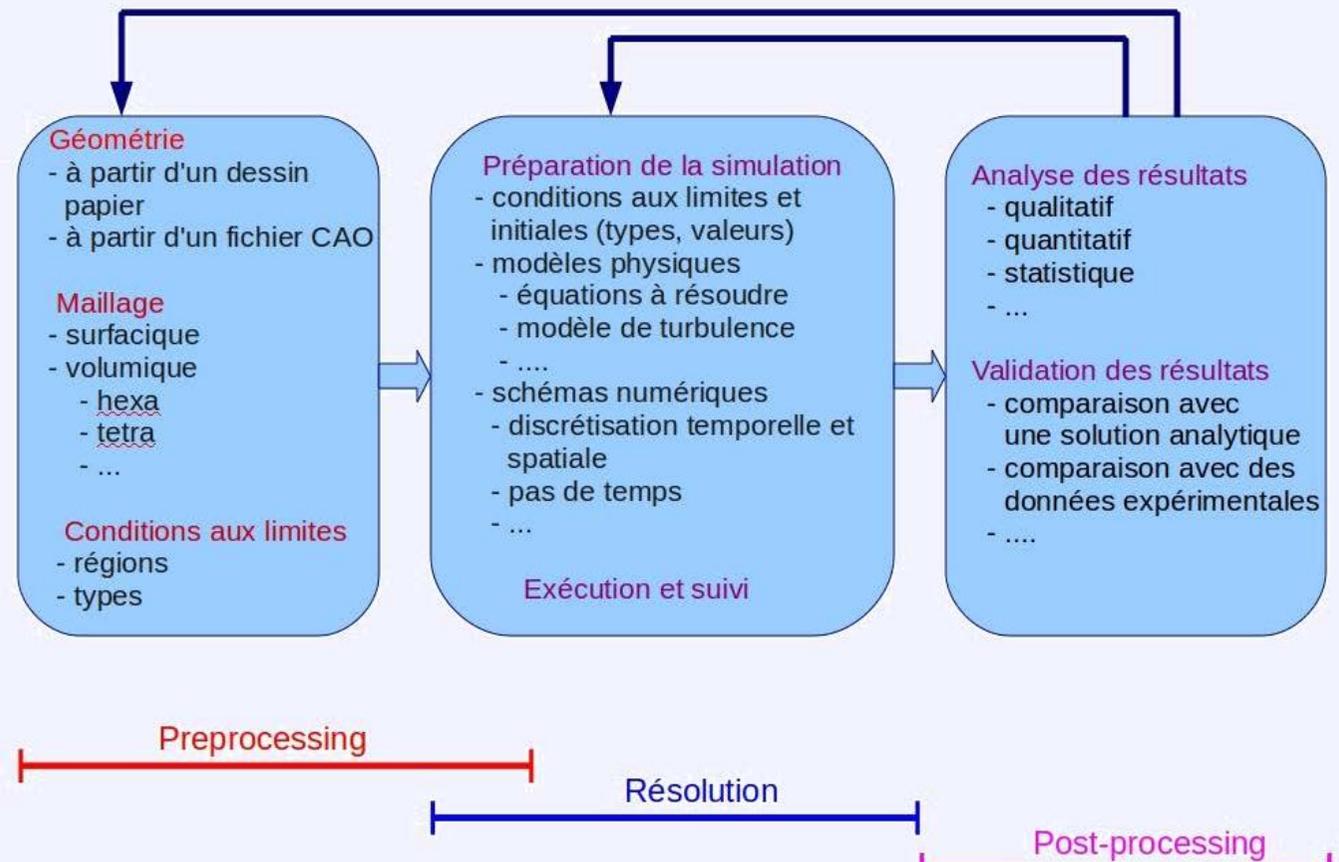
4. CFD steps

Mécanique des Fluides Numérique Computational Fluid Dynamics - méthodologie

- Résolution numérique des problèmes de la Mécanique des Fluides
- Grandes étapes :
 - Problème physique continu est décrit par un modèle mathématique continue (mis en équations)
 - Modèle mathématique continu est discrétisé en s'appuyant sur une(des) méthode(s) numérique(s)
 - Equations discrétisées sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établie
 - Algorithme est codé (C, Fortan, Matlab, Java,...)
 - Code est exécuté sur un ordinateur
 - Si tout va bien, la solution approchée du problème initial est obtenue

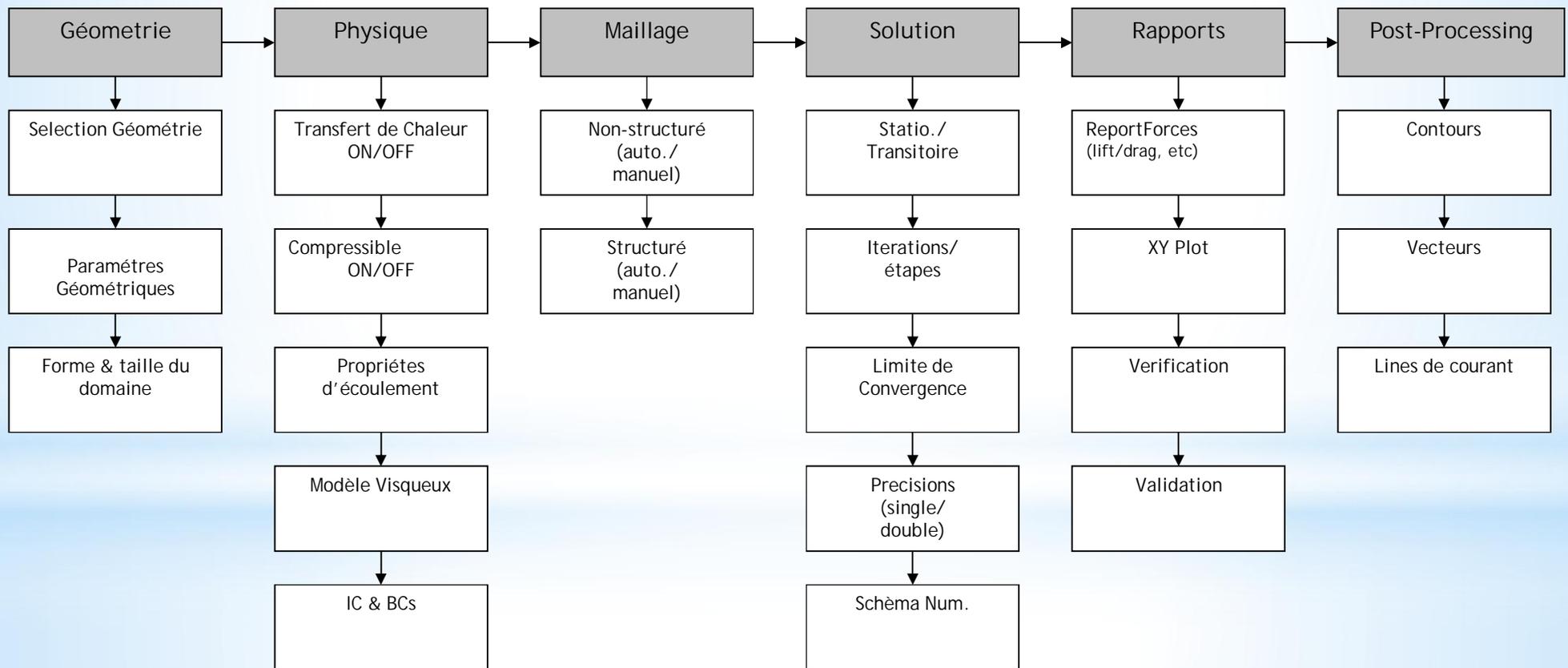
4. CFD steps

Processus de la CFD industrielle : étapes typiques



4. CFD steps

EXEMPLE DE PROCESSUS CFD



4. CFD steps

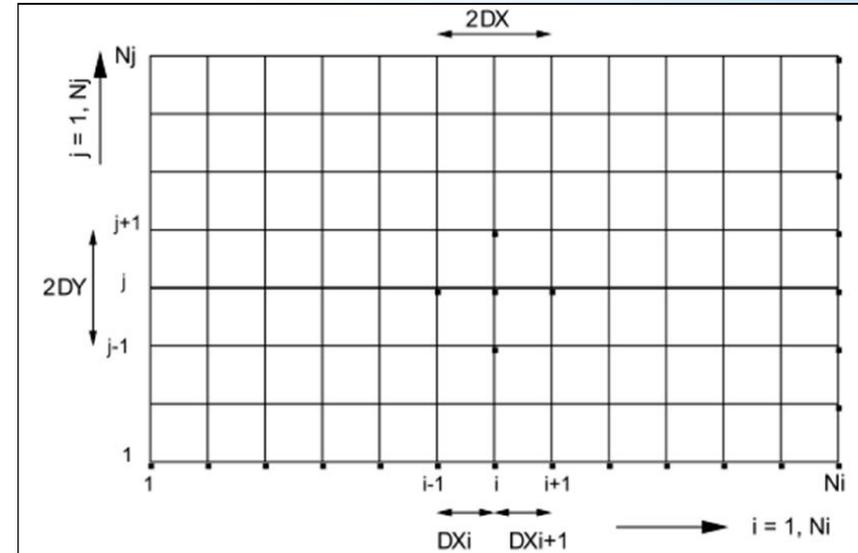
Pre - Processing

- ① Géométrie et domaine de calcul
- ② Génération de maillage :
 - plus de 50% du temps sont consacrés à la définition du maillage
- ③ Sélection du phénomène à modéliser (fluide visqueux ou non visqueux, laminaire ou turbulent, compressible ou incompressible, écoulement stationnaire ou instationnaire)
- ④ Propriétés physiques du fluide (densité, viscosité)
- ⑤ Conditions aux limites
- ⑥ Conditions initiales

Géométrie + maillage

Maillage structuré

Avant de commencer la résolution des problèmes de type numérique, il faut trouver un moyen qui nous permettra de localiser spatialement et temporellement tous les points de la solution numérique. C'est ce qu'on va appeler création de la grille de calcul « **Maillage** ». Dans la suite, on va raisonner sur un espace plan (2D) et l'extension pour le 3D sera faite de manière intuitive. La Figure suivante représente la manière la plus directe pour repérer les points suivant **la procédure structurée**. C'est un peu comme une matrice, chaque point sera affecté de deux indexes **(i,j)** qui le positionneront par rapport à ces voisins. Soit **U**, la variable à calculer. Sa valeur aux différents points de la grille s'écrit de la manière suivante :



Grille de calcul structurée 2D.

$$U_{i+1,j} = U(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$U_{i-1,j} = U(x_0 - \Delta x, y_0)$$

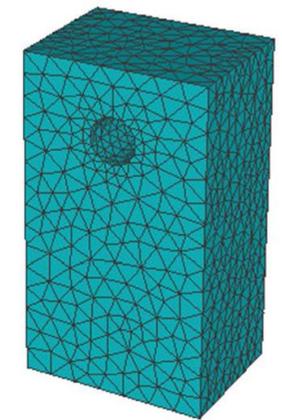
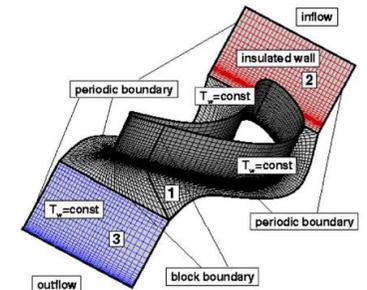
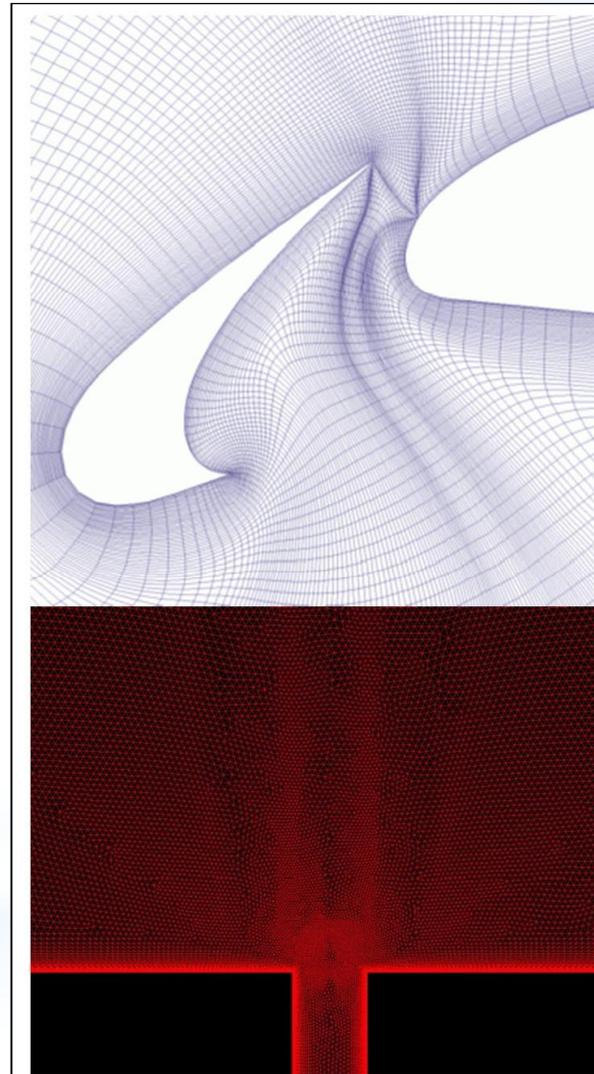
$$U_{i,j+1} = U(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$U_{i,j-1} = U(x_0, y_0 - \Delta y)$$

Géométrie + maillage

Maillage non structuré

Maillage non-structuré : L'autre façon de mailler un domaine de calcul est de définir un nuage de points, pas nécessairement structuré. Dans ce cas-là, il faudra numéroter les points de calcul un par un. Chaque point aura ces coordonnées x et y . En plus il faudra relier ces points entre eux de façon à créer des éléments (généralement des triangles, voir Figure 1). Le fichier de la grille de calcul sera compléter par une liste des éléments (eux-mêmes numéroter) et les points composants chaque élément.



An example of an unstructured mesh consisting of triangle and tetrahedral elements.

Maillage structuré .vs Maillage non structuré

Maillages structurés

Avantages

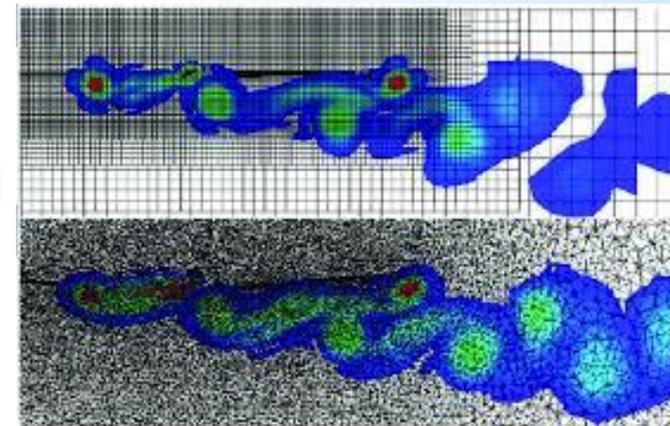
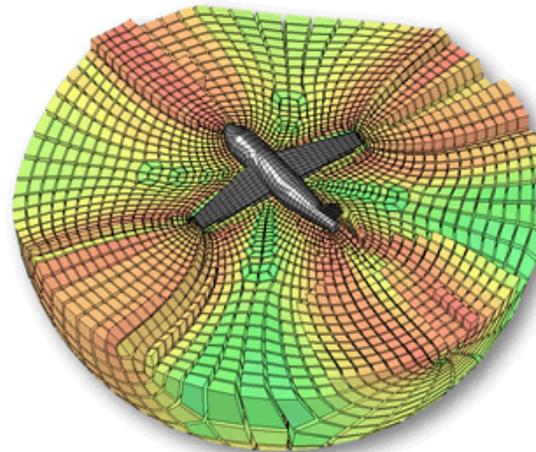
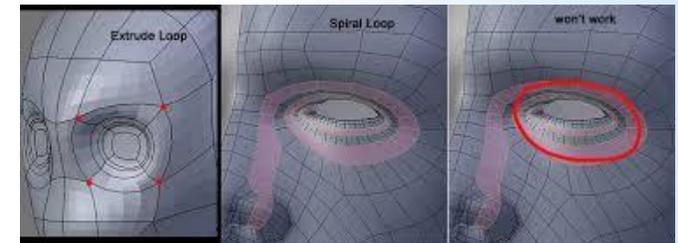
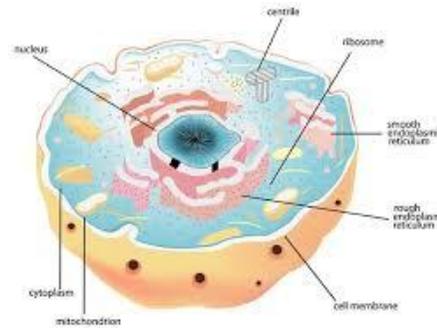
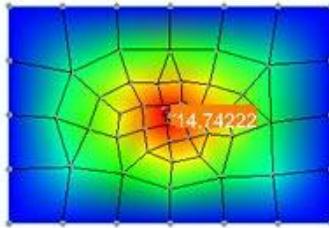
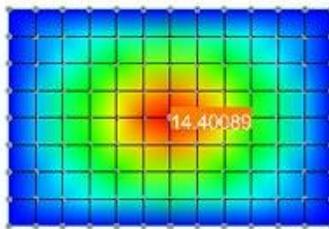
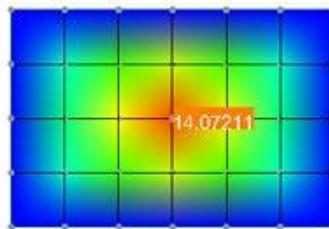
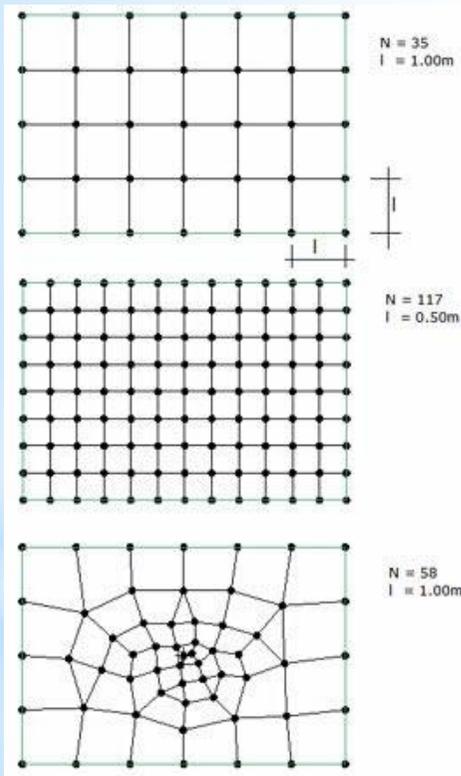
- Leur description est légère, avec un petit nombre de paramètres, il est possible de définir un maillage entier.
- Leur modification est très aisée, d'une part par le peu de paramètres à modifier, et d'autre part par la possibilité d'utiliser des algorithmes de projection. Par exemple AIRBUS peut réutiliser un maillage d'A320 sur tous les autres avions de sa gamme biréacteurs grâce à la grande similitude dans leur forme géométrique. Cette opération peut être partiellement automatisée, ce qui procure un gros gain de temps.
- L'opérateur a le contrôle total de la qualité du maillage, contrairement aux maillages non structurés plus dépendants de l'algorithme de maillage. Il est donc plus facile de faire varier la densité du nombre de mailles selon les phénomènes physiques observés.
- Les calculs sont généralement plus rapides dans un maillage structuré que dans un maillage non structuré.

Inconvénients

- L'expertise humaine est nécessaire. Un maillage structuré doit répondre à un cahier des charges précis. L'exemple de la jonction en T montre qu'il n'est pas facile d'obtenir un résultat satisfaisant.
- Sa mise en oeuvre est difficile pour les géométries complexes.

Maillage structuré .vs Maillage non structuré

Parfois il est difficile de générer un Maillages Structurés



Maillage structuré .vs Maillage non structuré

Maillages non structurés

Avantages

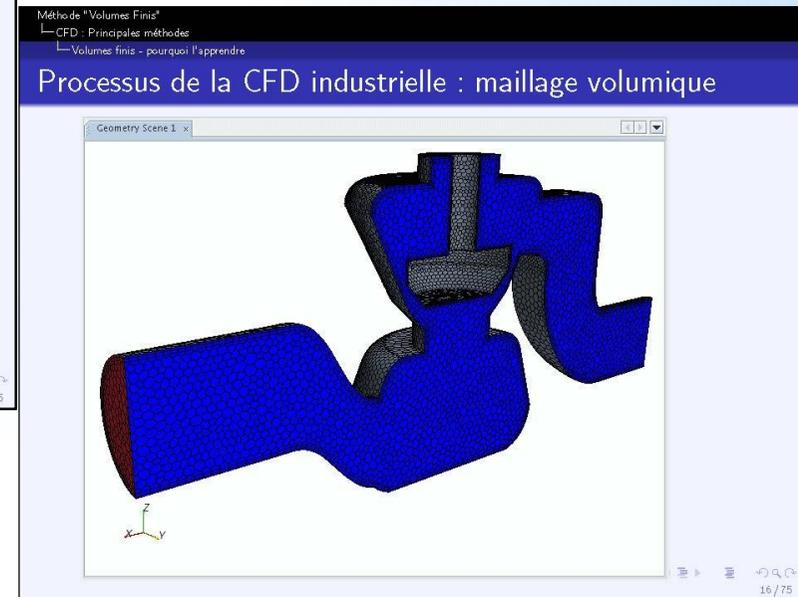
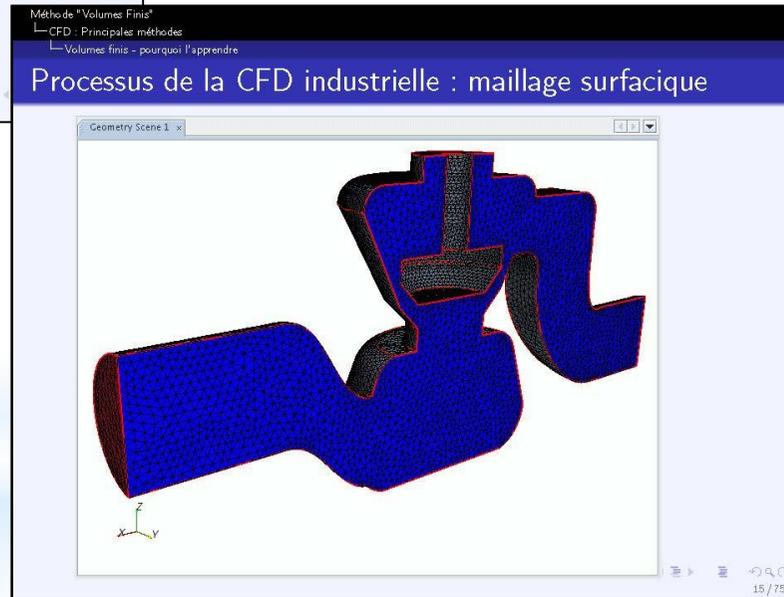
- Leur génération est plus automatique. **SALOME** est un outil très efficace pour cet usage.
 - Ils sont adaptés aux formes complexes sans que l'opérateur n'aie à trop intervenir.
- Ils nécessitent moins de points par rapport aux maillages structurés

Inconvénients

- Ils augmentent les erreurs, au moins localement.
- Le temps de calcul est en général plus long et il est plus difficile de stocker les données de calcul.
- Il est difficile de contrôler localement la densité des mailles.

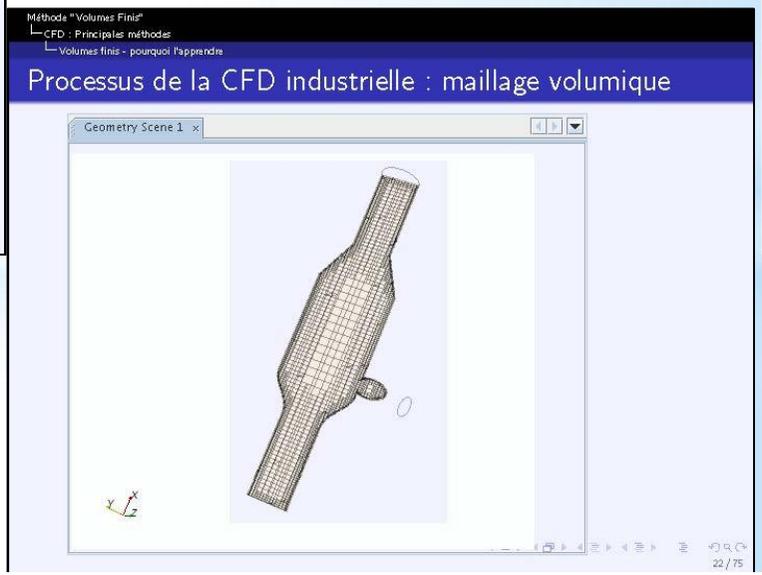
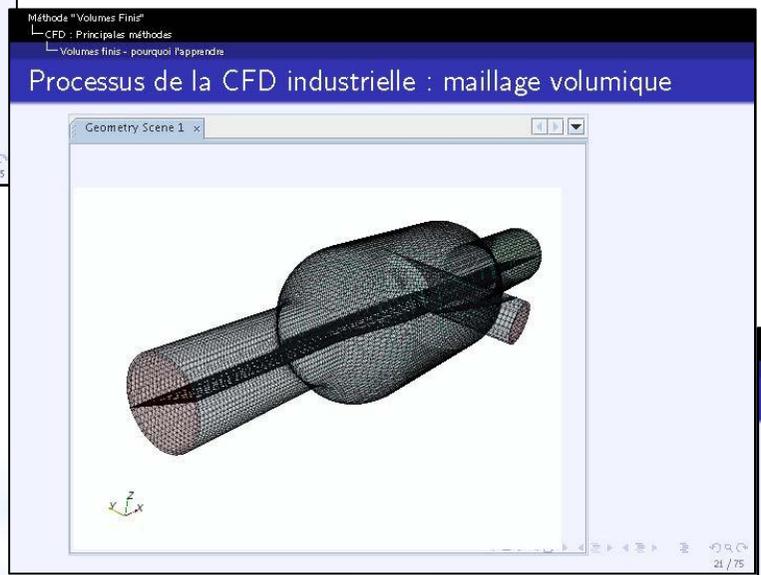
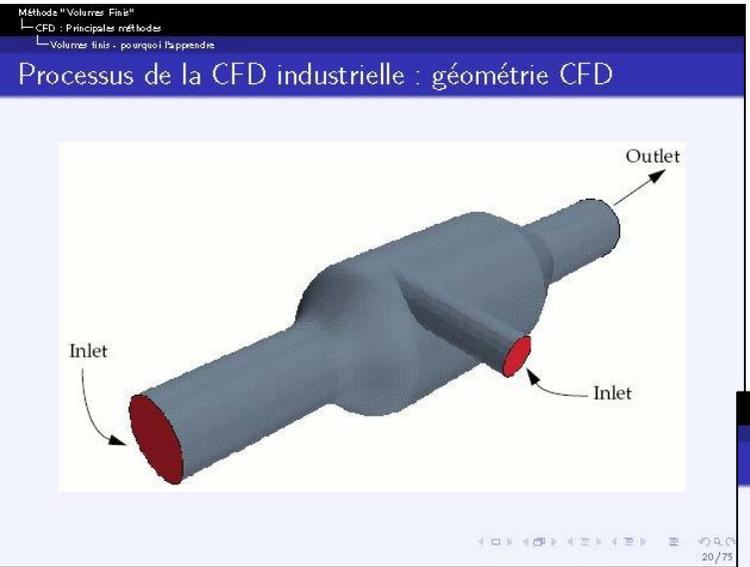
4. CFD steps

Géométrie + maillage



4. CFD steps

Géométrie + maillage



1.4 Différents types de conditions aux limites (C.L)

1.4.1 Conditions de Dirichlet (ou 1^{er} type)

Dans ce cas, la valeur de la variable dépendante est spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\phi(r) = p(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

r étant la variable indiquant la position et S la frontière du domaine.

1.4.2 Conditions de Neumann (ou 2^{ème} type)

Dans ce cas, le gradient normal de la variable dépendante est spécifié le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial\phi(r)}{\partial n} = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial\phi(r)}{\partial n} = q(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

$\frac{\partial\phi(r)}{\partial n}$ étant la dérivée normale de ϕ le long de la frontière S du domaine.

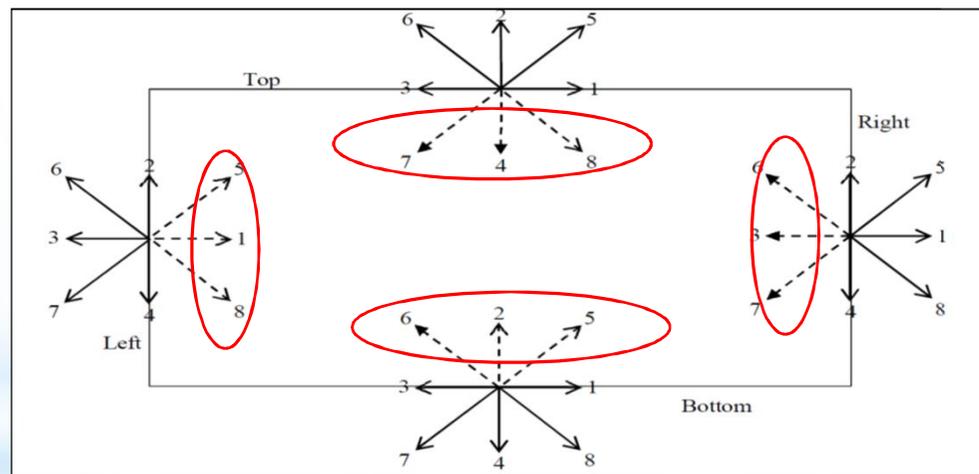
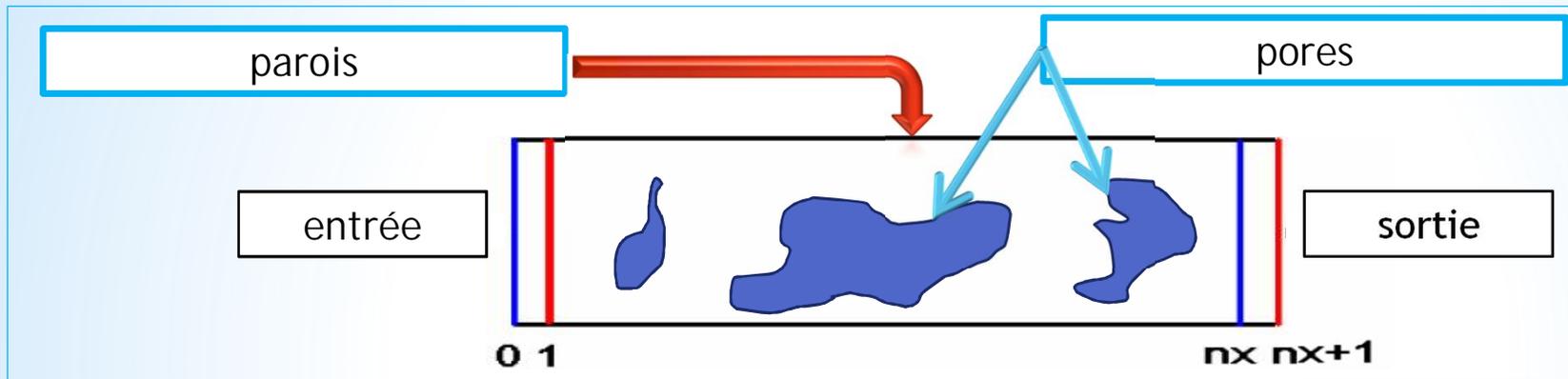
1.4.3 Conditions mixtes (ou 3^{ème} type)

Dans ce cas, une combinaison des deux C.L précédentes spécifiée le long de la frontière du domaine.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = 0, \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition homogène.}$$

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r) \phi(r) = w(r), \quad r \text{ sur } S \quad \text{condition non homogène.}$$

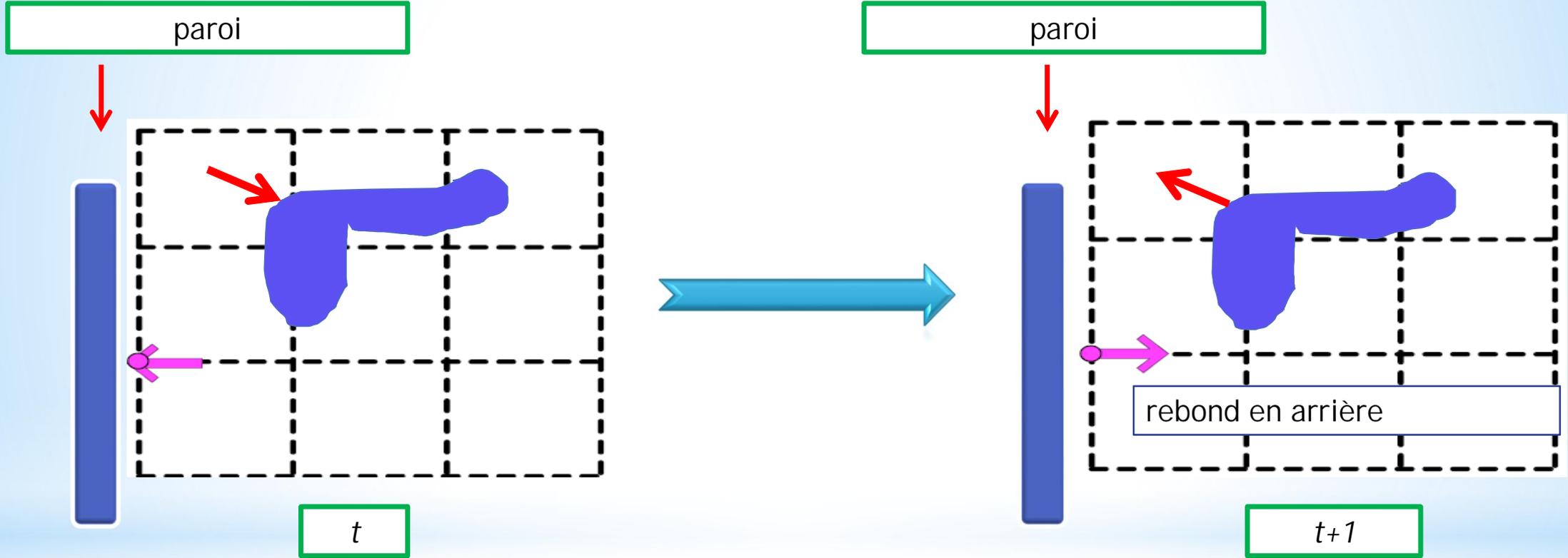
Conditions aux limites



--- : qui entre dans le domaine de calcul (Fonctions de distributions inconnues)

— : qui sort du domaine de calcul (Fonctions de distributions connues d'après l'étape de calcul précédente)

1. Conditions aux limites de rebond en arrière (bounce -back)



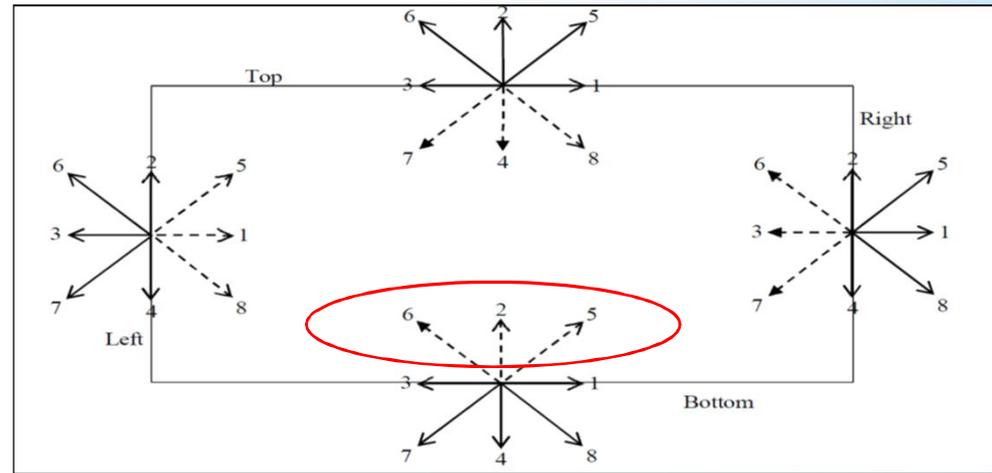
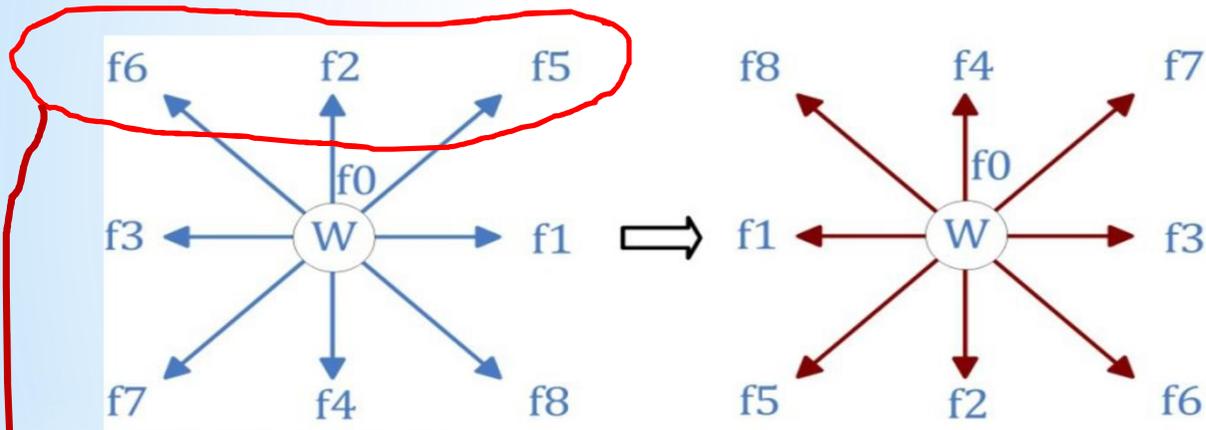
rebond en arrière

$$f_i(x, t) = f_{opp(i)}(x, t)$$

1. Conditions aux limites de rebond en arrière (bounce -back)

rebond en arrière

$$f_i(x, t) = f_{opp(i)}(x, t)$$



Fonctions inconnues

$$f_5(x, y) = f_7(x, y)$$

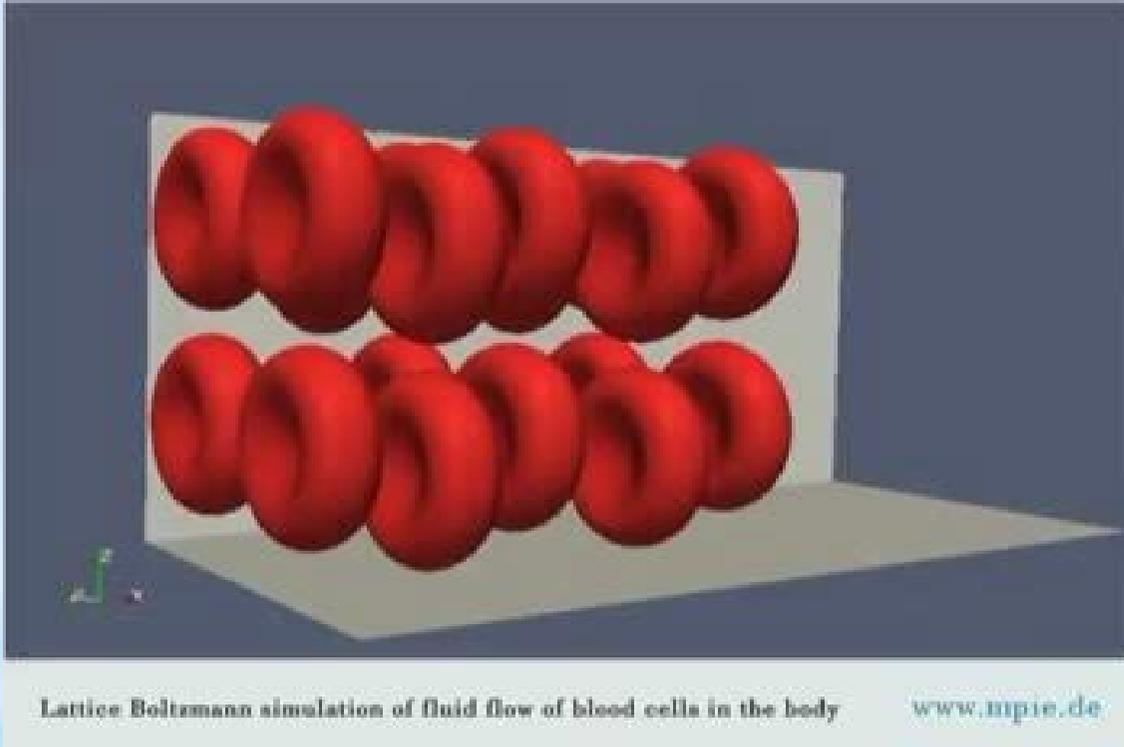
$$f_2(x, y) = f_4(x, y)$$

$$f_6(x, y) = f_8(x, y)$$

2. Conditions aux limites périodiques

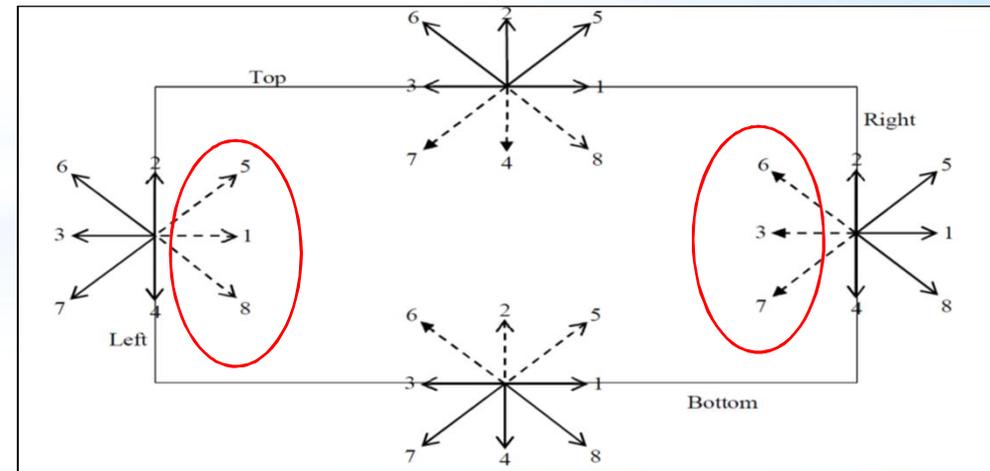
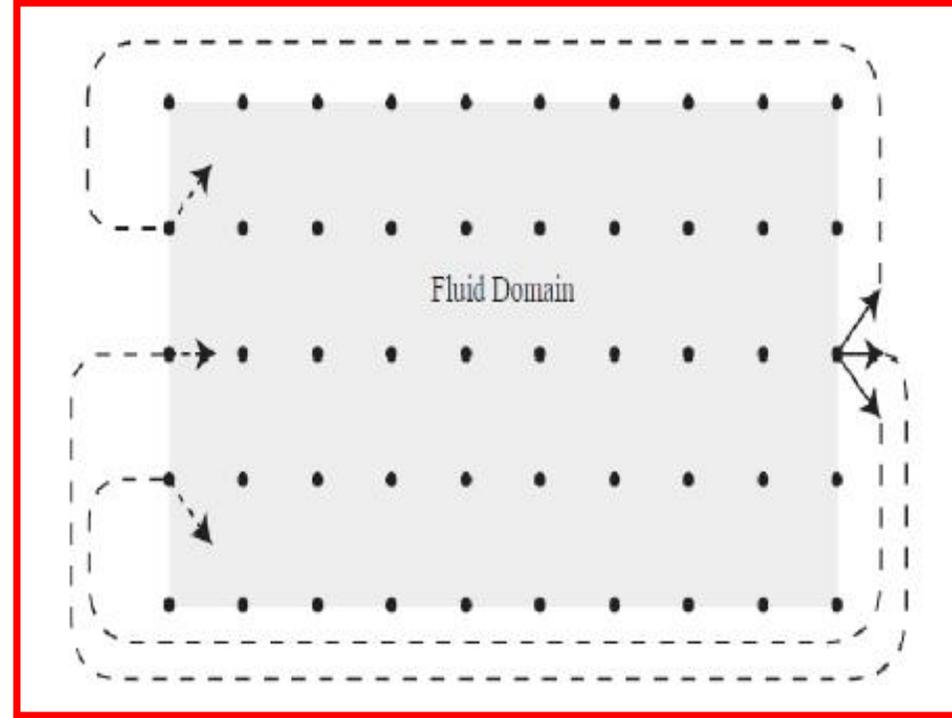
$x = 0$

$x = n$



$$f_{1,x=0} = f_{1,x=n}, f_{5,x=0} = f_{5,x=n} \quad \text{et} \quad f_{8,x=0} = f_{8,x=n}$$

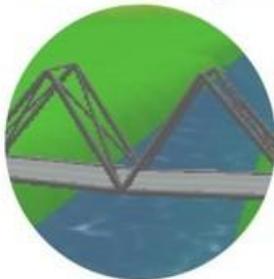
$$f_{6,x=n} = f_{6,x=0}, f_{3,x=n} = f_{3,x=0} \quad \text{et} \quad f_{7,x=n} = f_{7,x=0}$$



Connaissance : Outil de description d'un comportement

Egalement, afin de simuler le **comportement** d'une structure ou d'un objet, le concepteur peut positionner les **efforts** à l'aide de différents logiciels qui font apparaître les **déformations** qui en résultent.

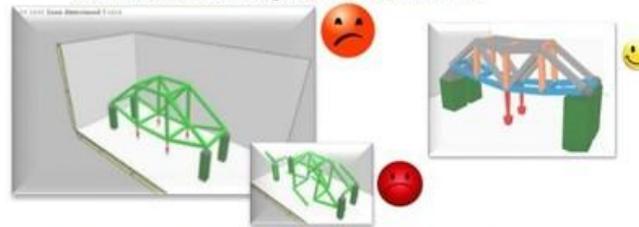
Comportement d'une structure de ponts face à des forces avec le logiciel **Bridge construction**



Une correction peut être réalisée en modifiant:
-les formes
-les matériaux.



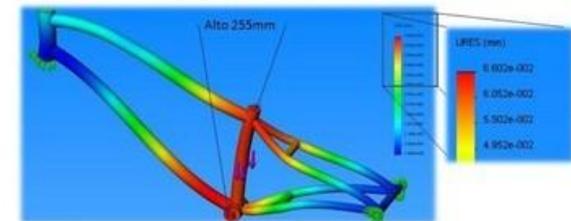
Comportement d'une structure de ponts face à des forces avec le logiciel **Modelsmart 3D**



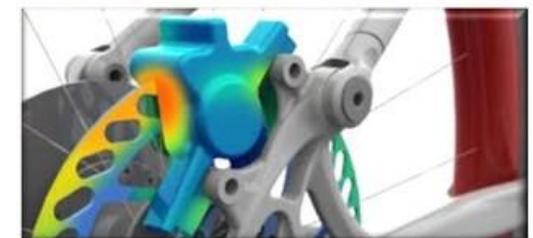
Une correction peut être réalisée en modifiant:
-les formes
-les matériaux.
-les sections des différents éléments



Comportement d'un cadre de vélo avec le logiciel **SolidWorks**



Des **couleurs** sont généralement utilisées pour **visualiser les sollicitations** (compression, traction, flexion,...), mais aussi les **températures**, ou les **pressions** sur les objets.



Les **déformations** des structures, le **comportement** thermique, peuvent être **simulés numériquement** à l'aide de logiciels adaptés.

Le **choix des matériaux**, les **formes** des structures, les **liaisons internes** à l'objet, ... peuvent ainsi être déterminé avant la réalisation du **prototype**.

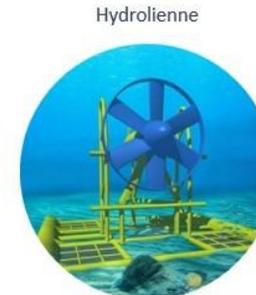
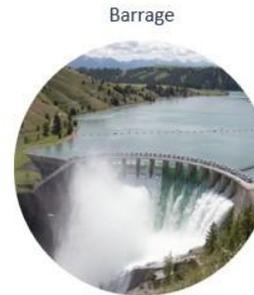
La **modélisation** et les **simulations de comportements** permettent donc de faire **des économies de recherche et développement** sur les produits.

Connaissance : Sources d'énergies

Les sources d'énergies issues de phénomènes naturels : ce sont des sources renouvelables.

Ces sources d'énergies sont renouvelables !!!

L'eau : l'exploitation de l'eau sous toutes ses formes (chutes, cours d'eau, houle, marée, ...) va créer de l'énergie appelée **énergie hydraulique**.



Le vent : l'énergie éolienne utilise la **force du vent**.



Eoliennes

La biomasse : elle comprend les produits solides, bois et dérivés, les biogaz et les biocarburants issus de la transformation de **végétaux** ou de **déchets d'animaux**.



Le soleil : produit de la chaleur ou de l'électricité à partir du **rayonnement solaire**. L'énergie lumineuse du soleil est recueillie grâce à des capteurs sur des panneaux solaires et est convertie en énergie électrique (solaire photovoltaïque) ou thermique (solaire thermique).



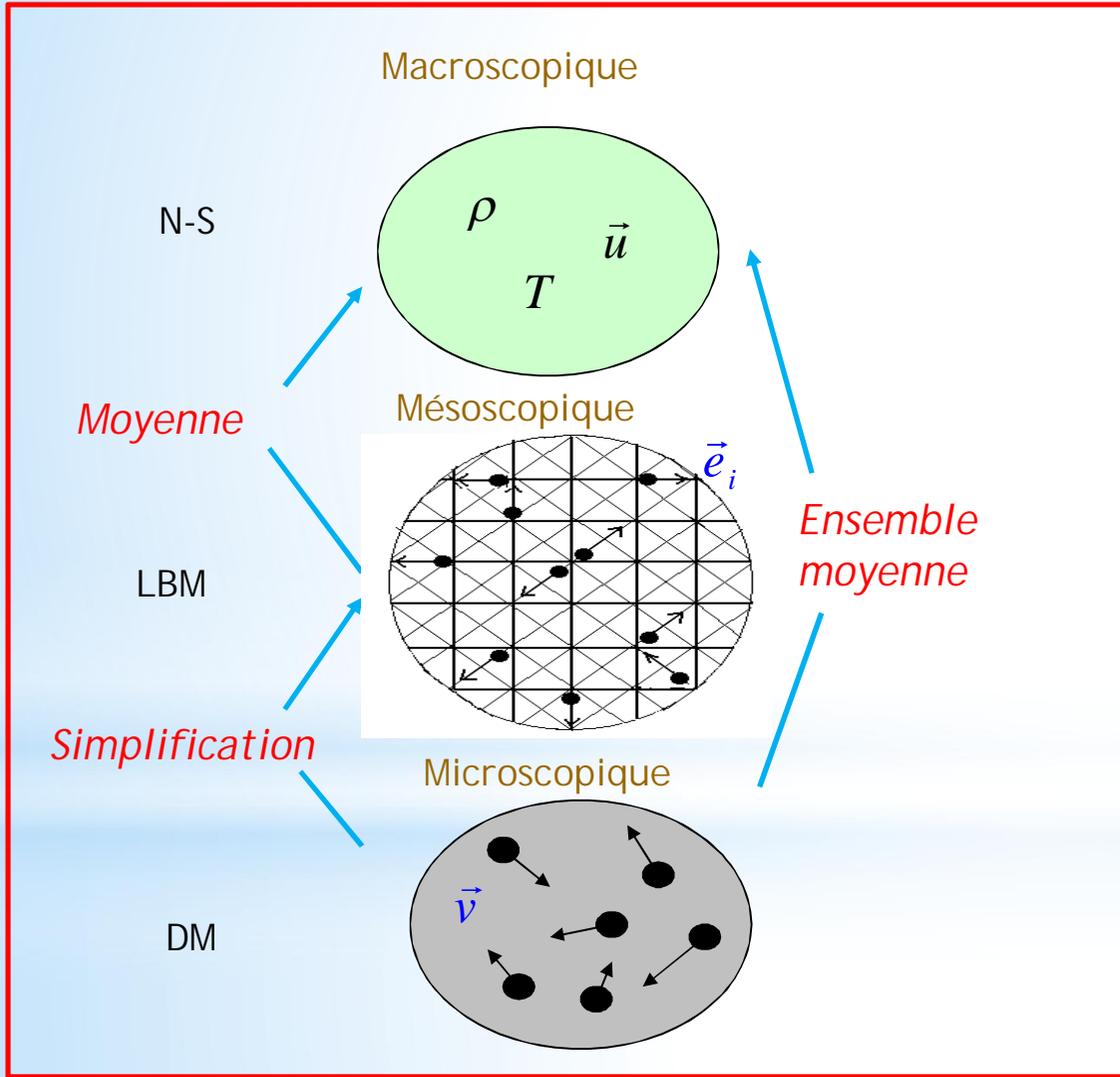
Panneau photovoltaïque

La géothermie : elle exploite la **température du sous-sol**. Ce type d'énergie ne dépend pas des conditions atmosphériques et a donc l'avantage d'être quasi continu



Pompe à chaleur, échangeur et serpentins

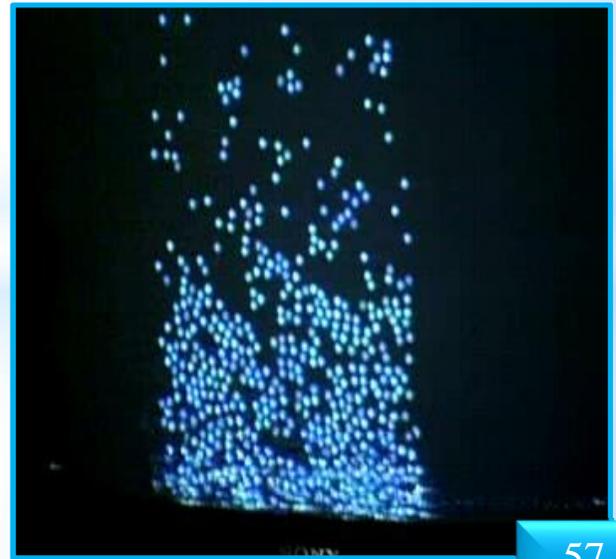
Une **source d'énergie** est issue d'une **matière première**, non renouvelable, comme l'uranium, le pétrole, le gaz, qui fournissent de l'énergie grâce à la combustion, la fission nucléaire... ou issue d'un **phénomène naturel**, renouvelable, comme l'action de l'eau, le vent, le soleil, la chaleur du sous-sol, l'activité musculaire. Ces différentes sources permettent de produire de **l'énergie mécanique, thermique ou électrique**.



Simulation à l'échelle macroscopique



Simulation à l'échelle microscopique



4. CFD steps

Navier



1785- 1836

Stokes



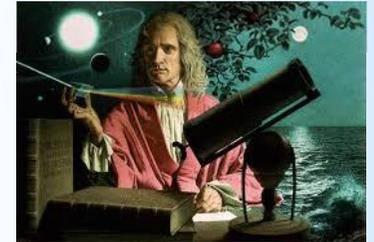
1819- 1903

Boltzmann



1844- 1906

Newton



1872

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f + \mathbf{a} \cdot \nabla_\xi f = Q(f, f)$$

Equations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Décomposition de Chapman-Enskog

1912

Processus de la CFD industrielle : préparation de la modélisation / modélisation

Modèle de l'écoulement : steady, unsteady ?

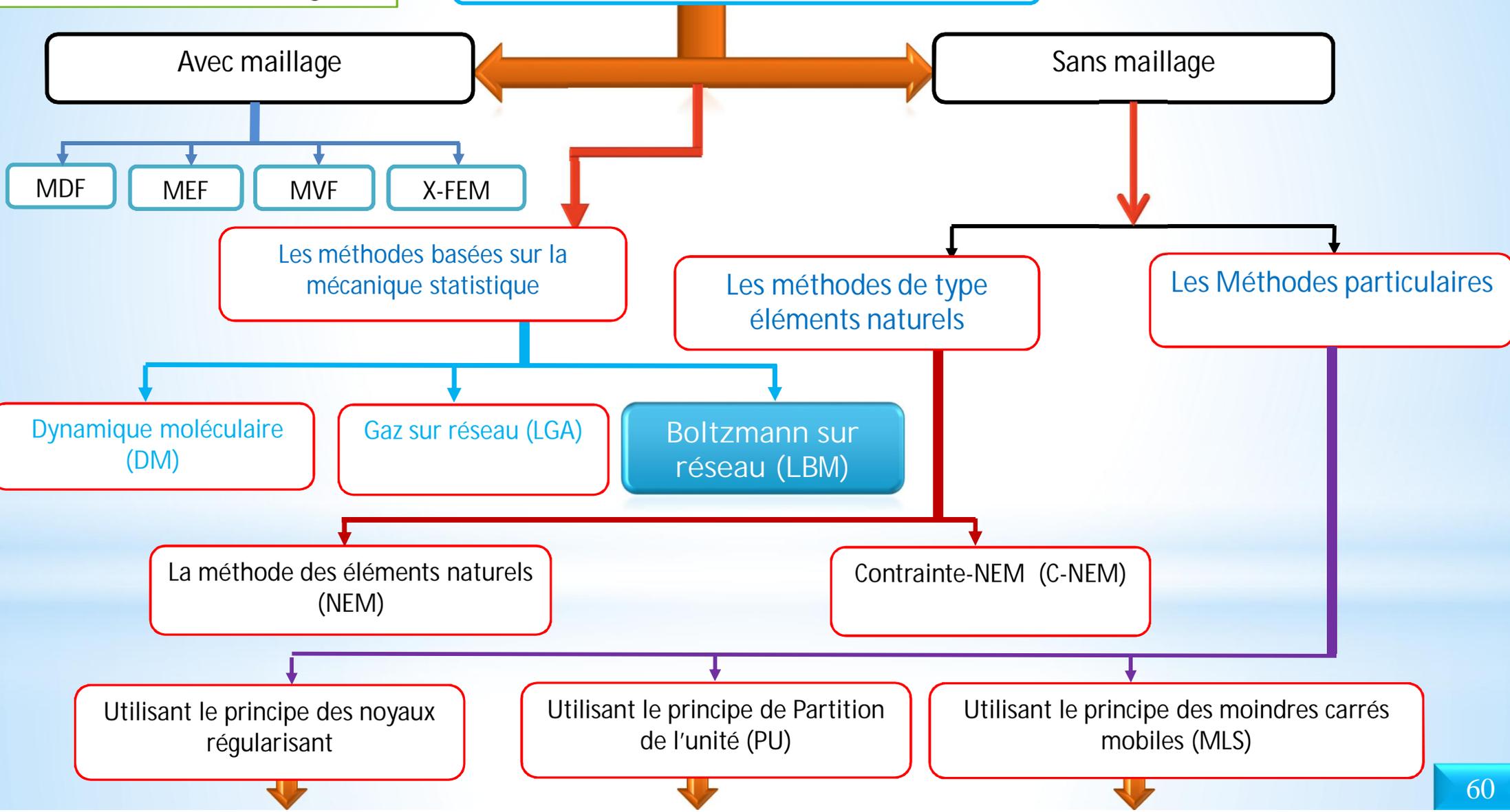
- Unsteady

- ① Implicite unsteady

- Solveur : segregated ou coupled ?
 - Δt ?
 - Schéma de discrétisation : SIMPLE, QUICK, CD, MARS, ... ?
 - Options du solveur : Gauss-Zeidel, GC, ... ?

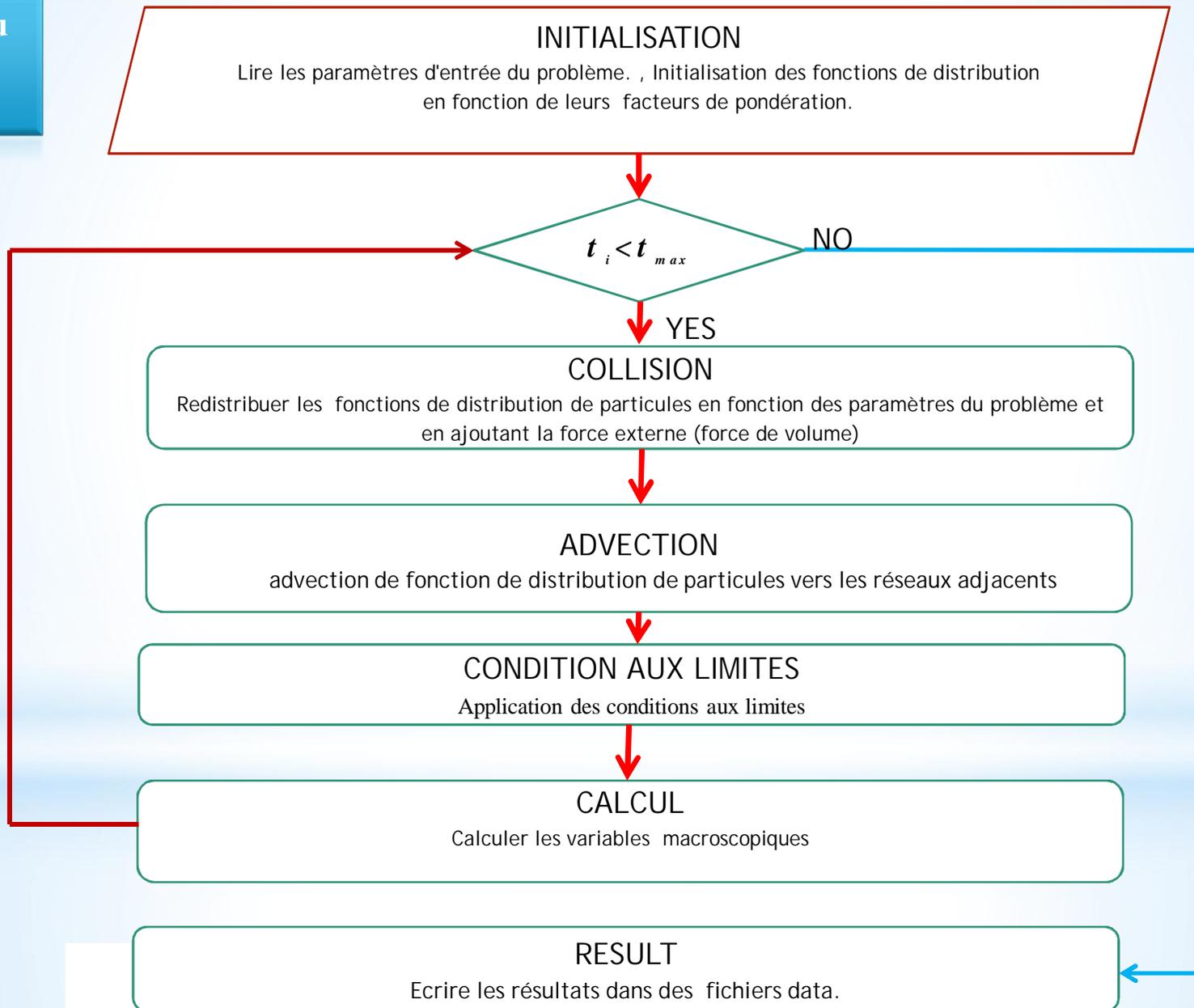
- ② Explicite unsteady

- CFL ?
 - Fractional step time advancement ?
 - ...



choix du logiciels ; outil de programmation; outil de visuallisation





4. CFD steps

Post-Traitement

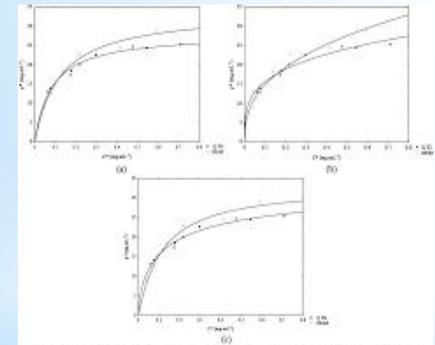
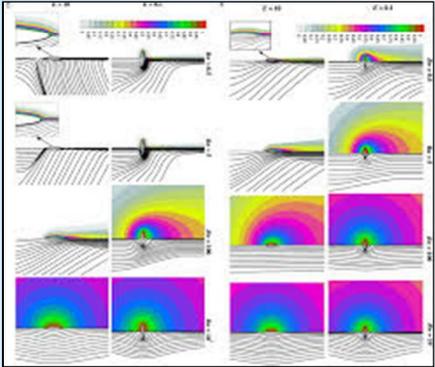
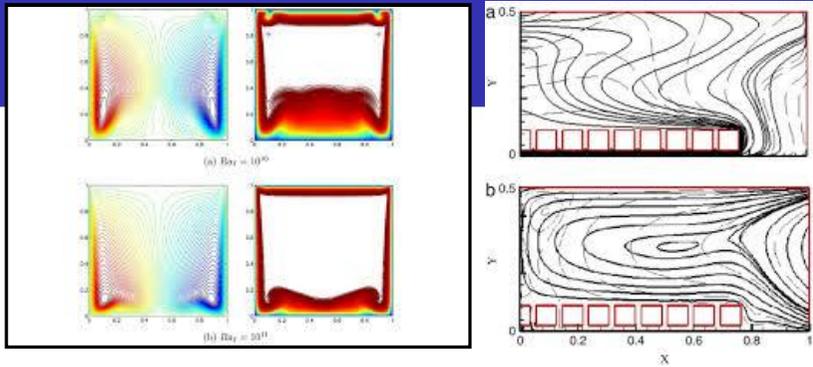
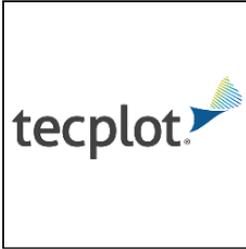
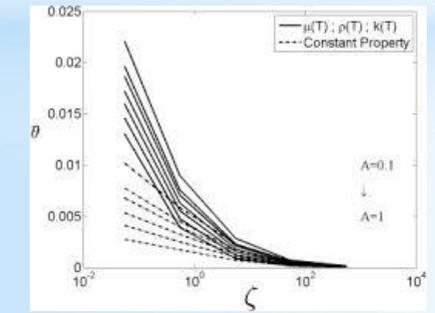
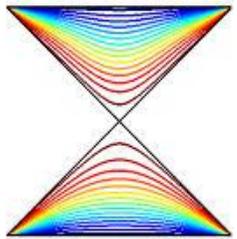
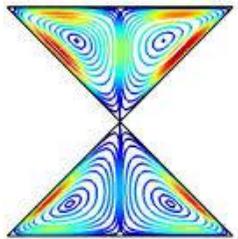
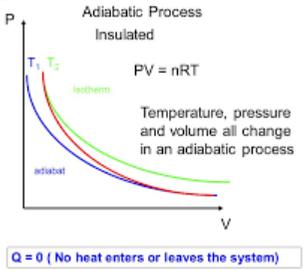


Figure 4: Equilibrium adsorption isotherms according to the (a) Langmuir equation, (b) Freundlich equation and (c) Langmuir-Freundlich equation for the adsorption of C-phycocyanin onto the Spherosorb 120-40 and Q-55 sorbents.



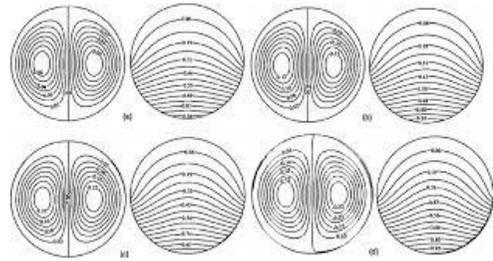
Exploitation des résultats

- Représentation des contours de vitesses et de température
- Tracé des champs de vecteurs
- Représentation des distributions de pression ou de température ou autres variables suivant une ligne donnée
- Animation des résultats



(c)

(d)



*Notions sur les équations aux dérivées
partielles*

EDP

EDP

Définitions

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

EDP

- Une équation différentielle ordinaire (EDO) contient seulement des dérivées par rapport à une seule variable.
- On appelle *ordre* d'une EDP, l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Exemples :

1. L'équation ci-contre est une EDO du 2nd degré : $\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = \lambda$.
2. L'équation ci-dessous est une EDP du 2nd degré :

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g \quad (1.1)$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$a \phi_{xx} + b \phi_{xy} + c \phi_{yy} + d \phi_x + e \phi_y + f \phi = g \quad \iff \quad L \phi = g$$

EDP

- Une EDP est *linéaire* si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue (c-à-d qu'il n'existe pas de produit des variables dépendantes et/ou produit de ses dérivées).
- Une EDP est *non linéaire* si l'équation contient un produit des variables dépendantes et/ou un produit de ses dérivées.

Exemples :

1- L'équation ci-dessous est une EDP linéaire du second degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} k_1 x^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + k_2 x \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - k_3 \phi(x,t) = 0$$

2- L'équation ci-dessous est une EDP non linéaire du premier degré.

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \phi(x,t) \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = g(x,t)$$

- On appelle *problème aux limites* une EDP munie de (C.L) sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.
- Un problème est *bien posé* si pour toute donnée (second membre, domaine, données aux bords, ...), il admet une solution unique et si cette solution dépend continument de la donnée.

1.3 Classification des EDP

Considérons les équations aux dérivées partielles du second degré de type (1.1). Leur classification se fait de la manière suivante :

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g$$

L'EDP est *elliptique* si : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'EDP est *parabolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

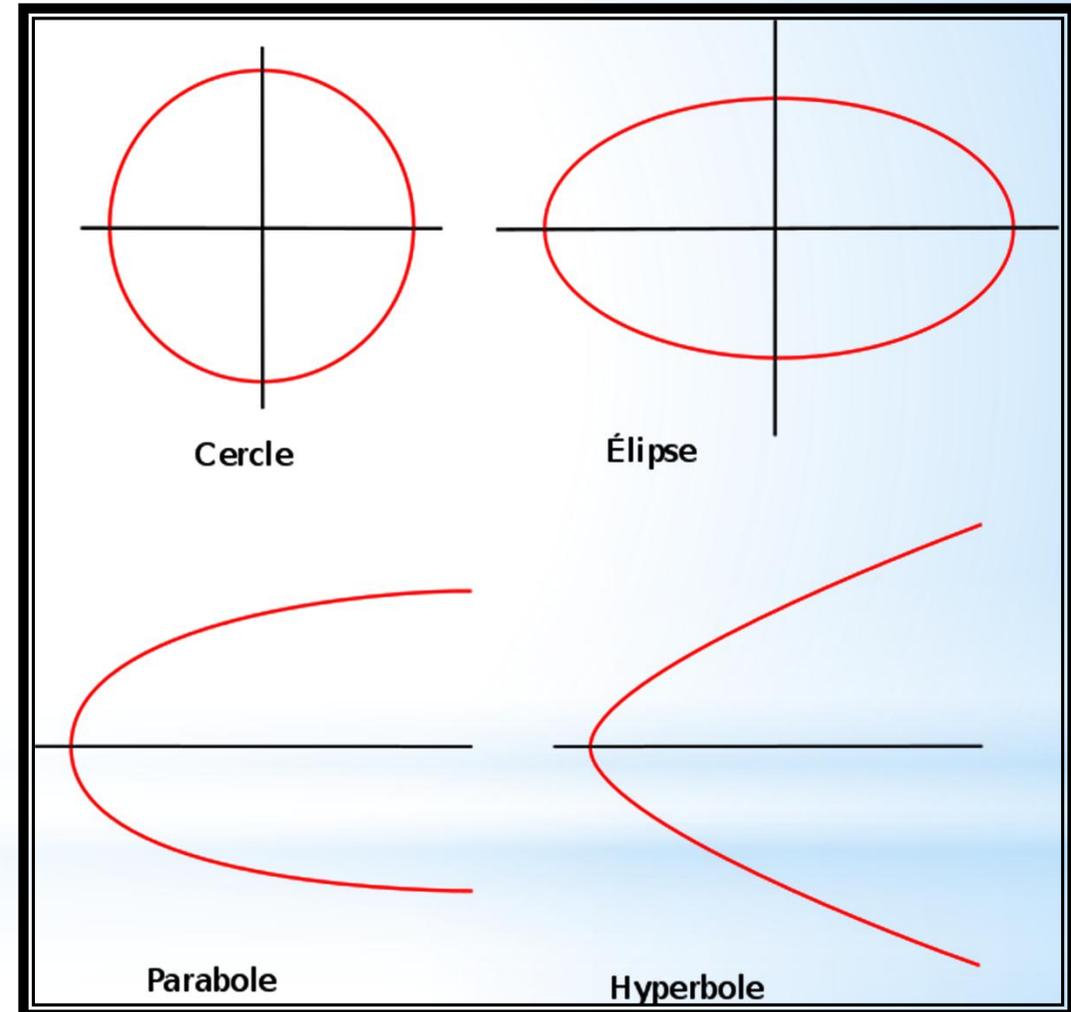
L'EDP est *hyperbolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

L'EDP est *elliptique* si : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'EDP est *parabolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'EDP est *hyperbolique* si : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

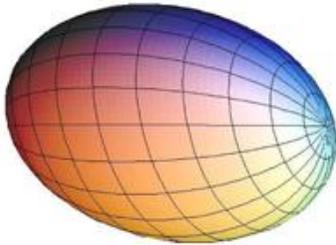
$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi = g$$



V) Quelques autres surfaces et leurs équations

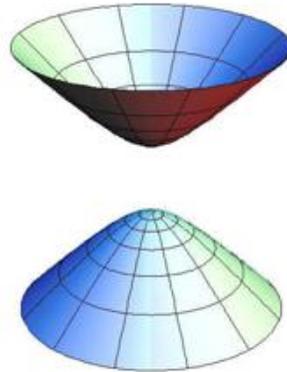
- **Ellipsoïde de révolution**
(ou « ballon de rugby ») :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



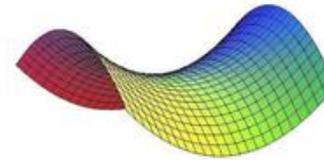
- **Hyperboloïde de révolution à deux nappes**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



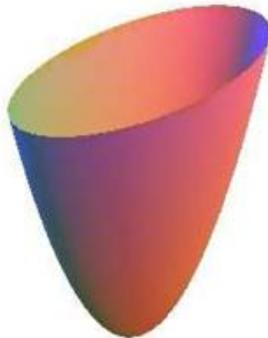
- **Paraboloïde hyperbolique**
(ou « selle de cheval »)

Selon le repère : $\frac{z}{h} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
ou $xy = pz$



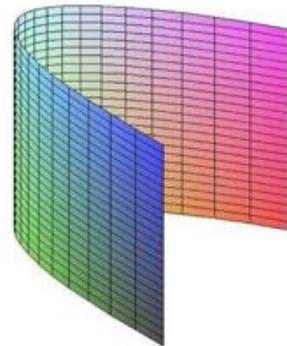
- **Paraboloïde elliptique**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



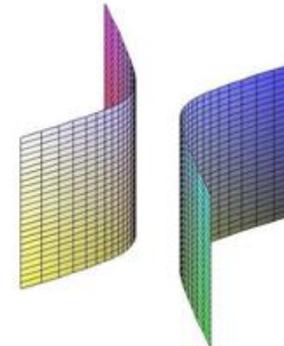
- **Cylindre parabolique**

$$y = \frac{x^2}{2p}$$



- **Cylindre hyperbolique**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



L'EDP de nature elliptique :

Cette catégorie d'EDP est associée aux problèmes de nature stationnaire ou d'équilibre tels que l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, la répartition stationnaire du champ de température ou la distribution d'un potentiel.

- Les EDP elliptiques sont associées avec des phénomènes stationnaires. Elles modélisent souvent un problème *intérieure* (*fermé*) (Fig.1.2) et alors la solution est souvent bornée (exp : les équations de Laplace et de Poisson).

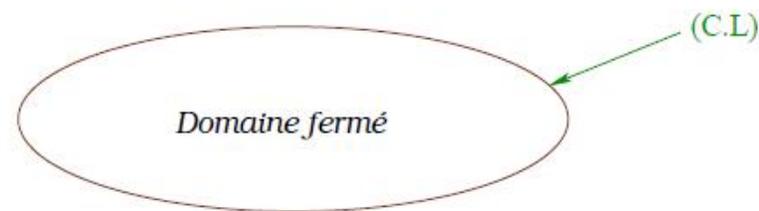


Fig. 1.2: *Domaine d'étude pour les problèmes elliptiques.*

L'EDP de nature hyperbolique :

Cette catégorie d'EDP peut être considérée comme extension des équations elliptiques pour lesquels certaines valeurs critiques des paramètres doivent être déterminées en même temps que la distribution d'équilibre correspondante. La résonance de circuit électrique ou d'enceintes acoustiques ainsi que la détermination des fréquences propres des structures élastiques constituent des exemples de ce type d'équations.

- Les EDP hyperboliques apparaissent dans les problèmes de propagation. La solution est souvent *ouverte* et elle avance alors indéfiniment vers l'extérieur à partir d'une condition initiale satisfaisant toujours les conditions aux limites (C.L) spécifiées (Fig.1.3).

L'EDP de nature hyperbolique :

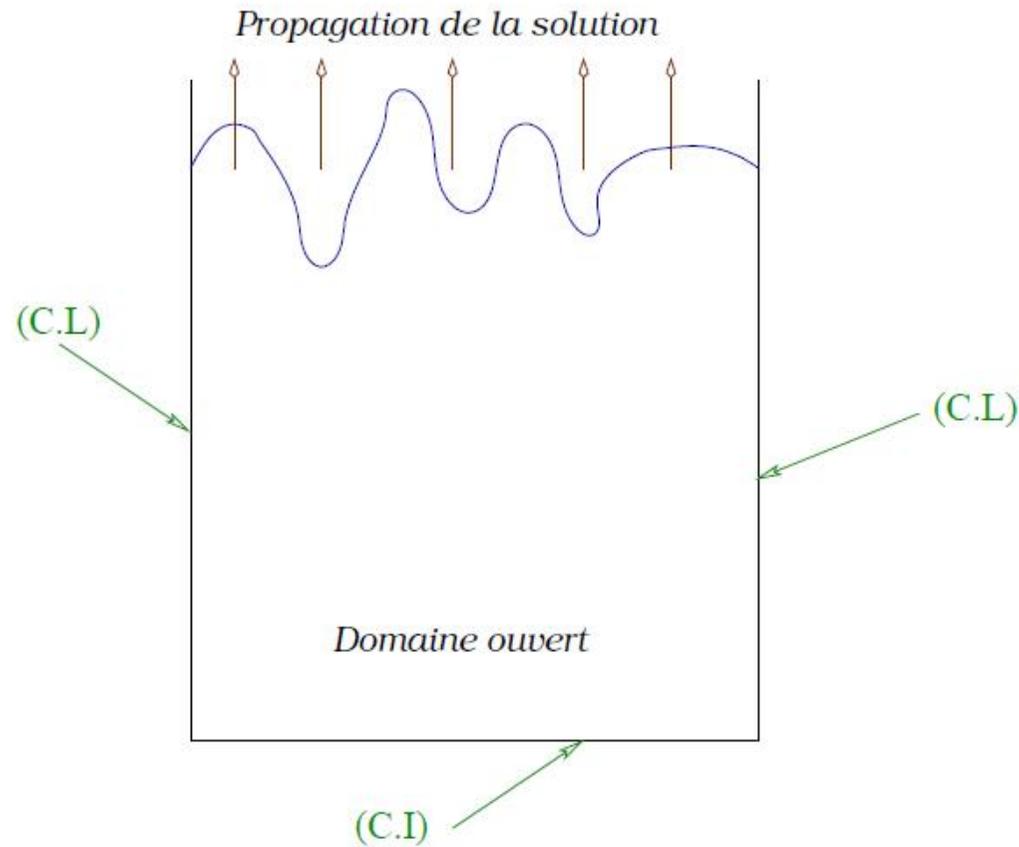


Fig. 1.3: *Domaine d'étude pour les problèmes paraboliques et hyperboliques.*

L'EDP de nature parabolique :

C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire.

- Les EDP paraboliques sont généralement associées avec des problèmes dans lesquels la quantité qui nous intéresse varie lentement comparée aux mouvements aléatoires qui produisent les variations. Comme l'EDP hyperbolique, le domaine de la solution de l'EDP parabolique est souvent ouvert. Les conditions initiale (C.I) et limites (C.L) typiquement associées avec cette équation ressemblent à ceux des problèmes hyperboliques à l'exception de la seule condition initiale à $t = 0$ nécessaire puisque l'équation est du 1^{er} ordre en temps. Aussi, les équations paraboliques et hyperboliques sont résolues par des techniques similaires alors que l'équation elliptique est souvent plus difficile et requiert des techniques différentes.

Utilités de classification

L'équation est dite de type **elliptique** si $\Delta < 0$, elle est **parabolique** si $\Delta = 0$, et **hyperbolique** si $\Delta > 0$.

Une des utilités de cette classification est de prévoir le comportement de l'équation vis à vis des conditions aux limites. Si nous imaginons un écoulement de fluide de gauche vers la droite, une perturbation en un point donné n'a pas d'influence amont si l'équation est de type parabolique. Si par contre l'équation est de type elliptique une perturbation quelconque en un point quelconque aura une influence dans toutes les directions de l'espace. Une conséquence directe de cette caractéristique est qu'un problème de type parabolique peut être résolu par une marche avant, alors qu'une équation de type elliptique nécessite la prise en considération des conditions aux limites imposées sur toutes les frontières du domaine de calcul.

Enfin, la figure 1 représente schématiquement l'influence d'une perturbation au point P sur l'ensemble du domaine de calcul pour les trois types d'équations.

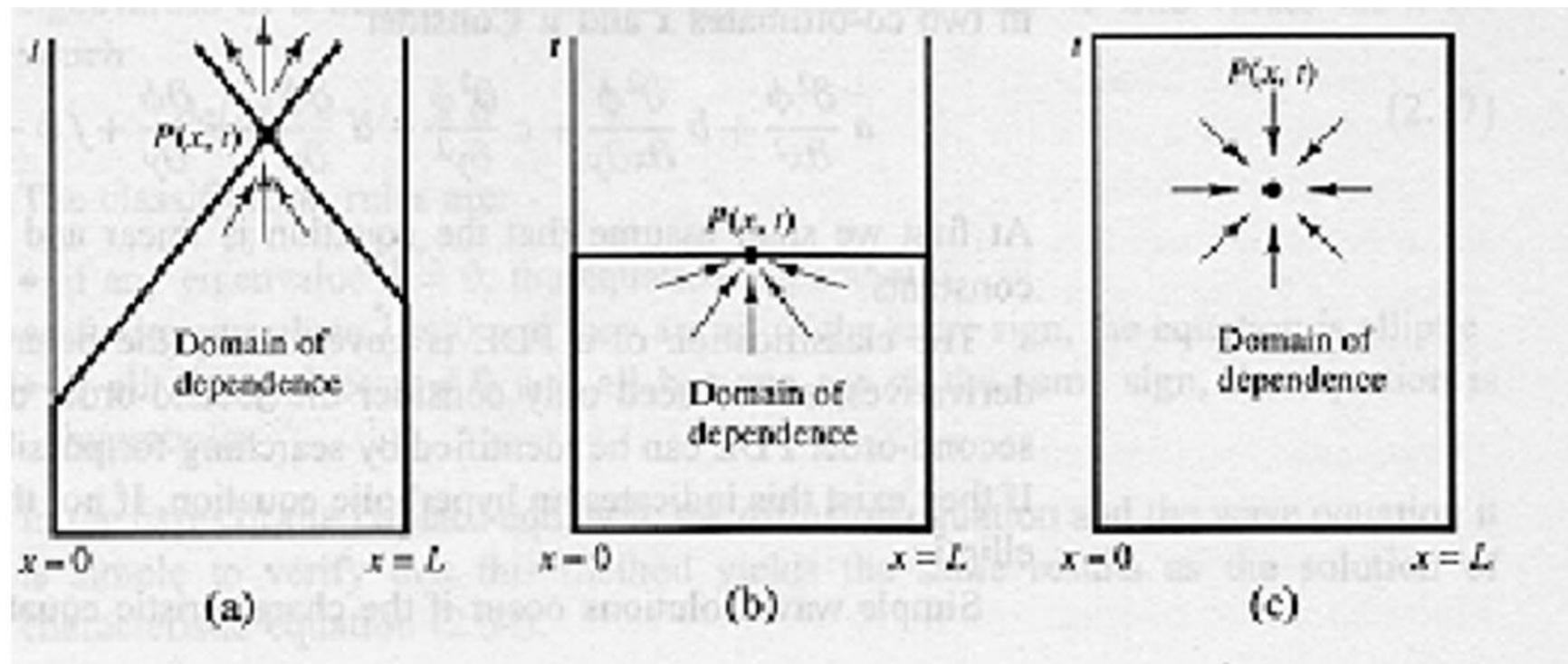


Figure 1 : Nature des équations et conditions aux limites,
(a) Hyperbolique, (b) Parabolique et (c) Elliptique.

Exemples :

– Equation d'onde : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

$a = c^2, b = 0, c = -1 \Rightarrow \Delta = 4c^2$ donc c'est une EDP de type hyperbolique.

– Equation de diffusion (chaleur) : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ donc c'est une EDP de type parabolique.

– L'équation : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f$

$a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow \Delta = -4$ donc c'est une EDP de type elliptique.

- L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans ce cas u est dite *harmonique*.

- L'équation de Poisson : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

– Equation de Tricomi : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$a = 1, b = 0, c = x \Rightarrow \Delta = -4x$ donc c'est une EDP de type *mixte*. Elle est elliptique si $x > 0$ et hyperbolique si $x < 0$.

Un problème de transfert de chaleur ou d'écoulement est dit bien posé si en résolvant les équations du problème liées aux conditions aux limites et initiales

- La solution numérique existe.
- La solution numérique est unique.
- La solution numérique dépend de façon continue de la variation des conditions aux limites.

2.3 Coordonnées à simple et double influence

2.3.1 Définitions

• Une coordonnée x, y, z ou t est dite à *double influence* si les conditions en une position donnée dans la direction de la coordonnée, sont influencées par des changements de conditions d'un côté ou de l'autre côté de cette position.

Exemple : Dans une plaque métallique (fig. 2.3) quand la température T_1 augmente, la température du point voisin T_2 va augmenter aussi. Et, si T_3 augmente, T_2 va augmenter aussi.

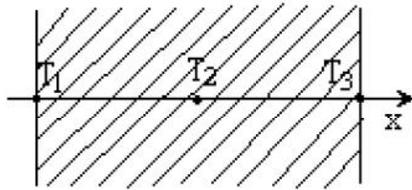


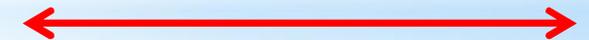
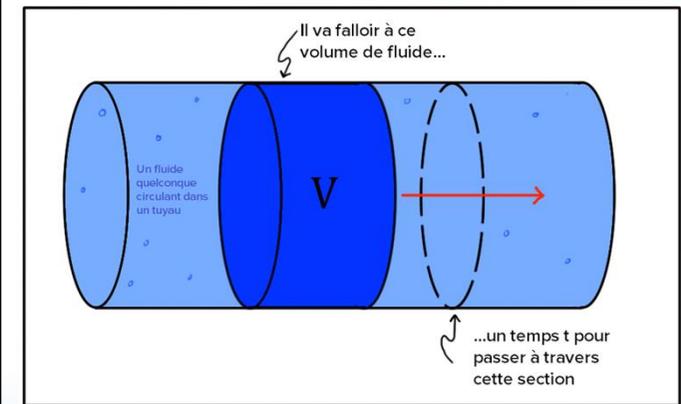
Fig. 2.3 Exemple de coordonnées à double influence.

• Une coordonnée x, y, z ou t est dite à *simple influence* si les conditions en une position donnée dans la direction de la coordonnée, sont influencées par des changements de conditions uniquement d'un seul côté de cette position.

Exemple : le temps est toujours une variable à simple influence, c'est-à-dire ce qui se passe dans l'avenir n'influence jamais le présent.

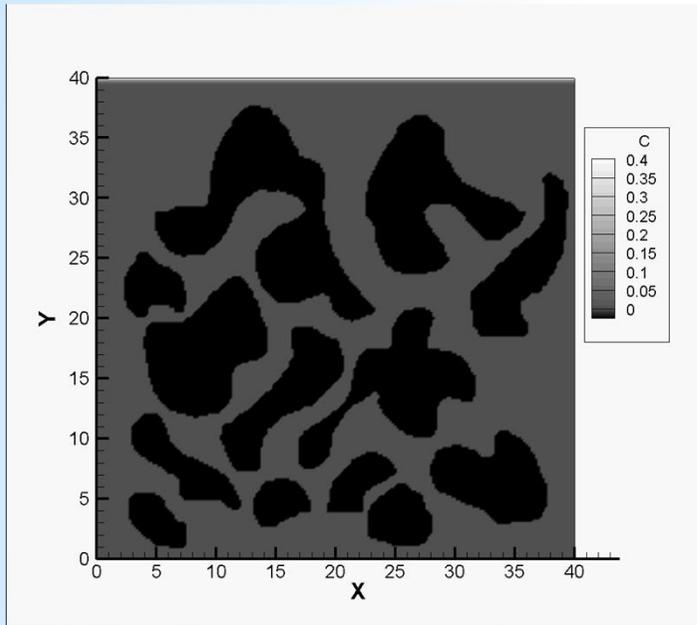
Remarque : Normalement les coordonnées spatiales (x, y, z) sont des variables à double influence, mais sous l'effet d'un écoulement (convection) elles peuvent devenir à simple influence.

Simple effet

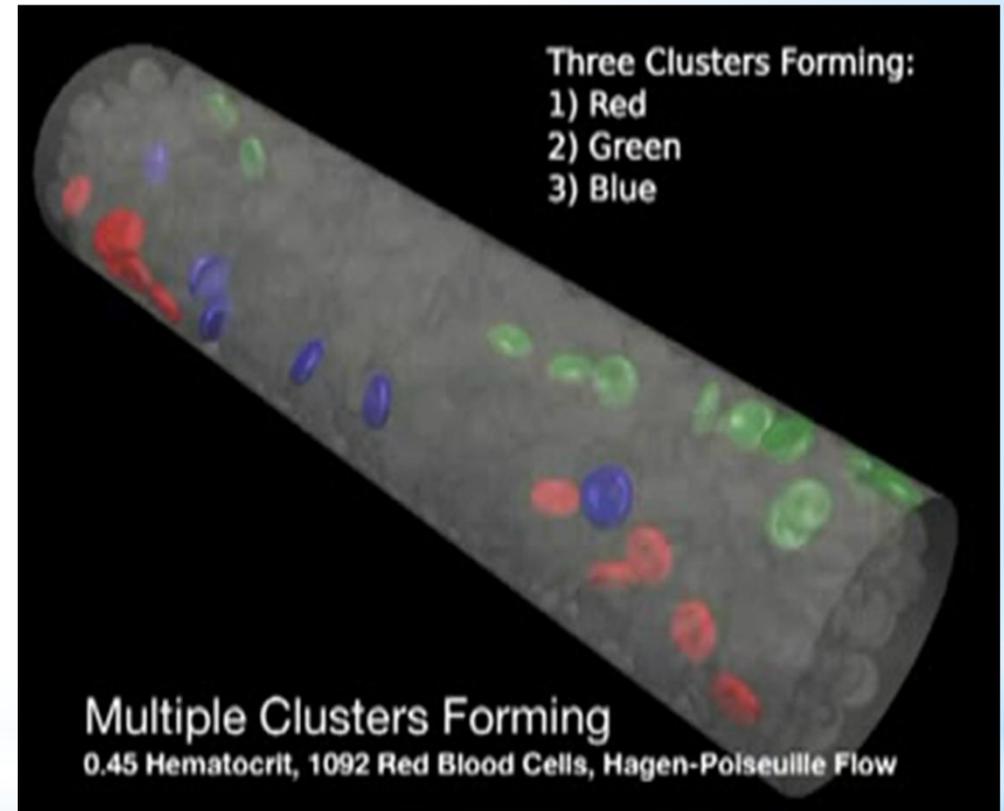


Double effets

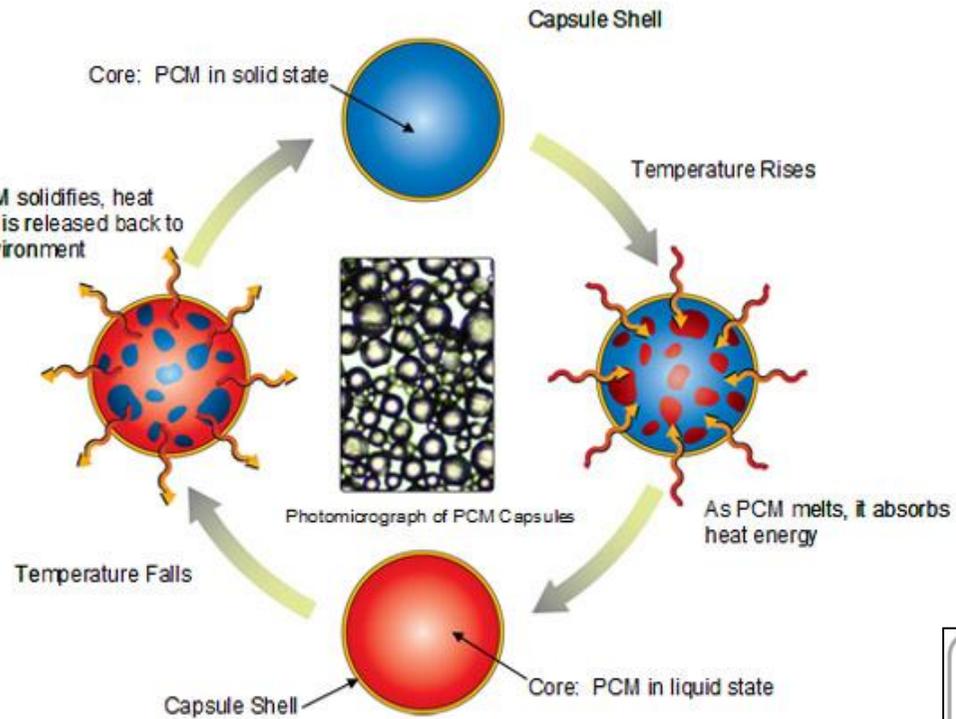
Problème de diffusion



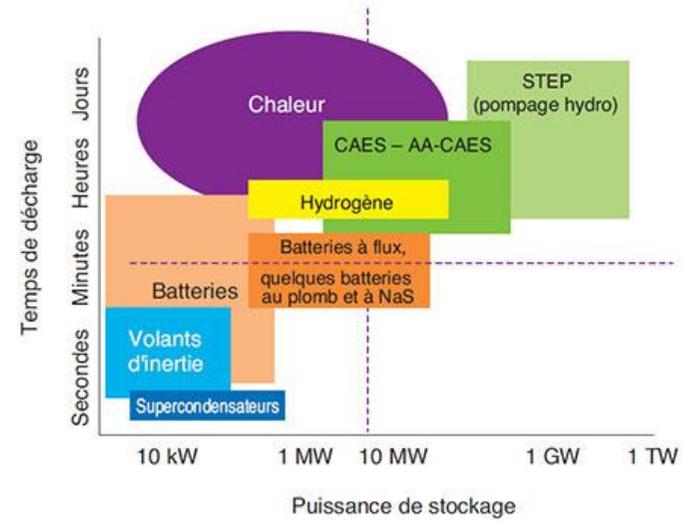
Problème de advection ou transport



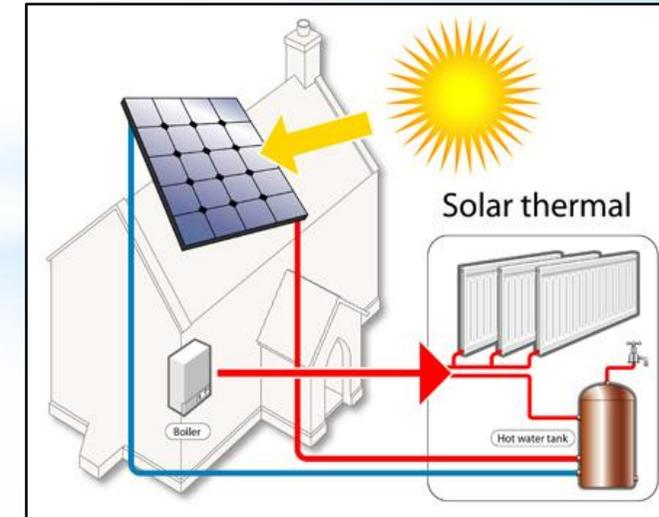
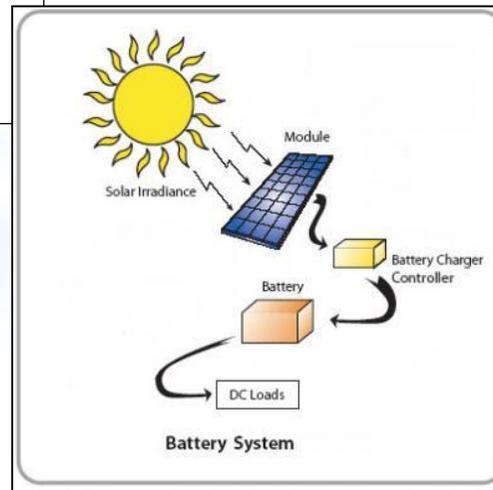
Problème stockage



Les différentes technologies de stockage en fonction de leur puissance et du temps de décharge (autonomie)



Source : IFPEN d'après diverses sources



Quelques Exemples

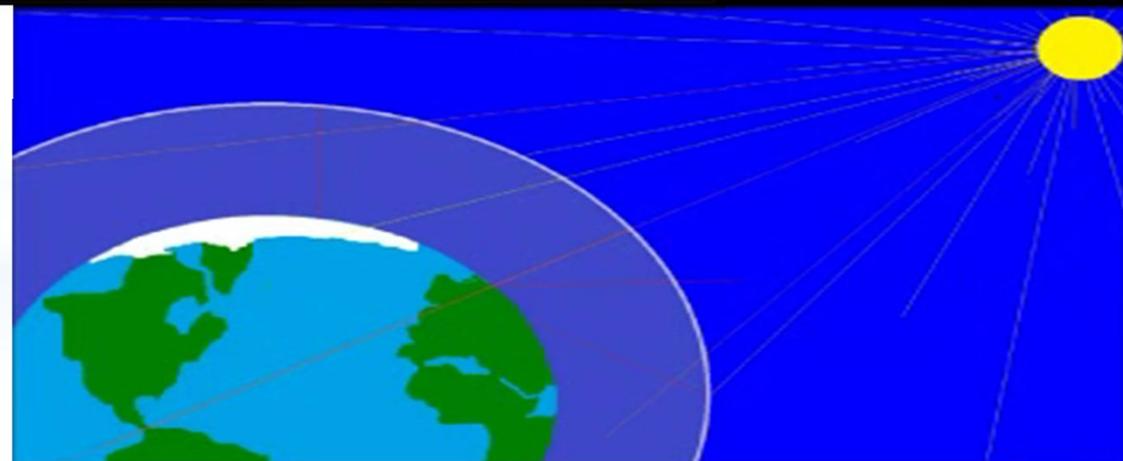
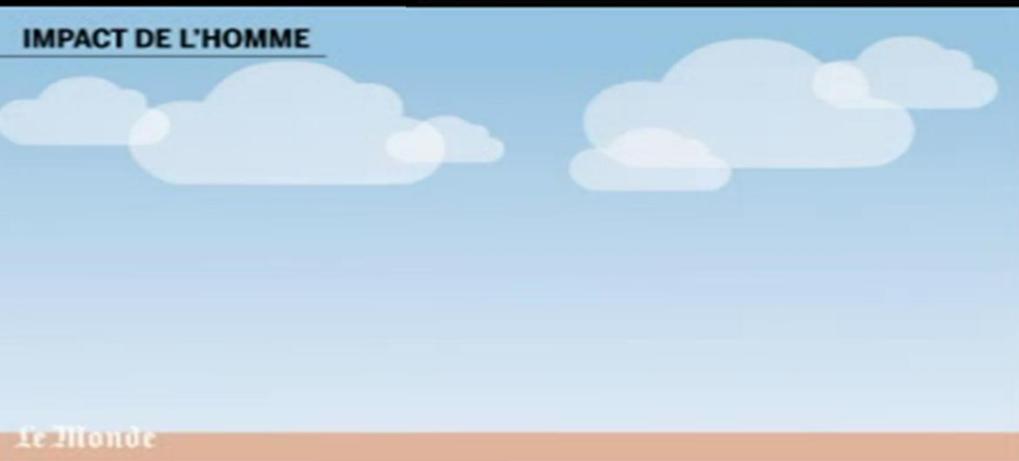
Problématique I

Augmentation des émissions du CO₂



Réchauffement climatique

25 Gt de CO₂ ont été émises en 2010



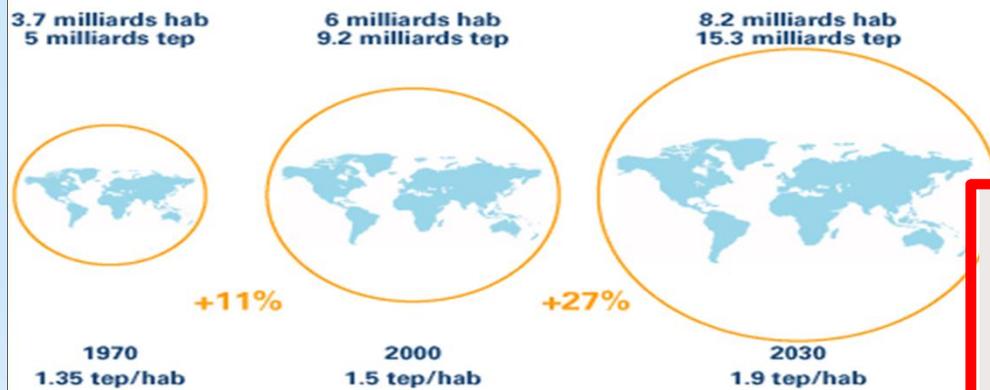
50 Gt de CO₂ seront émises en 2050 si rien n'est fait!!!!

Problématique II

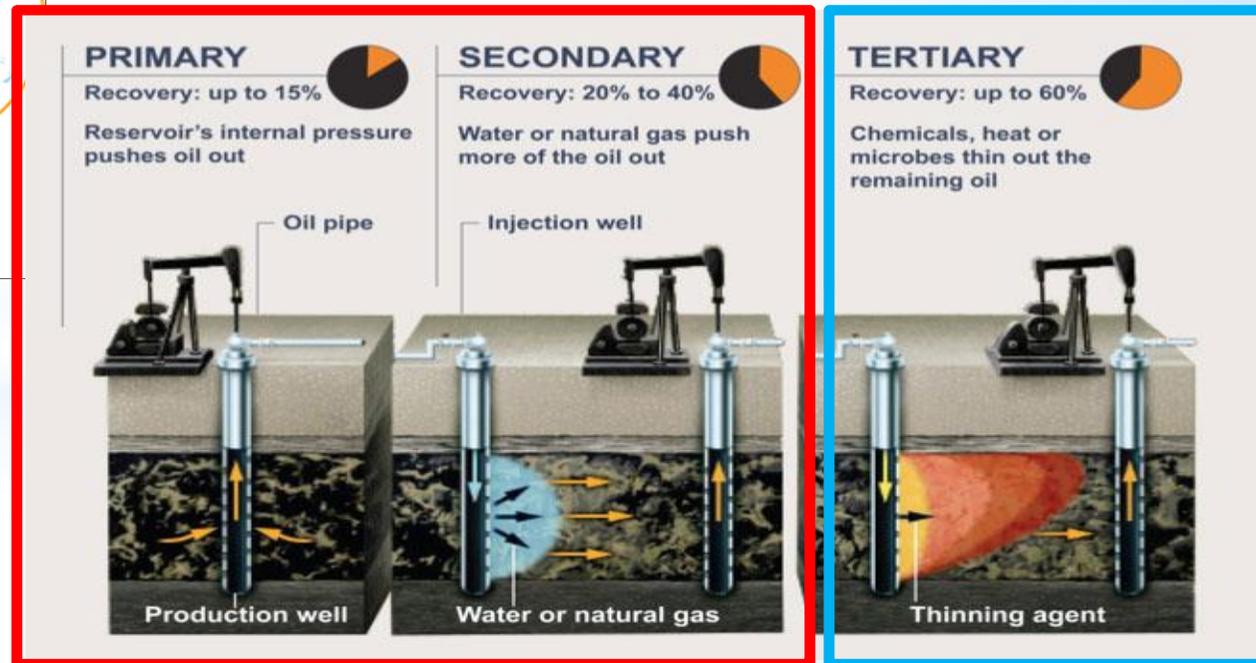
Diminution de la production des hydrocarbures par les méthodes conventionnelles et augmentation de la demande mondiale en énergie



■ Croissance énergétique



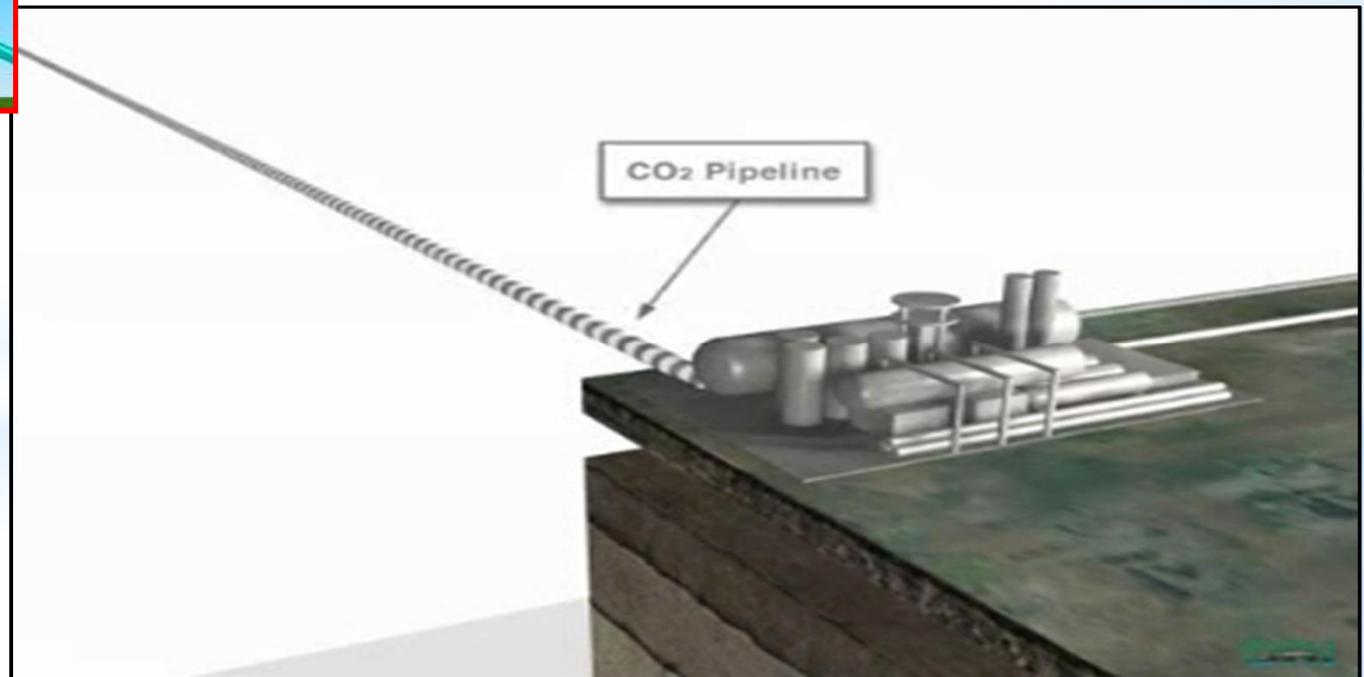
Source : AIE/BP stat review



Objectif de la thèse

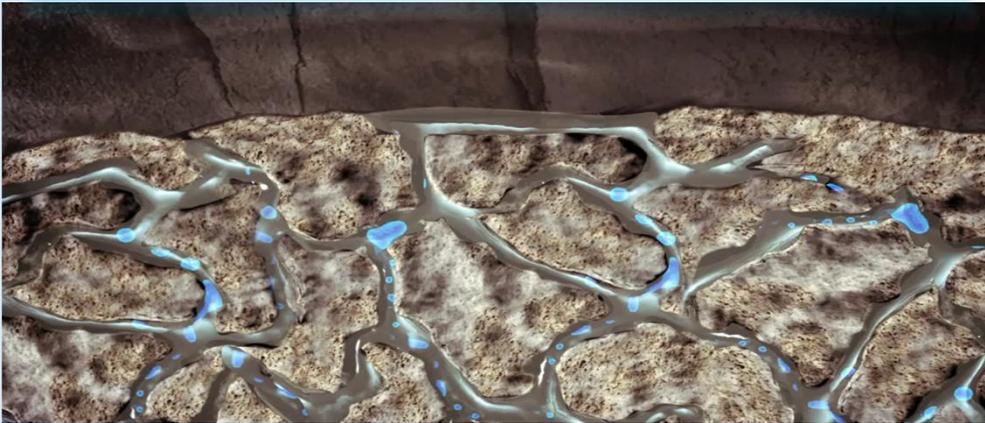
L'objectif de la thèse est de Combiner entre les deux problématiques pour:

1. Atténuer l'émission du CO₂ dans l'atmosphère
2. Maximiser la récupération des hydrocarbures (pétrole/gaz)



Les mécanismes mise en jeu lors de l'injection du CO₂

1. piégeage hydrodynamique



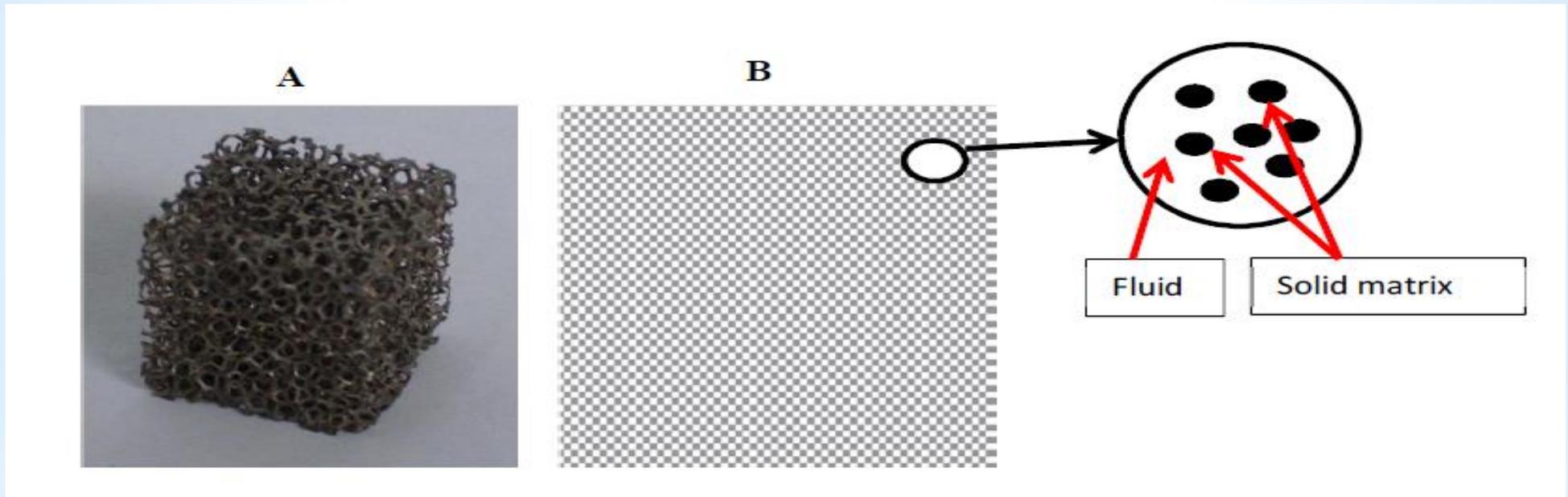
2. processus de minéralisation



3. Dissolution de CO₂ dans le liquide de formation (pétrole/eau)



Modélisation de la convection naturelle lors de l'injection du CO₂ dans un milieu poreux par la méthode de Boltzmann sur réseau



Modélisation à l'échelle des pores

Modélisation à l'échelle d'un élément de volume représentatif (REV)

Application I:

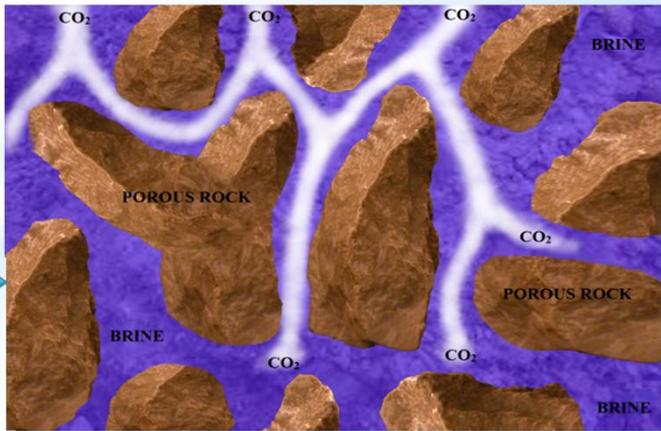
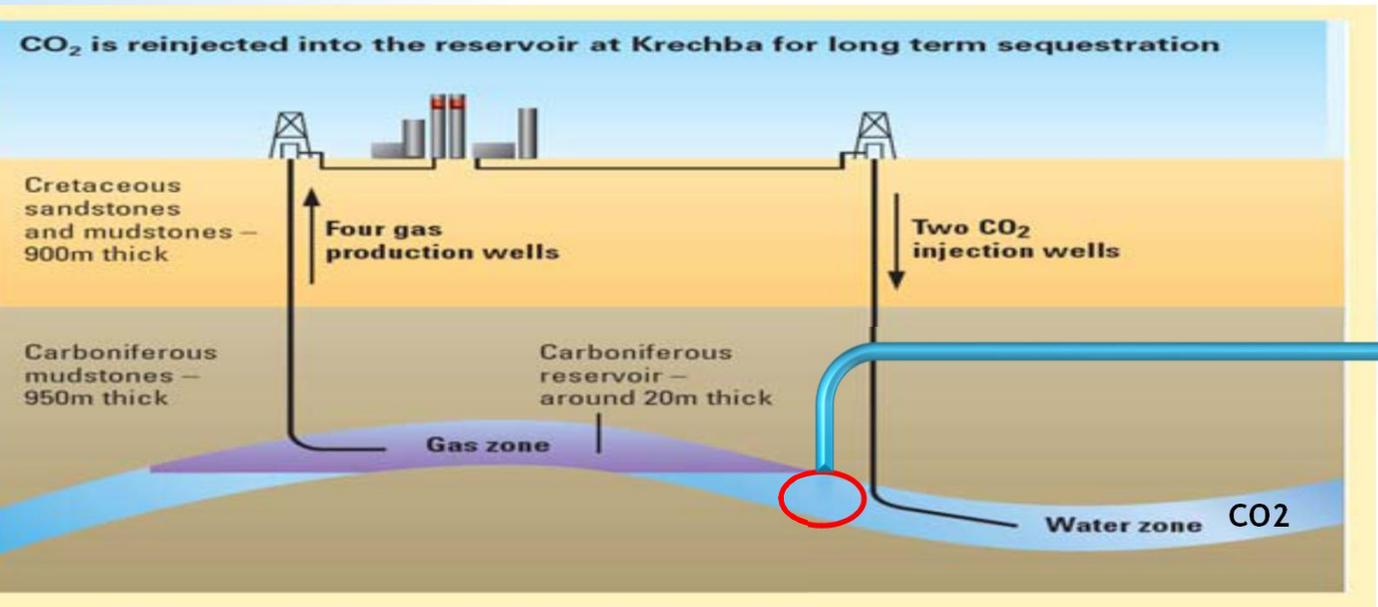
Convection naturelle du CO2 dans la saumure à l'échelle des pores



Récupération assistée de gaz par injection de CO2 (EGR/CO2)

Gaz de ISG ~ 10% de CO2

Gaz commercial exige < 0,4% de CO2



1. Modélisation macroscopique par les équations de conservations

équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p) + \nu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

approximation de Boussinesq (force de volume)

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} = -\frac{\Delta \rho}{\Delta C} C \mathbf{g} e_y$$

C: Concentration de CO_2

Conservation de l'espèce chimique

$$\partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C$$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

équations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$\mathbf{e}_i = c \begin{cases} 0 & \text{pour } i = 0 \\ \left(\cos \left[(i-1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[(i-1) \frac{\pi}{2} \right] \right) & \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2} \left(\cos \left[(i-5) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[(i-5) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right) & \text{pour } i = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

\mathbf{e}_i : vecteurs de vitesse

avec : $c = \delta x / \delta t$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

équations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_r} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

fonction d'équilibre (Maxwell-Boltzmann)

$$f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) = \omega_i \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

τ_r : temps de relaxation entre deux collisions successives

$$\nu = (\tau_r - 0.5) \delta x^2 / 3 \delta t$$

ν : viscosité cinématique

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

Conservation de l'espèce chimique

$$g_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = g_i(x, t) - \frac{g_i(x, t) - g_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_s} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

fonction d'équilibre (Maxwell-Boltzmann)

$$g_i^{eq}(C, \mathbf{u}) = \omega_i C \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

τ_s : temps de relaxation entre deux collisions successives relié avec le coefficient de diffusion massique

$$D = (\tau_s - 0.5) \delta x^2 / 3 \delta t$$

D : coefficient de diffusion massique

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

pour incorporer la force de volume dans la méthode LBM, il faut modifier la vitesse d'équilibre (u^*) et la vitesse macroscopique (\tilde{u}) comme suit:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \tau_f \frac{\mathbf{F} \Delta t}{\rho} \quad (\text{vitesse d'équilibre})$$

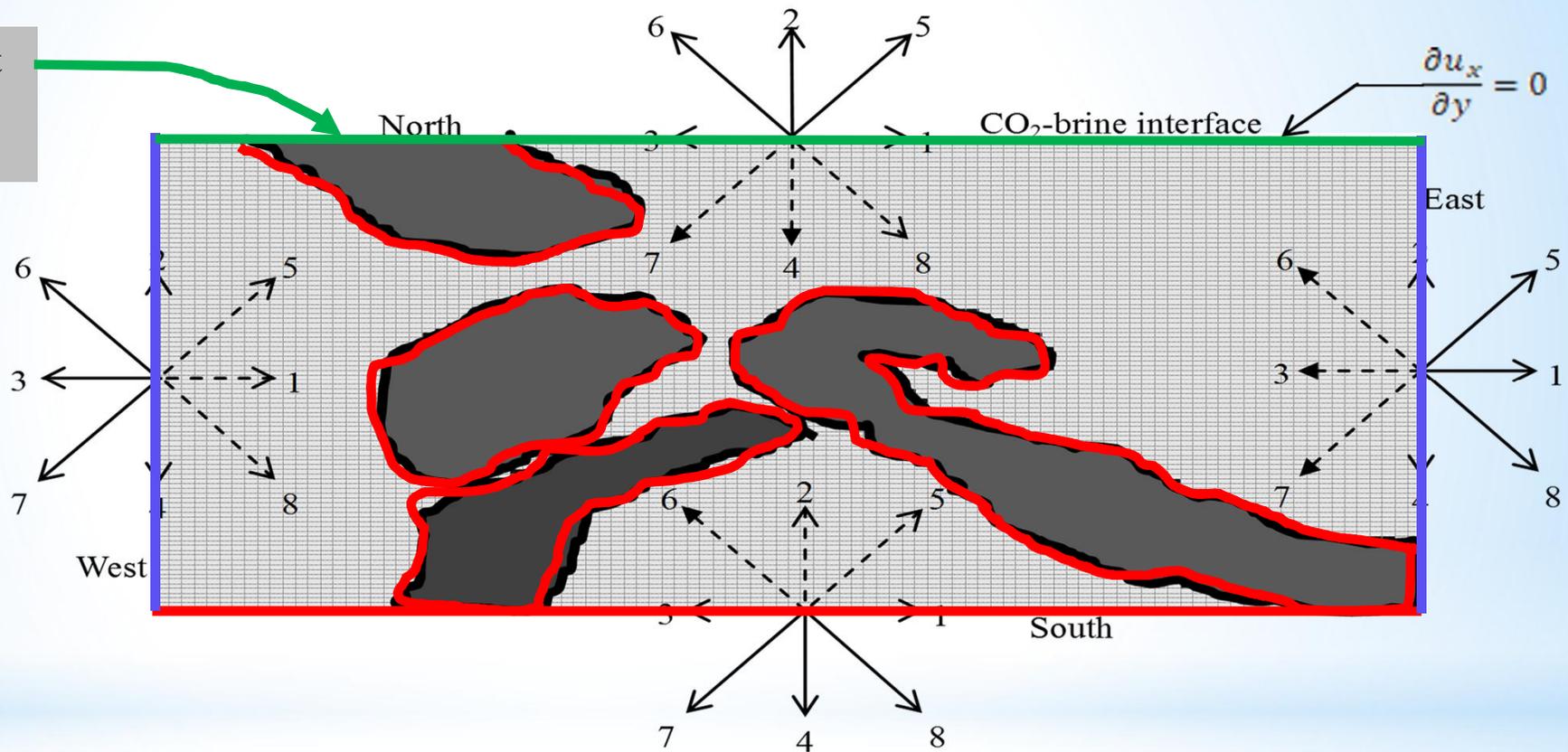
$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F} \Delta t}{2\rho} \quad (\text{vitesse macroscopique})$$

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} = - \frac{\Delta \rho}{\Delta C} C g \mathbf{e}_y$$

Application I:

Conditions aux limites pour le problème étudié

Nécessite un traitement
spéciale
($y=m$)

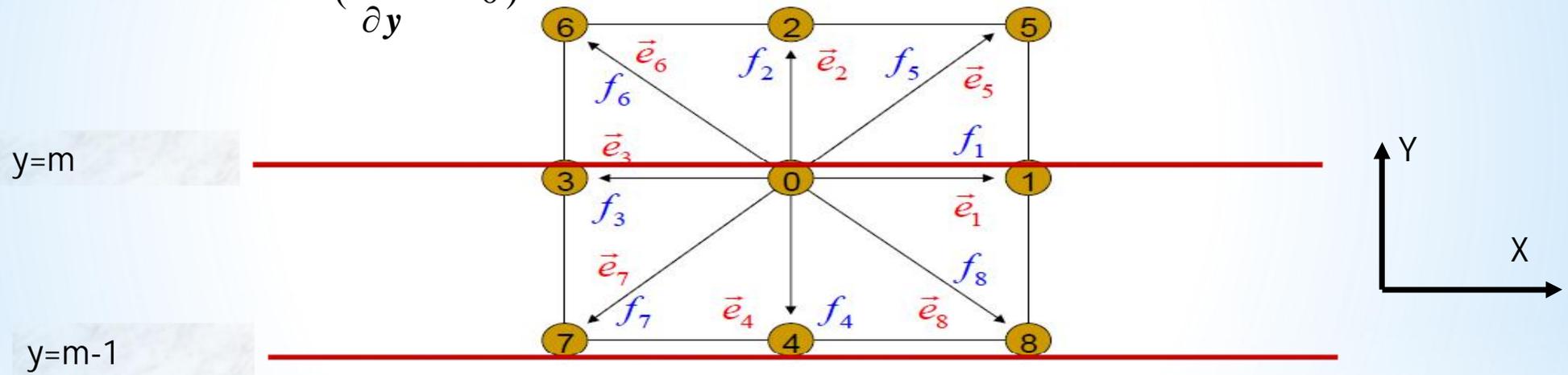


Rebond en arrière (écoulement du fluide & concentration du CO_2)

Périodiques (écoulement du fluide & concentration du CO_2)

Pour l'écoulement du fluide: on utilise la condition limite de type miroir symétrique

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0\right)$$



$$f_i(x, m) = \tilde{f}_i(x, m-1) \quad i = 0, 1, 3$$

$$f_2(x, m) = \tilde{f}_4(x, m-1), f_4(x, m) = \tilde{f}_2(x, m-1)$$

$$f_6(x, m) = \tilde{f}_7(x, m-1), f_7(x, m) = \tilde{f}_6(x, m-1)$$

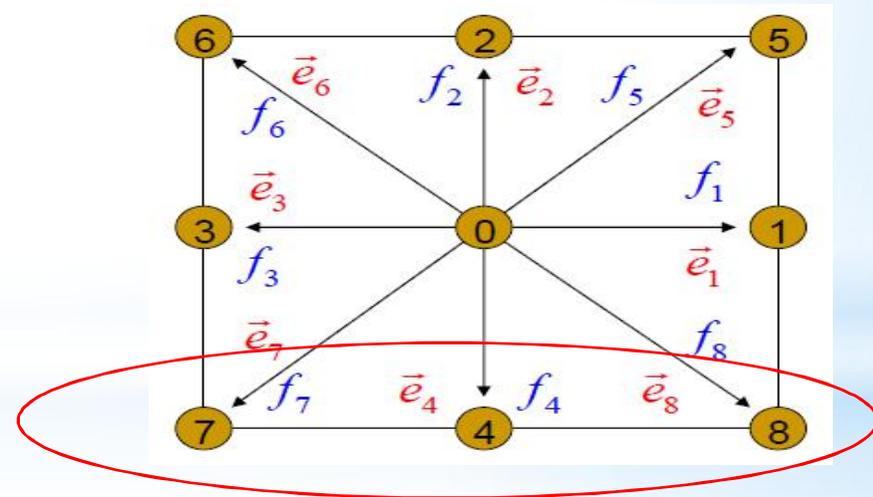
$$f_5(x, m) = \tilde{f}_8(x, m-1), f_8(x, m) = \tilde{f}_5(x, m-1)$$

Application I:

Conditions aux limites pour le problème étudié

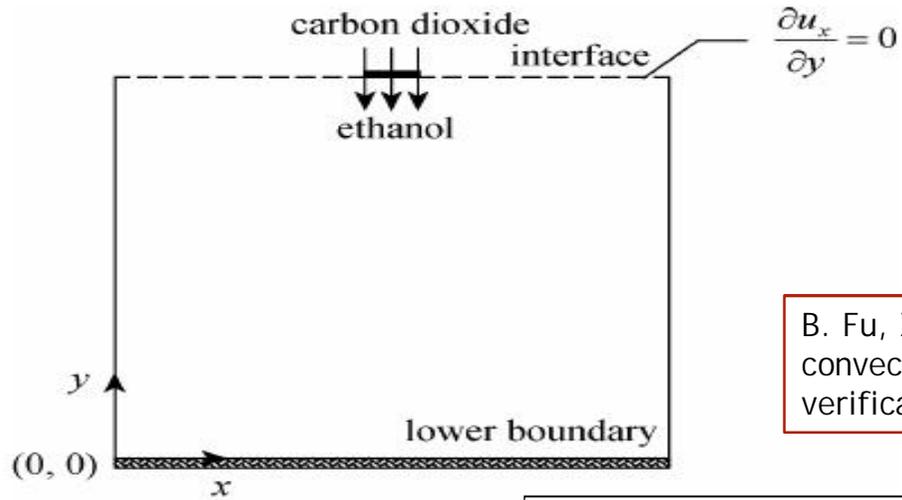
Pour la distribution du CO₂: on utilise la condition limite de type « concentration constante », pour assurer la dissolution du CO₂ dans la saumure.

$$\tilde{C} = \frac{C - (g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_5 + g_6)}{\omega_4 + \omega_7 + \omega_8}$$
$$g_4 = \omega_4 \tilde{C}$$
$$g_7 = \omega_7 \tilde{C}$$
$$g_8 = \omega_8 \tilde{C}$$



Application I:

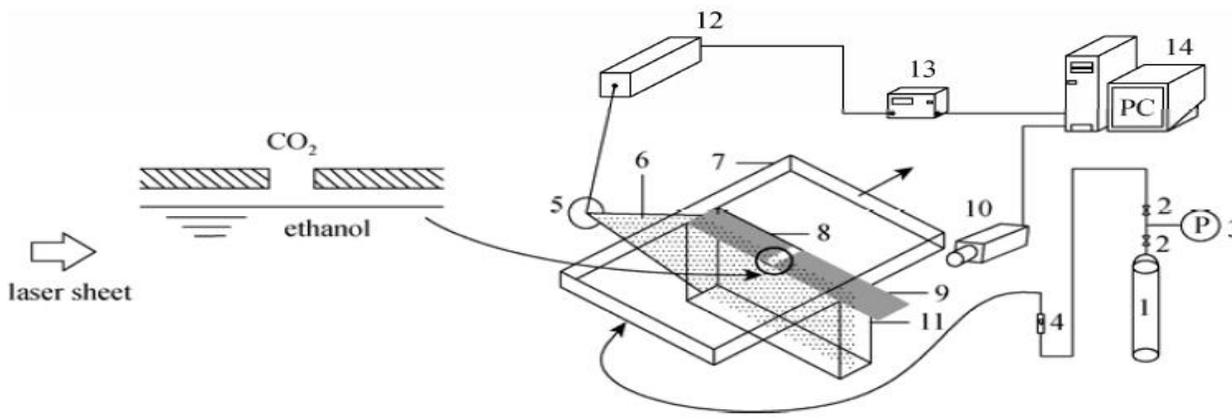
Validation du code de simulation



Étude expérimentale de la convection naturelle par transfert de masse de CO₂ dans l'éthanol

B. Fu, X. Yuan, B. Liu, S. Chen, H. Zhang, A. Zeng, and G. Yu, Characterization of Rayleigh convection in interfacial mass transfer by lattice Boltzmann simulation and experimental verification, *Chinese Journal of Chemical Engineering* 19 (5) (2011) 845-854.

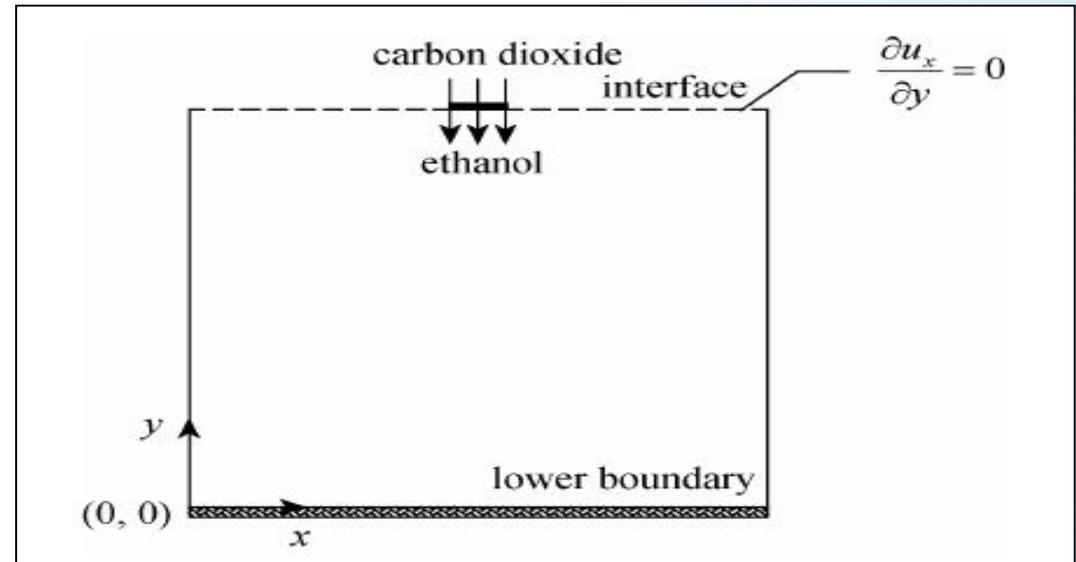
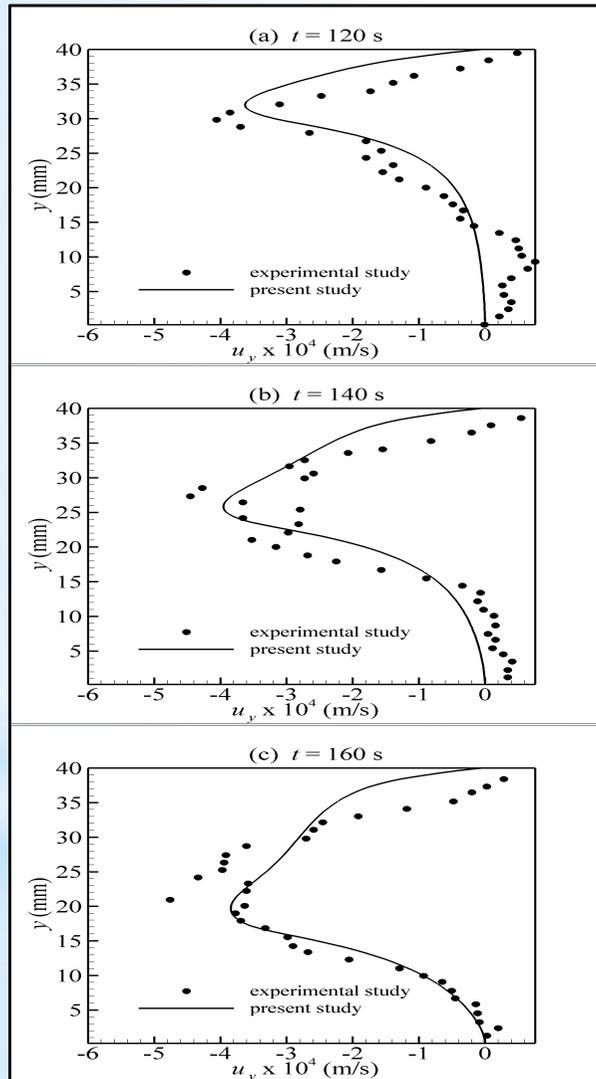
$\rho_A^{(1)}/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\Delta\rho^{(1)}/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$C^{*(1)}/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$D^{(2)}/\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	$\mu^{(3)}/\text{Pa}\cdot\text{s}$
788.9	1.1	5.1	3.4×10^{-9}	1.2×10^{-3}



Particle Image Velocimetry
(PIV system)

Application I:

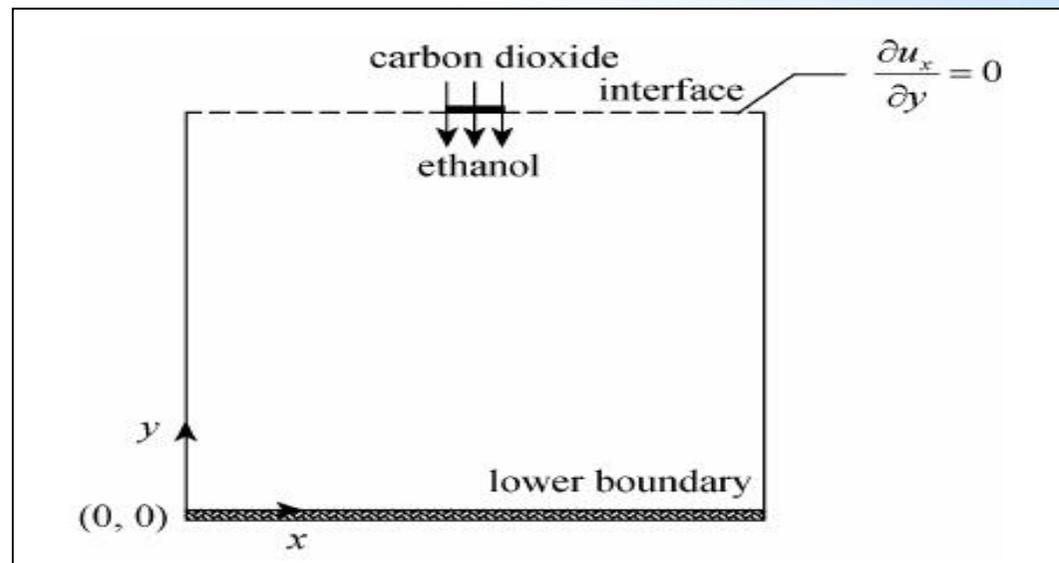
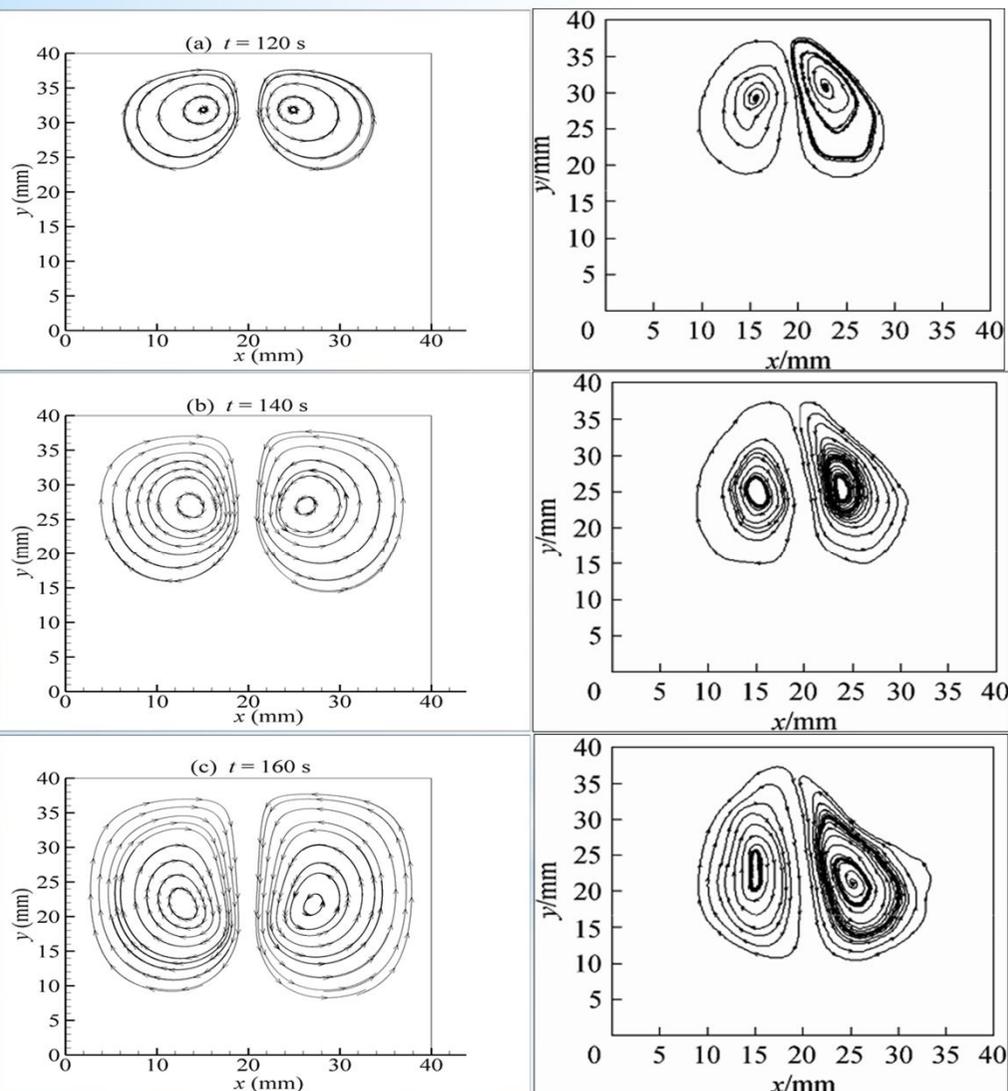
Validation du code de simulation



Comparaison entre les résultats simulés par LBM (ligne continue) et expérimentaux (points noirs) pour la distribution de la vitesse verticale à $x=20$ mm pour différents instants

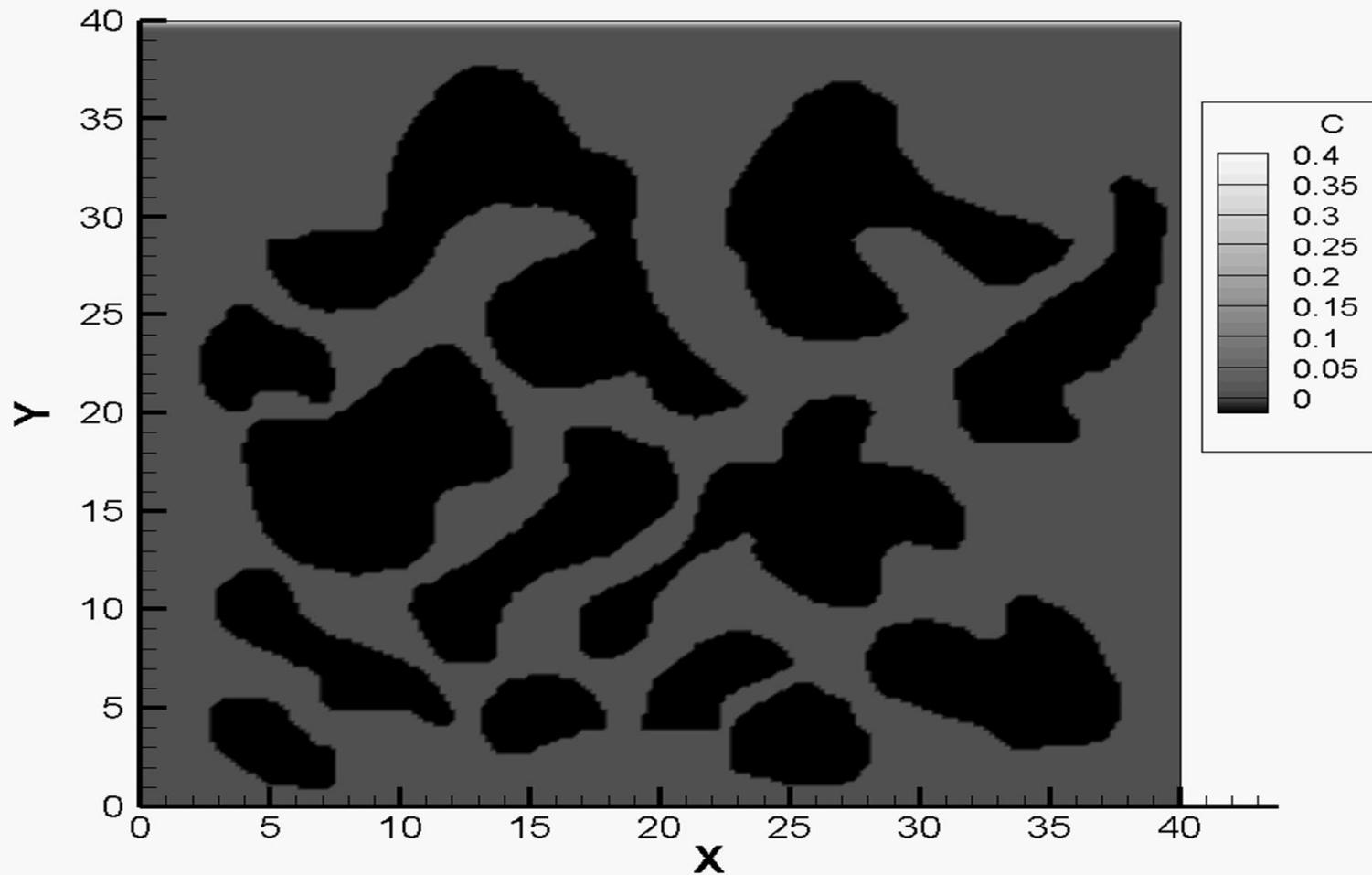
Application I:

Validation du code de simulation

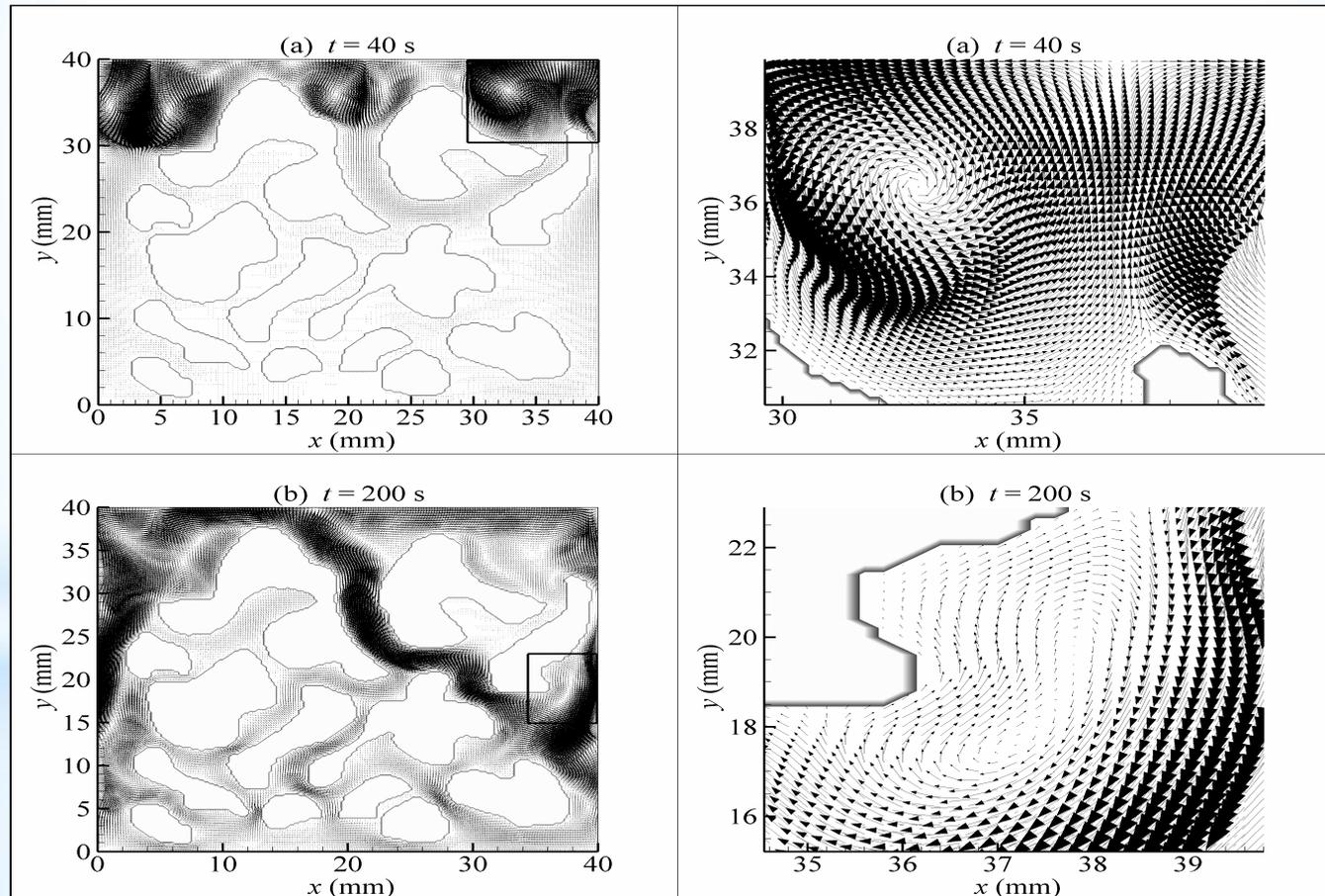


Comparaison entre les résultats simulés par LBM (gauche) et expérimentaux (droite) pour les lignes de courant pour différents instants

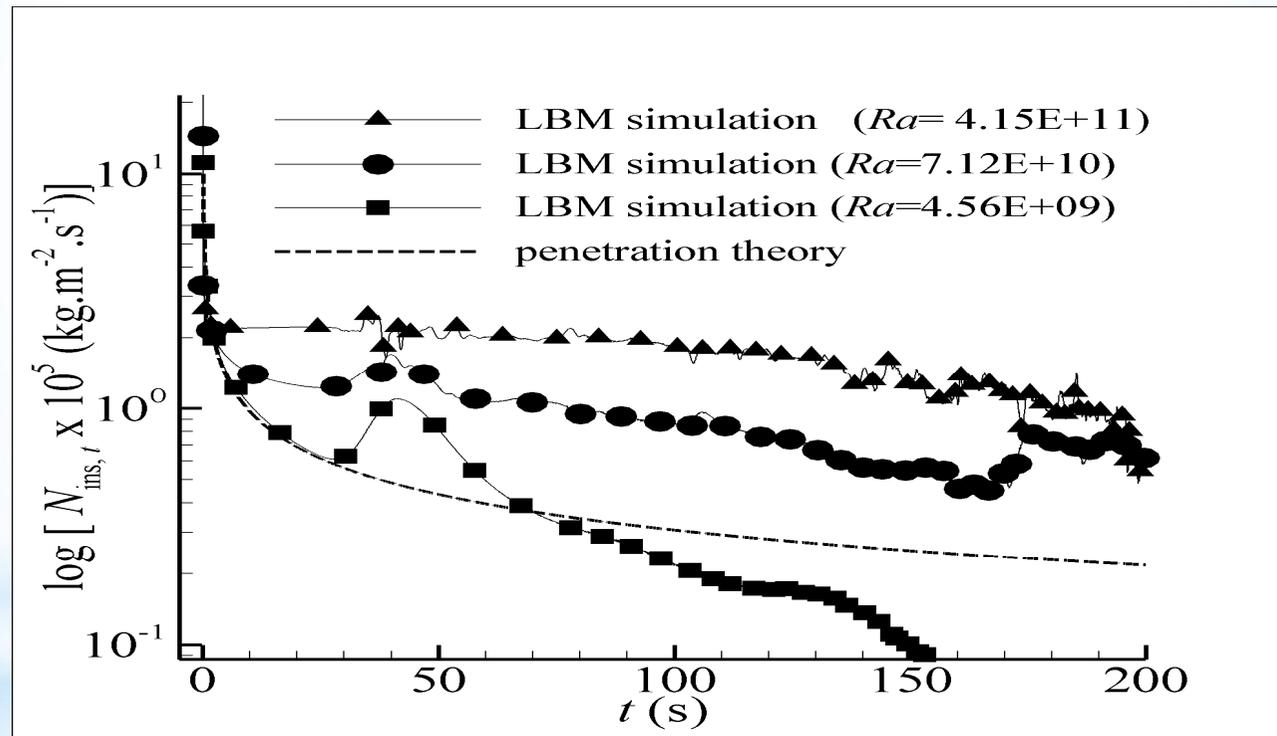
Concentration temporelle de CO2



Vecteurs de vitesse pour différents instants



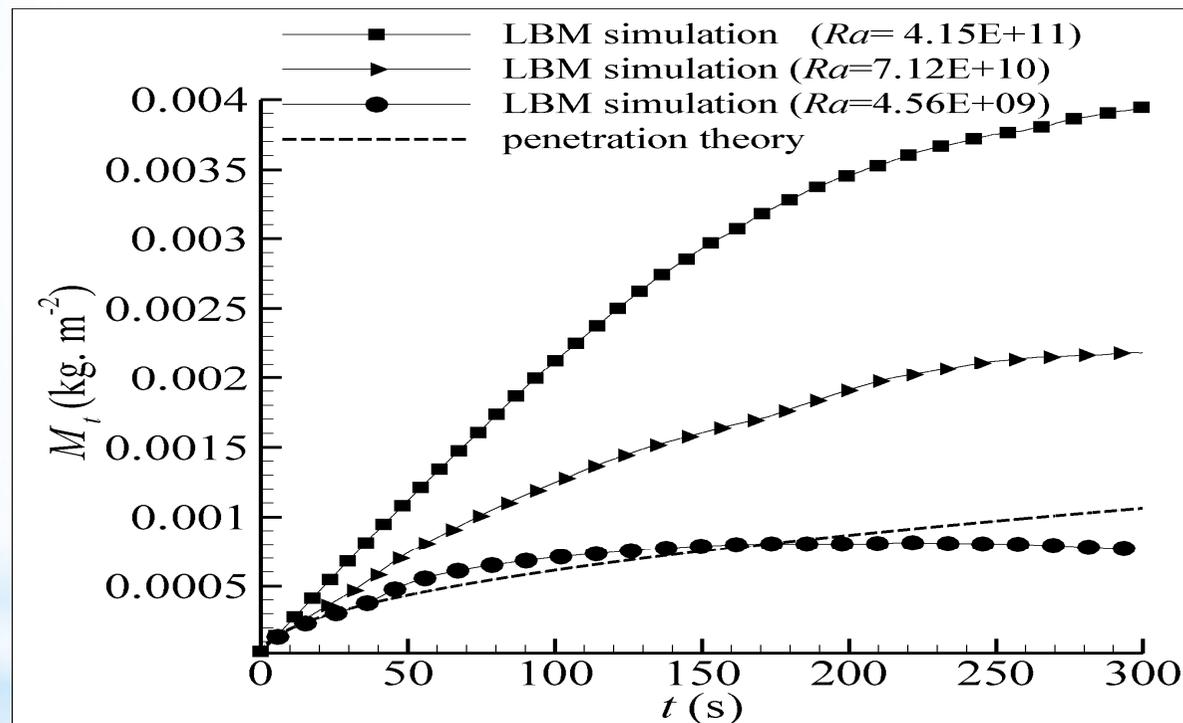
flux de masse instantané



Théorie de pénétration

$$N_{ins,t} = (C_I - C_0) \sqrt{\frac{D}{\pi t}}$$

Quantité de CO2 dissoute dans la saumure



Théorie de pénétration

$$M_t = 2(C_1 - C_0) \sqrt{\frac{D t}{\pi}}$$

Application II:
VAPEX-CO2

Transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO2

* VAPEX-CO2

similaire à

SAGD

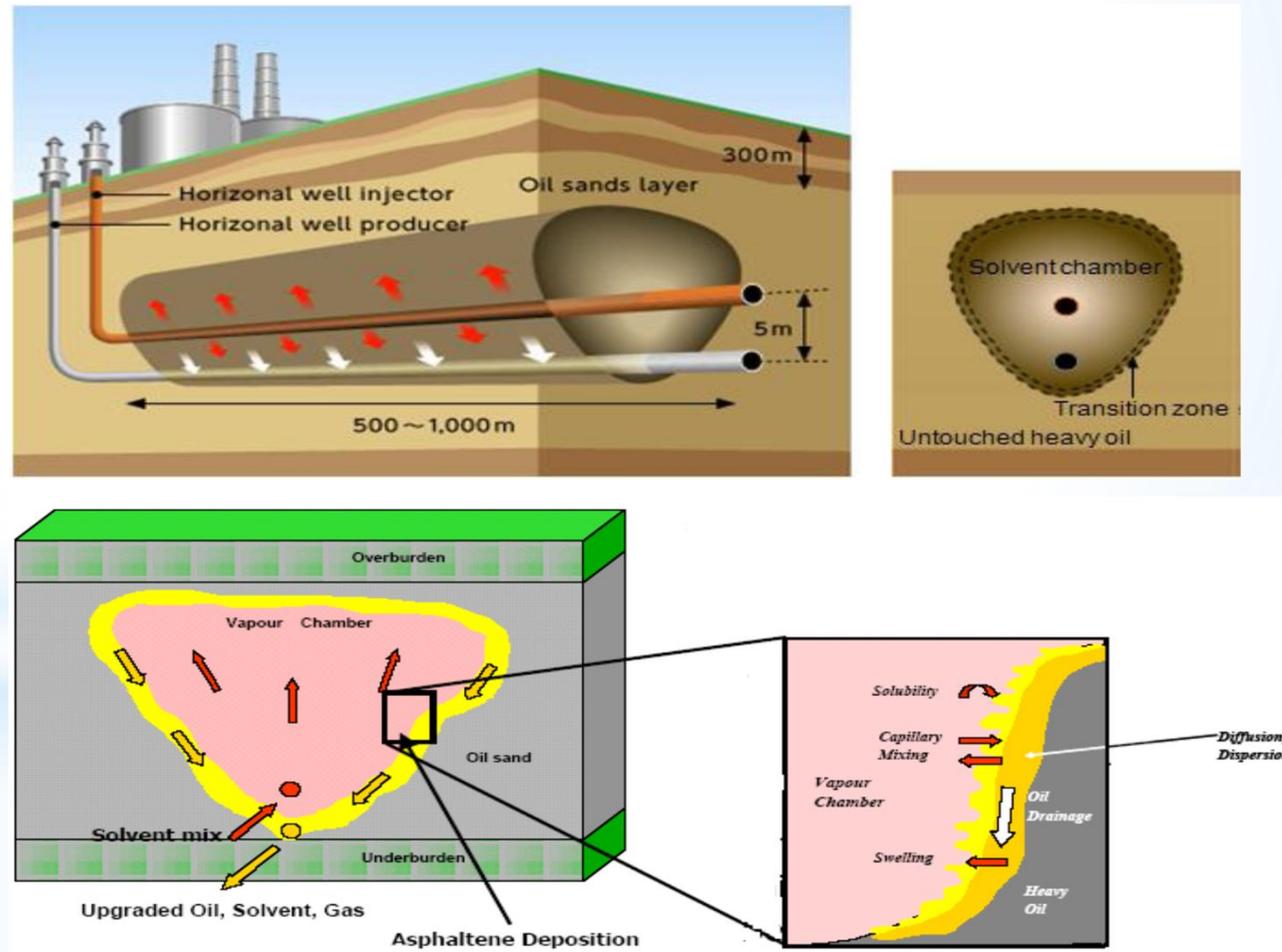
injection de
CO2

injection de la
vapeur d'eau



Application II: VAPEX-CO₂

Schéma descriptif du phénomène de la convection naturelle dans le procédé VAPEX-CO₂



1. Disponibilité de CO₂.
2. Réduction des émissions de CO₂ dans l'atmosphère.
3. Meilleure solubilité de CO₂ dans l'huile lourde / autres solvants.
4. Le CO₂ est moins cher par rapport à d'autres solvants.
5. Le CO₂ peut réduire la viscosité de l'huile lourde.

1. Modélisation macroscopique par les équations de conservations

équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla (\varepsilon p) + \nu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

force de volume \mathbf{F} (équation de Brinkman-Forchheimer)

$$\mathbf{F} = - \frac{\varepsilon \nu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \frac{1.75}{\sqrt{150 \varepsilon \mathbf{k}}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = - \frac{\Delta \rho C g}{\rho} (\vec{y} \cdot \cos(-\theta) + \vec{x} \cdot \sin(-\theta))$$

C : Concentration de CO₂

Conservation de l'espèce chimique

$$\varepsilon \partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \varepsilon \nabla^2 C$$

viscosité dynamique

$$\mu(C_d) = \mu_0 \exp(-\eta C_d)$$

Coefficient de diffusion

$$D(C_d) = D_0 \exp(\lambda C_d)$$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

Equations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = f_i(x, t) - \frac{f_i(x, t) - f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_r} + \delta t F_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

Fonction d'équilibre (Maxwell-Boltzmann)

$$f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = \omega_i \rho \left[1 + \frac{e_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(e_i \cdot \mathbf{u})^2}{\varepsilon c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{\varepsilon c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

τ_r : temps de relaxation entre deux collisions successives

$$\nu_e = (\tau_r - 0.5) \delta x^2 / 3 \delta t$$

$$\tau_r(C_d) = [(\tau_{r0} - 0.5) \exp(-\eta C_d)] + 0.5$$

viscosité dynamique

$$\mu(C_d) = \mu_0 \exp(-\eta C_d)$$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

Equations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_f} + \delta t F_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

Pour incorporer la force de volume on utilise la formule suivant:

$$F_i = \omega_i \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau_f} \right) \left[\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u} \mathbf{F} : \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i)}{\varepsilon c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{\varepsilon c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon \nu}{k} \mathbf{u} - \frac{1.75}{\sqrt{150} \varepsilon k} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = -\frac{\Delta \rho C \mathbf{g}}{\rho} (\vec{\mathbf{y}} \cdot \cos(-\theta) + \vec{\mathbf{x}} \cdot \sin(-\theta))$$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

Conservation de l'espèce chimique

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = g_i(\mathbf{x}, t) - \frac{g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_s} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

Fonction d'équilibre (Maxwell-Boltzmann)

$$g_i^{\text{eq}}(\mathbf{C}, \mathbf{u}) = \omega_i \mathbf{C} \left[1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

τ_s : temps de relaxation entre deux collisions successives relié à l'espèce chimique

$$D = (\tau_s - 0.5) \delta x^2 / 3 \delta t$$

$$\tau_s(\mathbf{C}_d) = [(\tau_{s_0} - 0.5) \exp(\lambda \mathbf{C}_d)] + 0.5$$

Coefficient de diffusion

$$D(\mathbf{C}_d) = D_0 \exp(\lambda \mathbf{C}_d)$$

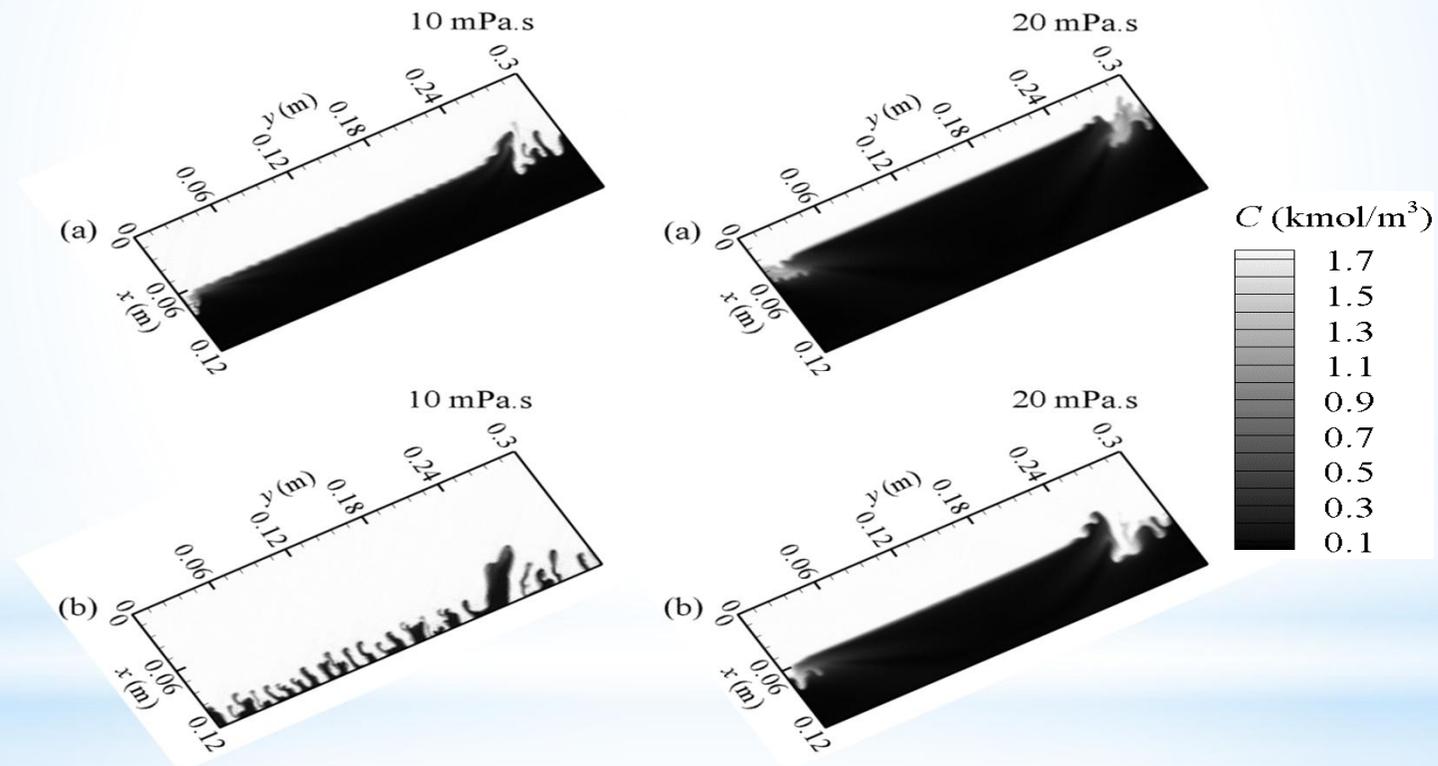
D : coefficient de diffusion massique

Paramètres de simulation

Parameters	Tests		
	Test 1	Test 2	Test 3
	Fluid properties		
μ (mPa.s)	10, 20	10	10
ρ (Kg / m ³)	993	993	993
D (m ² / s)	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}
β (Kg / mol)	8.24×10^{-3}	8.24×10^{-3}	8.24×10^{-3}
C_s (mol / m ³)	1.82×10^3	1.82×10^3	1.82×10^3
$\Delta\rho$ (Kg / m ³)	14.99	14.99	14.99
η	0, 2, 4	0	0
	Boundary layer formation properties		
Porosity	0.35	0.35	0.35
Permeability (Darcy)	2400	1800, 2400	2400
θ (°)	60	60	30, 60

Application II: VAPEX-CO2

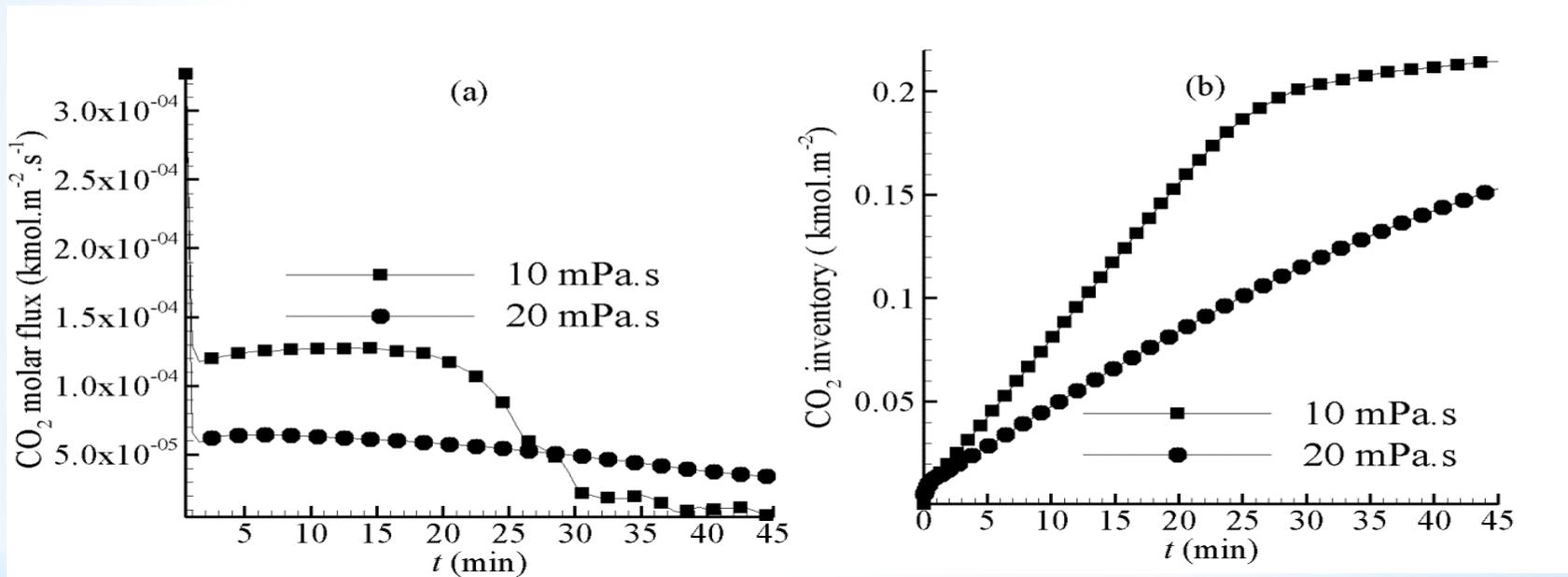
Test 1 : étude de l'effet de la viscosité de pétrole sur le transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO2



Contours de concentration de CO₂ pour deux viscosités différentes

Application II: VAPEX-CO2

Test 1 : étude de l'effet de la viscosité du pétrole sur le transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO2

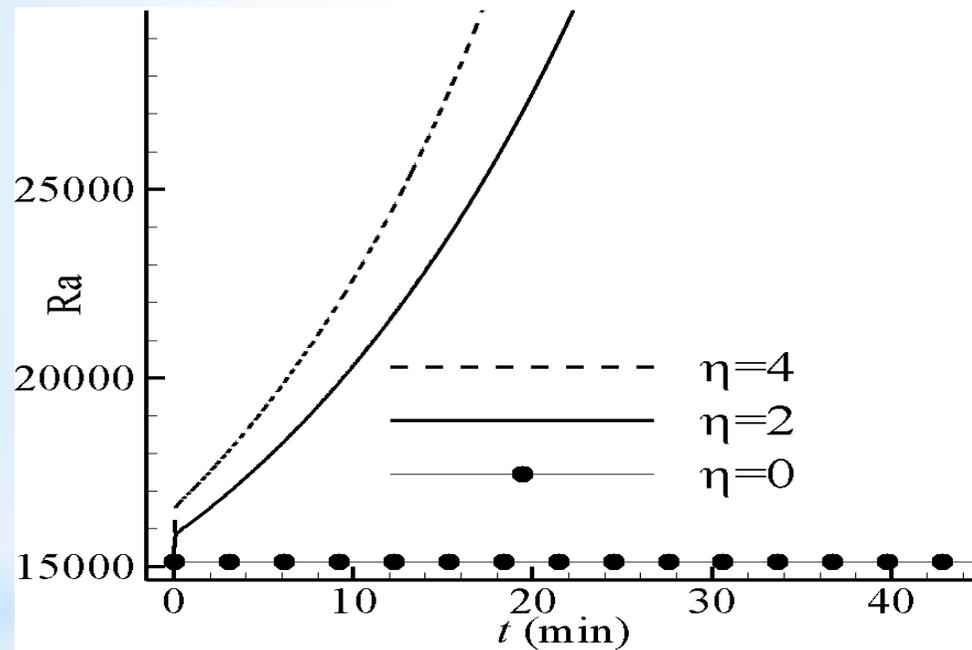


(a) Flux molaire de CO₂ pour deux viscosités différentes.

(b) Quantité de CO₂ dissoute dans le pétrole pour deux viscosités différentes.

Application II: VAPEX-CO2

Test 1 : étude de l'effet de la viscosité du pétrole sur le transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO2



viscosité dynamique

$$\mu (C_d) = \mu_0 \exp(-\eta C_d)$$

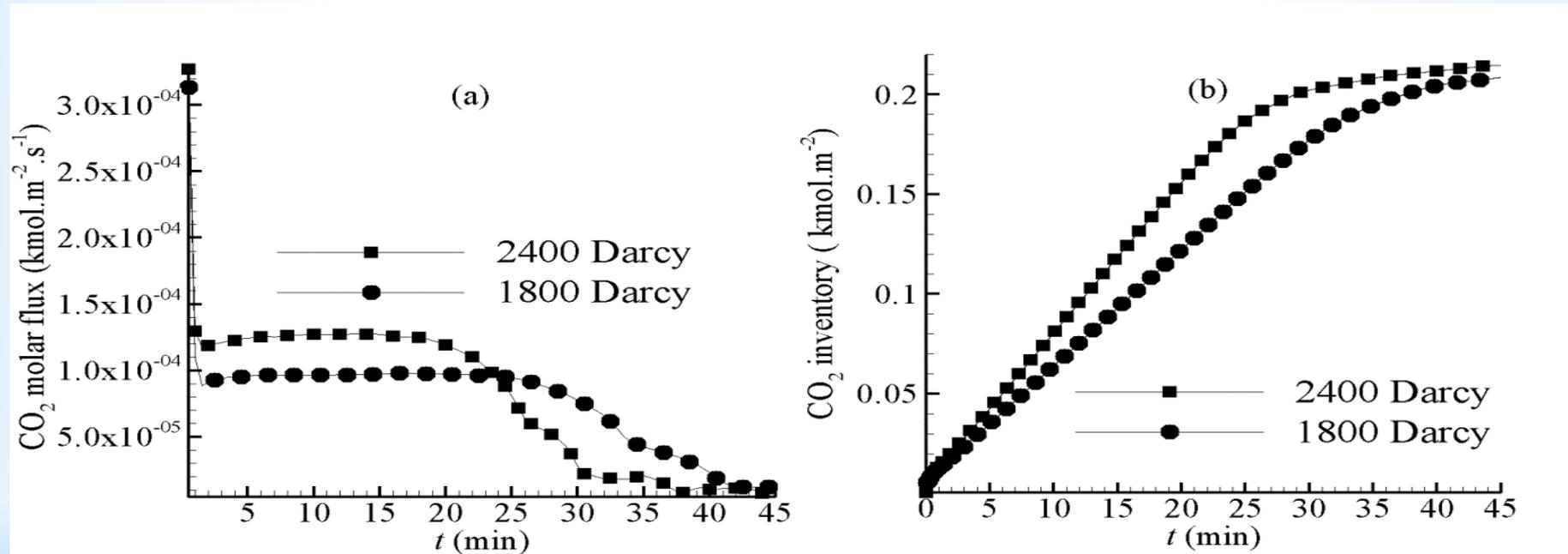
Coefficient de diffusion

$$D (C_d) = D_0 \exp(\lambda C_d)$$

Nombre de Rayleigh transitoire vs. Coefficient de viscosité

Application II:
VAPEX-CO₂

Test 2 : étude de l'effet de la perméabilité du gisement sur le transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO₂

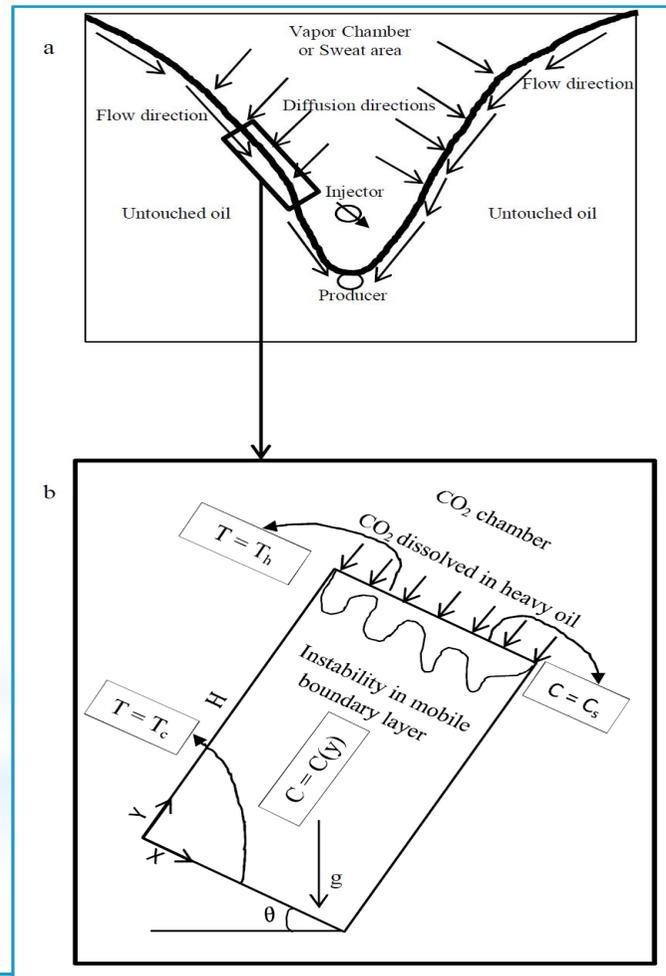


(a) Flux molaire de CO₂ pour deux perméabilités différentes.

(b) Quantité de CO₂ dissoute dans le pétrole pour deux perméabilités différentes.

Application III: Heated-VAPEX-CO₂

Étude de l'effet de la Température sur le transfert de masse dans le procédé VAPEX-CO₂



Heated-VAPEX-CO₂

1. Modélisation macroscopique par les équations de conservations

équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla (\varepsilon p) + \nu_e \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

viscosité dynamique

$$\mu(C_d) = \mu_0 \exp(-\eta C_d)$$

Coefficient de diffusion

$$D(C_d) = D_0 \exp(\lambda C_d)$$

force de volume \mathbf{F} (équation de Brinkman-Forchheimer)

$$\mathbf{F} = - \frac{\varepsilon \nu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \frac{1.75}{\sqrt{150 \varepsilon \mathbf{k}}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = g (\beta_c (C - C_0) + \beta_T (T - T_0)) \cdot (\vec{x} \cdot \sin \theta + \vec{y} \cdot \cos \theta)$$

C : Concentration de CO₂

Coefficient de variation

$$\beta_c = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial C} \right]_T$$

$$\beta_T = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_C$$

Conservation de l'espèce chimique

$$\varepsilon \partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \varepsilon \nabla^2 C$$

+

Equation de transfert de chaleur

$$\partial_t T + \frac{\mathbf{u}}{\sigma} \cdot \nabla T = \frac{\alpha_e}{\sigma} \nabla^2 T$$

1. Modélisation macroscopique par les équations de conservations

Equation de transfert de chaleur

$$\partial_t T + \frac{\mathbf{u}}{\sigma} \cdot \nabla T = \frac{\alpha_e}{\sigma} \nabla^2 T$$

Rapport de Chaleur spécifique

$$\sigma = \left[\varepsilon (\rho c)_f + (1 - \varepsilon) (\rho c)_s \right] / (\rho c)_f$$

Diffusivité thermique effective

$$\alpha_e = \lambda_e / (\rho c)_f$$

conductivité thermique équivalente

$$\lambda_e = \varepsilon \lambda_f + (1 - \varepsilon) \lambda_s$$

2. Modélisation mésoscopique par l'équation de Boltzmann

Equation de transfert de chaleur

$$T_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = T_i(x, t) - \frac{T_i(x, t) - T_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})}{\tau_r} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 8)$$

Fonction d'équilibre (Maxwell-Boltzmann)

$$T_i^{eq}(C, \mathbf{u}) = \omega_i T \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{\sigma c_s^2} \right]$$

$$c_s = c / \sqrt{3} \quad (\text{vitesse du son dans le réseau de Boltzmann})$$

τ_r : temps de relaxation entre deux collisions successives relié à la diffusivité thermique

$$\alpha_e = \sigma (\tau_r - 0.5) \delta x^2 / 3 \delta t .$$

α_e : Diffusivité thermique effective

Application III: Heated-VAPEX-CO2

Résultats & discussions

Paramètres de simulation

Test 1: Rapport de la flottabilité N

Test 2: nombre de Prandtl

Parameters	Tests	
	buoyancy ratio $N = \frac{\Delta\rho_C}{\Delta\rho_T}$	Prandtl number $Pr = \frac{\nu}{\alpha_e}$
	Fluid properties	
μ (mPa.s) ¹	5	5, 10
ρ (Kg / m ³) ¹	993	993
D (m ² / s) ¹	1×10^{-9}	1×10^{-9}
λ_f (W / m.C ⁰) ²	0.133	0.133
$(\rho c)_f$ (J / m ³ .C ⁰) ³	2.079E+6	2.079E+6
β_C (Kg / mol) ¹	8.24E-3	8.24E-3
C_s (mol / m ³) ¹	1.82 E+3	1.82 E+3
$\Delta\rho_C$ (Kg / m ³) ¹	14.99	14.99
β_T (1 / C ⁰) ⁴	7.2E - 4	7.2E - 4
$\Delta\rho_T$ (Kg / m ³)	7.495, 1.499	7.495
	Boundary layer formation properties	
Porosity ⁵	0.35	0.35
Permeability (Darcy) ⁵	1800	1800
θ (°) ¹	30	30
$(\rho c)_s$ (J / m ³ .C ⁰) ²	2.6E+6	2.6E+6
λ_s (W / m.C ⁰) ²	7.64	7.64

Application III:
Heated-VAPEX-CO2

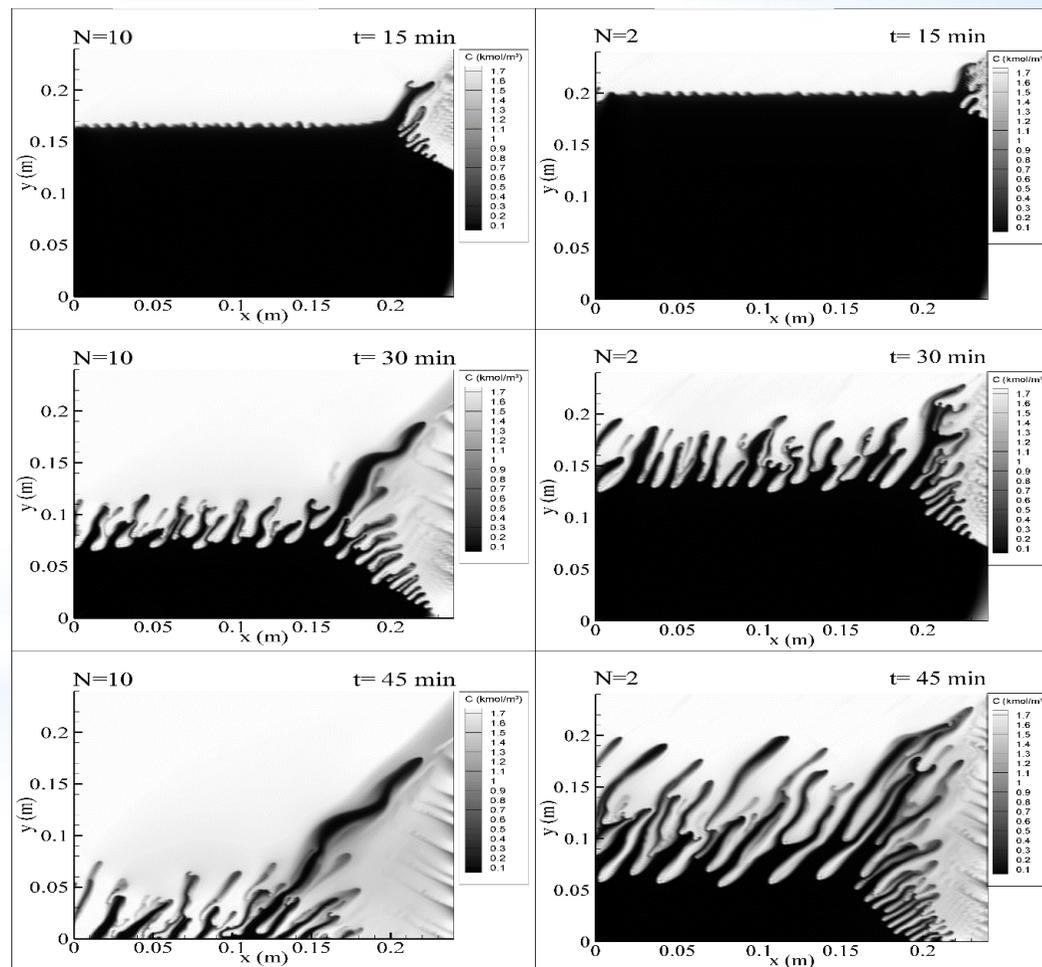
Test 1: Rapport de flottabilité N

$$N = \frac{\Delta\rho_C}{\Delta\rho_T}$$

N = 10

N = 2

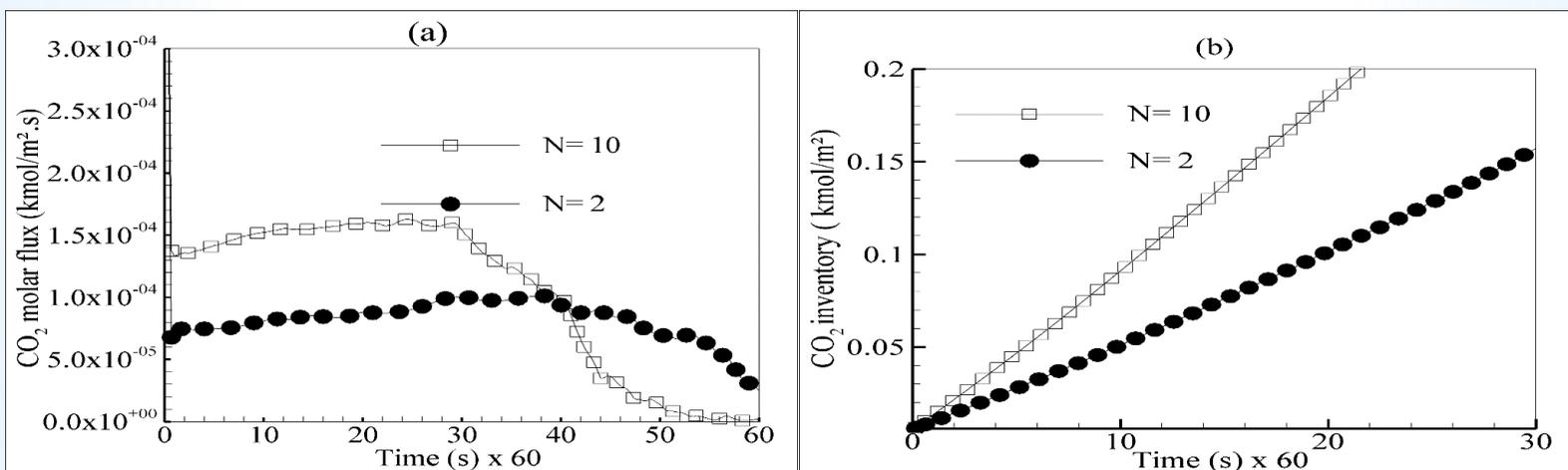
Contours de concentration de CO2 pour deux rapports différents de flottabilité



Application III: Heated-VAPEX-CO2

Test 1: Rapport de la flottabilité N

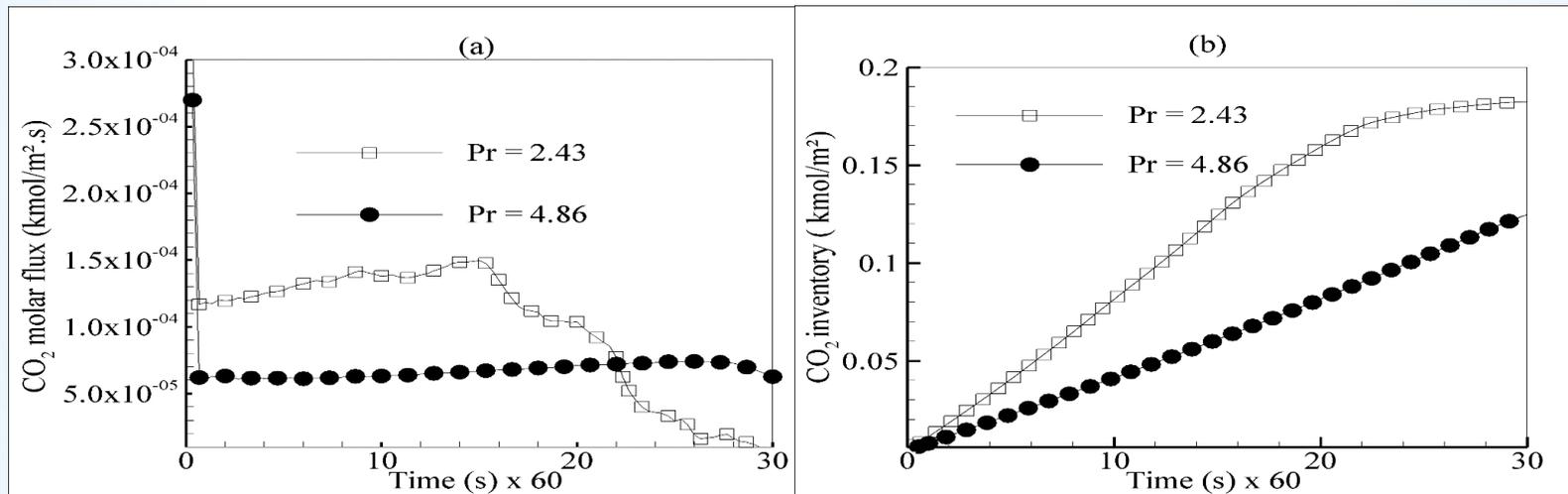
$$N = \frac{\Delta\rho_C}{\Delta\rho_T}$$



(a) Flux molaire de CO₂ pour deux rapports différents de flottabilité .

(b) Quantité de CO₂ dissoute dans le pétrole deux rapports différents de flottabilité

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_e}$$



(a) Flux molaire de CO₂ pour deux nombres différents de Prandtl.

(b) Quantité de CO₂ dissoute dans le pétrole pour deux nombres différents de Prandtl

Conclusions

- ❑ Les émissions de CO₂, par leur contribution à l'effet de serre de notre planète, sont devenues un enjeu et une question clé dans les préoccupations environnementales à cause de leur responsabilité avérée sur les changements climatiques.
- ❑ Donc, il faut trouver des solutions pour atténuer les émissions de CO₂. Parmi ces solutions on trouve l'injection de CO₂ dans les gisements pour la séquestration et la récupération assistée du pétrole/gaz.
- ❑ A titre d'application, Un code numérique fondé sur la technique Boltzmann sur Réseau, pour le transfert de chaleur et de la masse a été développé. Il permet d'étudier la convection naturelle, massique et thermosolutale dans le domaine de séquestration géologique de CO₂ avec la récupération assistée du pétrole/gaz.
- ❑ Les résultats de cette technique testée sur des configurations bidimensionnelles montrent l'aptitude de la méthode LBM à simuler avec une bonne précision les phénomènes qui caractérisent la convection naturelle en milieux poreux.
- ❑ L'étude numérique a été étendue à l'estimation des paramètres physiques caractéristiques de la convection naturelle comme les contours de concentration de CO₂, flux molaire de CO₂ et la quantité de CO₂ dissoute dans la saumure et dans le pétrole.
- ❑ L'amélioration du transfert de masse entre le CO₂ et le liquide de formation (eau/pétrole) peut s'effectuer par l'amélioration de nombre de Rayleigh.
- ❑ Dans le procédé VAPEX-CO₂, L'amélioration du transfert de masse peut s'effectuer par l'augmentation de la perméabilité de réservoir et la diminution de la viscosité du pétrole.
- ❑ Aussi, les résultats numériques ont montré que l'effet thermique a des conséquences négatives sur les performances du procédé VAPEX-CO₂.

REFERENCES

Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC press; 1980.

Popa, I., 2002. Modélisation numérique du transfert thermique. Méthode des volumes finis. *Universitaria Craiova*.

1. T. Xing, S. Bhushan and F. Stern, *Introduction to Computational Fluid Dynamics (CFD)*, 57:020 Mechanics of Fluids and Transport Process, <http://css.engineering.uiowa.edu/~fluids/>, 2009.
2. *CFD-Wiki*, [http://www.cfd-online.com/Wiki/Main Page](http://www.cfd-online.com/Wiki/Main_Page)
3. J.H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1996.
4. C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Vol. I and II. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
5. P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2001.
6. S. Turek, *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic and Computational Approach*, LNCSE 6, Springer, 1999.
7. J. Donea and A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, 2003.

Documentation

Reviews

- www.scirus.com (Elsevier)
 - Computers and Fluids
 - Int. J. Heat and Fluid Flow
 - Solar Energy (Elsevier)
 - J. of Wind Engineering and industrial aerodynamics
- ASME J of Solar Energy Engineering
- Wind Engineering
(www.multi-sciences.co.uk/windeng.htm)
- Wind Energy
(www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/jhome/6276)

- **Versteeg, H.K. and Malalasekera, W.**, An Introduction to Computational Fluid Dynamics Ed. PEARSON - Prentice Hall (1995) - ISBN 0 - 582 - 21884 - 5
- **Ferziger J.H. and Peric M.**, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, third edition, 2002
- **Patankar S.V.**, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Pub. Corp., McGraw-Hill Book Cie, 1980
- **Hirsch, C.**, Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1 et 2, Wiley interscience series in numerical methods in engineering, 1994
- **Fletcher, C.A.J.**, Computational techniques for fluids dynamics. Vol. 1 et 2, Springer-Verlag, second edition, 1991

Ouvrages généraux

- **Ryhming, L.**, Dynamique des fluides, Presses polytechnique et universitaires romandes, 1991
- **Schlichting, H.**, Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill Book company, 7th ed., 1979
- **Cousteix, J.**, Turbulence et couche limite, Cepadues-Edition, 1989



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

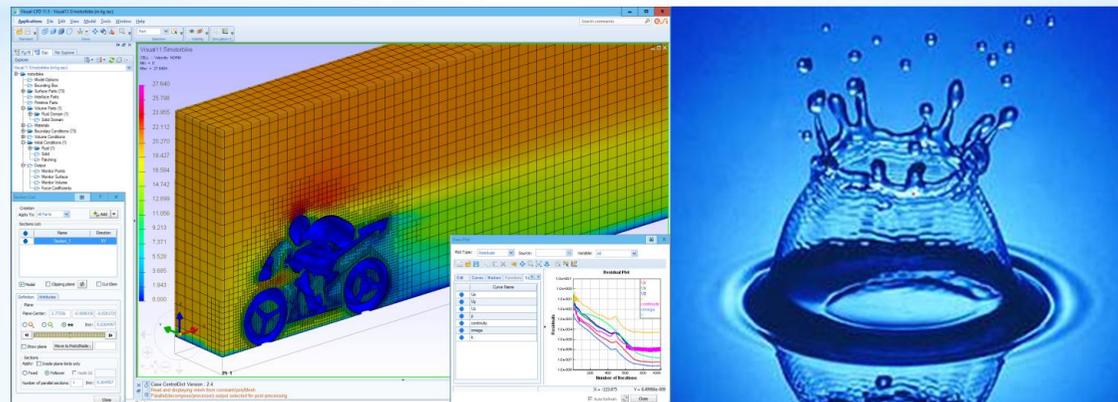


Cours de Méthode de Volume Finis

Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Energétique

Présentée par :

Dr. ATIA Abdelmalek



2019-2020

Contenu de Cours

Semestre : 2
Unité d'enseignement : UEM 1.2
Matière : Méthode des volumes finis
VHS : 45h00 (cours: 01h30, TP:1h30)
Crédits : 4
Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement:

- Maîtriser la discrétisation des EDP par la méthode des volumes finis.
- Résoudre les équations discrétisées par des algorithmes de calcul (SIMPE, SIMPLER...)
- Permettre aux étudiants d'élaborer des codes de calculs en volumes finis.

Connaissances préalables recommandées :

Méthodes numériques approfondies

Contenu de la matière :

- Chapitre 1 :** Généralités sur le calcul de dynamique des fluides (CFD). (1semaine)
Chapitre 2 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion. (2semaines)
Chapitre 3 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion. (3semaines)
Chapitre 4 : Les algorithmes de solution (SIMPLE, SIMPLER, PISO). (3semaines)
Chapitre 5 : Solution des équations algébriques discrétisées. (2semaines)
Chapitre 6 : La méthode des volumes finis pour les écoulements transitoires. (2semaines)
Chapitre 7 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion (méthode $\psi-\omega$). (2semaines)

Mode d'évaluation:

Contrôle Continu : 40%, Examen : 60%.

Références bibliographiques:

1. H.K. Versteeg, W. Malasasekera, "Introduction to Computational Fluid Dynamics: The finite method (2nd Edition)", Pearson, Prentice Hall, 2007.
2. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, Washington, DC,

Connaissances préalables recommandées :

Méthodes numériques approfondies

Contenu de la matière :

- Chapitre 1 :** Généralités sur le calcul de dynamique des fluides (CFD). (1semaine)
Chapitre 2 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion. (2semaines)
Chapitre 3 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion. (3semaines)
Chapitre 4 : Les algorithmes de solution (SIMPLE, SIMPLER, PISO). (3semaines)
Chapitre 5 : Solution des équations algébriques discrétisées. (2semaines)
Chapitre 6 : La méthode des volumes finis pour les écoulements transitoires. (2semaines)
Chapitre 7 : La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion (méthode $\psi-\omega$). (2semaines)

Chapitre II :

La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion

1. Introduction sur la méthode des volumes finis
2. les équations de diffusion
3. Application de la MVF sur les Problèmes de diffusion

1. Introduction sur la méthode des volumes finis

MVF

Appellation des méthode DF, EF et VF

Passage de la méthode DF à la méthode de VF

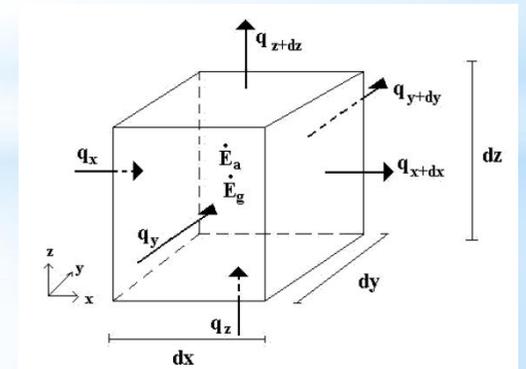
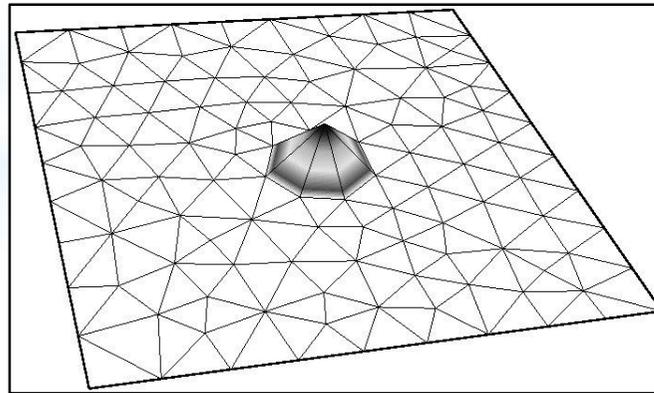
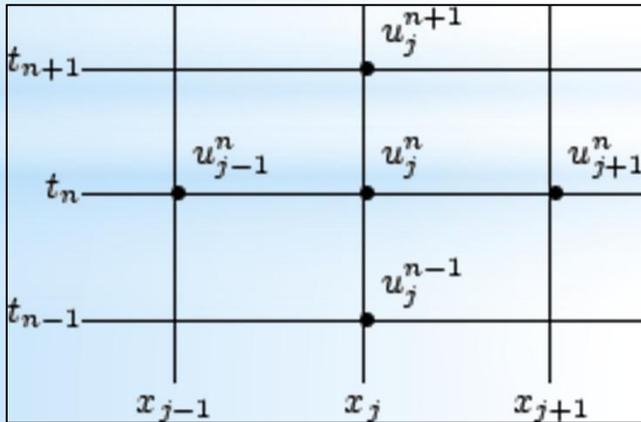
Différence entre les méthodes

Équation de transport

Technique de la méthode de VF

Appellation des méthode DF , EF et VF

		Parce que la solution est envers une valeur bien définis
Méthode de	Différences	Finis
Méthode de	Éléments	Finis
Méthode de	Volumes	Finis

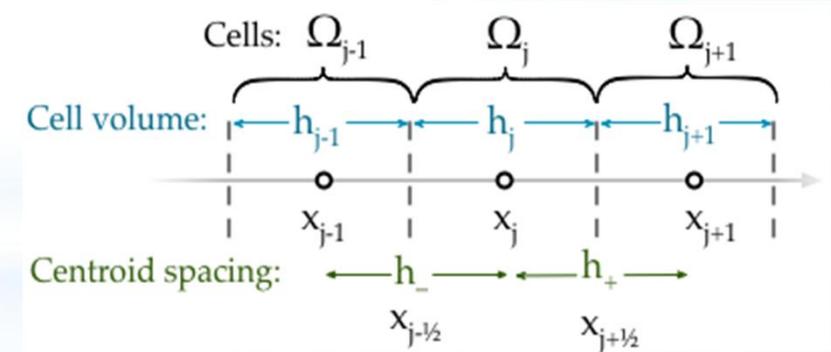
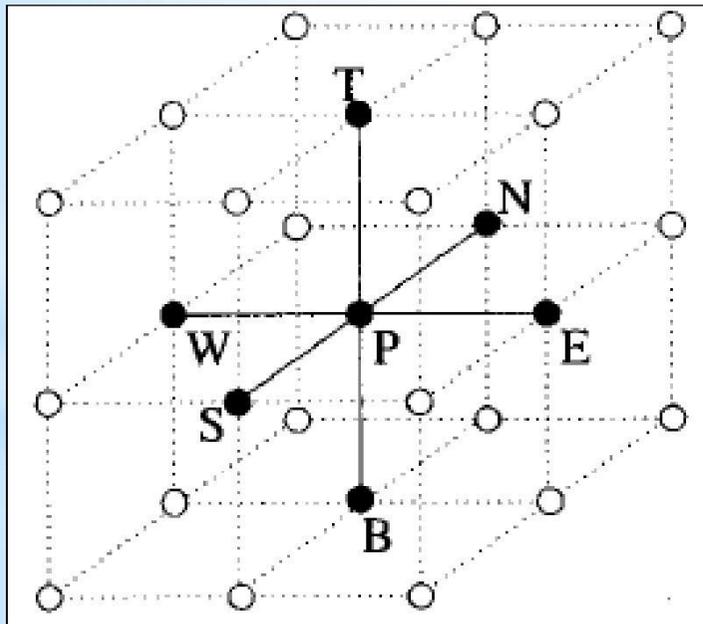


DF

EF

VF

Appellation des méthode DF , EF et VF

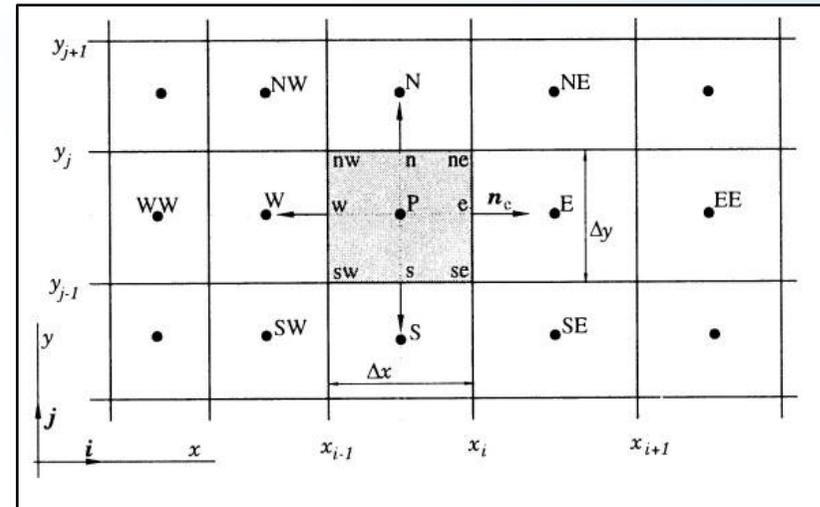
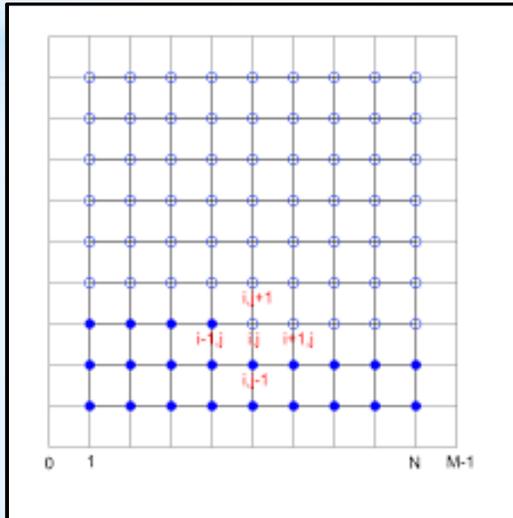


DF en 3D

VF en 1D

Passage de la méthode DF à la méthode de VF

méthode DF	méthode de VF
Mathématique	Physique
developpement de Taylor	Intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle
Non adapté pour le maillage non structuré	adapté pour le maillage non structuré
La solution dans les nouds de maillage	La solution dans les centres de maillage



Différence entre les méthodes DF , EF et VF

Méthode "Volumes Finis"

└ CFD : Principales méthodes

CFD : Principales méthodes

Différences finies

Approximation des dérivées intervenant dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor

Elements finis

Détermination d'un champ local attribué à chaque sous-domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème (bilan global).

Volumes finis

Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle

Différences finies

Le principe de la méthode se découle directement de la définition de dérivée :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \quad (1)$$

Série de Taylor pour une fonction continue $\phi(x)$ aux alentours de x_i :

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \phi(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \\ & \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H \end{aligned} \quad (2)$$

où H représente les termes d'ordre supérieurs *Higher order terms*

Différences finies

En remplaçant x par x_{i+1} ou x_{i-1} dans (2) on obtient :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i - \\ &\quad \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + H \end{aligned} \quad (5)$$

Différences finies

Exemple d'approximation

$$\text{Forward Difference (FD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (6)$$

$$\text{Backward Difference (BD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

$$\text{Central Difference (CD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (8)$$

Différences finies

Exemple d'approximation

$$\text{Forward Difference (FD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (6)$$

$$\text{Backward Difference (BD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

$$\text{Central Difference (CD)} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (8)$$

L'erreur de troncature

- $\mathcal{O}(\Delta x)$ pour *FD* et *BD*
- $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ pour *CD*

Introduction à la méthode des volumes finis

En quoi consiste la méthode ?

- Construire un maillage
- Déterminer les valeurs de ϕ en chaque point (ou cellule) du maillage
 - Intégration des équations différentielles par méthode numérique pour chaque noeud
 - Résolution du système d'équations algébriques résultant par méthode itérative

Équation de transport

Introduction à la méthode des volumes finis

- Equation de transport :

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \vec{V} \phi) = \mathbf{div} [\Gamma_{\phi} (\mathbf{grad} \phi)] + S_{\phi}$$

- $\phi = 1$: Equation de continuité
- $\phi = u, v$ ou w : Equations de quantité de mouvement
- $\phi = T$: Equation pour la température
- $\phi = k, \varepsilon, \omega$ ou μ_t : Equations de turbulence

- $(\rho \vec{V} \phi)$: Terme de convection
- $[\Gamma_{\phi} (\mathbf{grad} \phi)]$: Terme de diffusion
- S_{ϕ} : Terme source

Introduction à la méthode des volumes finis

Termes sources :

- 1 Gradient de pression pour les équations de quantité de mouvement
- 2 Forces centrifuges et de Coriolis pour les équations de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques
- 3 Dérivée substantielle de la pression pour l'équation de l'énergie
- 4 Fonction de dissipation de l'énergie mécanique en chaleur pour l'équation de l'énergie

2.1.5 Forme conservative et non conservative des équations modèles

L'équation (2.9) qui est la forme conservative générale des équations modèles peut être explicitée ainsi :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{u} \text{grad } \Phi + \Phi \text{div}(\rho \bar{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S . \quad (2.11)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u} \text{grad } \Phi \right) + \Phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) \right) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S , \quad (2.12)$$

où le terme ci-dessous représente la dérivée particulière :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u} \text{grad } \Phi \right) = \frac{d\Phi}{dt} , \quad (2.13)$$

et le terme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 , \quad (2.14)$$

représente l'équation de continuité.

Finalement l'équation (2.12) s'écrit sous la forme non conservative ainsi :

$$\rho \frac{d\Phi}{dt} = \text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S \quad (2.15)$$

Remarque: Par la méthode des volumes finis on part uniquement de la forme conservative des équations modèles.

A.4 Divergence d'un vecteur

Soit le vecteur \vec{V} de composantes (V_x, V_y, V_z) . La divergence de ce vecteur est définie par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

A.5 Vecteur gradient

Soit $P = P(x, y, z)$ une fonction scalaire. Le gradient de P est défini par le vecteur :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}$$

On définit l'opérateur du 1^{er} ordre (Hamiltonien ou encore Nabla) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

donc on peut écrire :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \vec{\nabla} P$$

μ – coefficient de viscosité de cisaillement pur (viscosité dynamique) ;

γ – coefficient de viscosité d'expansion volumique ;

λ – conductivité thermique (coefficient de diffusion thermique) ;

c_p – chaleur massique à pression constante ;

D_j – coefficient de diffusion massique (loi de Fick) ;

$\overline{\overline{\tau}}$ – tenseur des contraintes de viscosité ;

\vec{g} – gravité ;

β – coefficient de dilatation thermique ;

h – l'enthalpie massique ;

m_j – fraction massique de l'espèce j .

Continuity equation

- Summing all terms in the previous slide and dividing by the volume $\delta x \delta y \delta z$ results in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- In vector notation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Change in density

Net flow of mass across boundaries
Convective term

- For incompressible fluids $\partial \rho / \partial t = 0$, and the equation becomes:
 $\text{div} \mathbf{u} = 0$.
- Alternative ways to write this: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ and $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

Navier-Stokes equation for incompressible flow of Newtonian (constant viscosity) fluid

- derived from conservation of momentum



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

Pressure term:
Fluid flows in the
direction of
largest change
in pressure

The area A is constant for a plane wall \rightarrow the one dimensional transient heat conduction equation in a plane wall is

Variable conductivity:
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-13)$$

Constant conductivity:
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (2-14)$$

The one-dimensional conduction equation may be reduces to the following forms under special conditions

{	1) Steady-state:	$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0 \quad (2-15)$
	2) Transient, no heat generation:	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-16)$
	3) Steady-state, no heat generation:	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2-17)$

Technique de la méthode de volume finis

Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis" ?

Différences finies

- Bien connue
- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple
- Mise en œuvre difficile pour une géométrie complexe
- Pas toujours conservative
- Utilisation dans des codes de "recherche"

Eléments finis

- Approche très "mathématique"
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Difficultés pour résoudre les termes non-linéaires
- Très utilisée dans le domaine de Mécanique des Solides et pour des problèmes multi-physique (Comsol, ex FemLab).

Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis" ?

Volumes finis

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-lineaires hyperboliques
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tout les codes généralistes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL), OpenFoam (Libre)...

3.5 Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [50]).

Principe. La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des

équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire Φ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\oint_A (\rho \Phi \vec{v}) d\vec{A} = \oint_A (\Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) d\vec{A} + \int_{VC} S_\Phi dV, \quad (3.7)$$

où

ρ - la densité du fluide ;

\vec{v} - le vecteur vitesse ($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$) ;

\vec{A} - le vecteur l'aire de la surface ;

Γ_Φ - le coefficient de diffusion de la grandeur Φ ;

$\text{grad } \Phi$ - le gradient de Φ ($\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}$ en 2D) ;

S_Φ - le terme source (la source de Φ par unité de volume).

L'équation (3.7) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\Phi (\nabla \Phi)_n A_f + S_\Phi V, \quad (3.8)$$

où : N_{faces} - le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle ;

Φ_f - la valeur de Φ transférée par convection à travers l'interface f ;

v_f - le flux de masse à travers l'interface f ;

A_f - l'aire de l'interface f ($|\vec{A}| = |A_x\vec{i} + A_y\vec{j}|$ en 2D) ;

$(\vec{\nabla}\Phi)_n$ - la valeur de $\vec{\nabla}\Phi$ normal (perpendiculaire) à l'interface f ;

V - le volume du volume de contrôle.

Les différentes étapes de la mise en oeuvre sont :

- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les noeuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un noeud donné sont évaluées en approchant la variation de Φ par des profils ou des lois d'interpolation entre les noeuds voisins du point considéré ;
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de Φ aux noeuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

Résumé

Résumé

Equation à résoudre

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V} \phi) = \text{div} [\Gamma_{\phi} (\vec{\text{grad}} \phi)] + S_{\phi}$$

Résumé

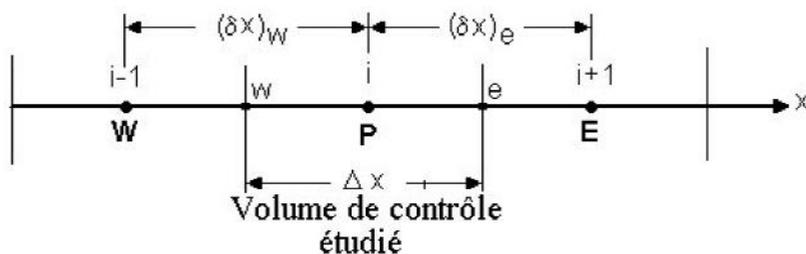
Introduction à la méthode des volumes finis

Equation à résoudre

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}\phi) = \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] + S_\phi$$

Intégration sur un volume Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\rho\vec{V}\phi) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}[\Gamma_\phi(\vec{\text{grad}}\phi)] \cdot d\Omega + \int_{\Omega} S_\phi \cdot d\Omega$$



Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, d\Omega = \int_A \vec{n} \cdot \vec{a} \, dA$$

- A , surface qui entoure le volume de contrôle Ω et \vec{n} , vecteur normal à la surface dA
- $\vec{n} \cdot \vec{a}$: composante du vecteur \vec{a} suivant la direction du vecteur \vec{n} qui est normal à la surface dA

Résumé

Introduction à la méthode des volumes finis

Equation à résoudre

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}\phi) = \operatorname{div}[\Gamma_\phi(\vec{\operatorname{grad}}\phi)] + S_\phi$$

Intégration sur un volume Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\vec{V}\phi) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}[\Gamma_\phi(\vec{\operatorname{grad}}\phi)] \cdot d\Omega + \int_{\Omega} S_\phi \cdot d\Omega$$

⇓

Application du théorème de la divergence

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho\phi) \cdot d\Omega + \int_A \vec{n} \cdot (\rho\vec{V}\phi) dA = \int_A \vec{n} \cdot [\Gamma_\phi(\vec{\operatorname{grad}}\phi)] dA + \int_{\Omega} S_\phi d\Omega$$

Résumé

équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire Φ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\oint_A (\rho \Phi \vec{v}) d\vec{A} = \oint_A (\Gamma_\Phi \text{grad } \Phi) d\vec{A} + \int_{VC} S_\Phi dV, \quad (3.7)$$

où

ρ - la densité du fluide ;

\vec{v} - le vecteur vitesse ($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$) ;

\vec{A} - le vecteur l'aire de la surface ;

Γ_Φ - le coefficient de diffusion de la grandeur Φ ;

$\text{grad } \Phi$ - le gradient de Φ ($\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}$ en 2D) ;

S_Φ - le terme source (la source de Φ par unité de volume).

L'équation (3.7) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

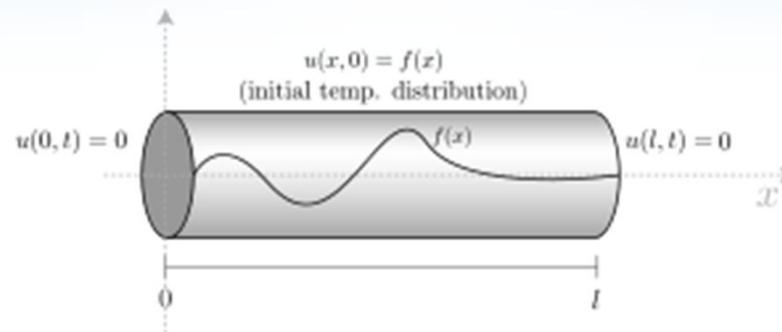
$$\sum_f^{N_{\text{faces}}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \Gamma_\Phi (\nabla \Phi)_n A_f + S_\Phi V, \quad (3.8)$$

Exemple

3.5.1 Exemple : conduction thermique 1D stationnaire

Supposons l'équation de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0. \quad (3.7)$$



Les étapes qui doivent être parcourues, pour obtenir le système d'équations algébriques, sont les suivantes :

1. *Discrétisation du domaine de calcul*

La façon de discrétisation est présentée à la figure 3.2 (voir aussi l'annexe C).

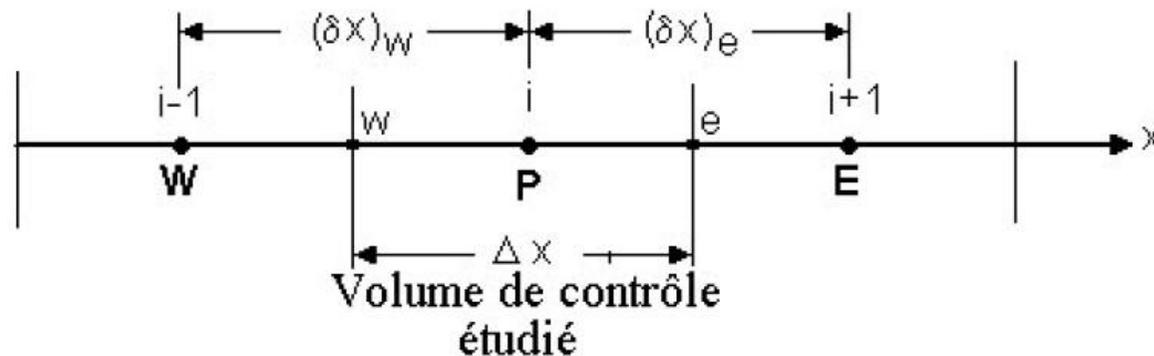


Fig. 3.2 Maillage unidimensionnel.

où :

P – Noeud considéré ;

W – Noeud “West” ;

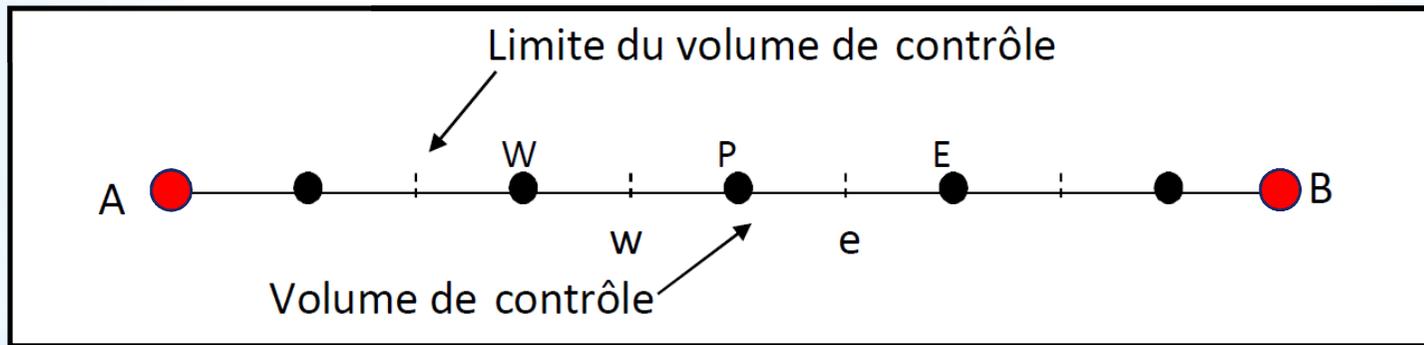
E – Noeud “East” ;

w – interface “West” du volume de contrôle (VC) ;

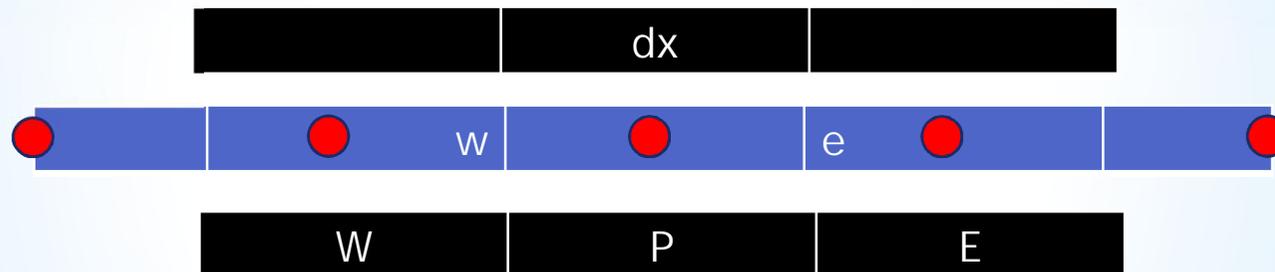
e – interface “East” du VC ;

Δx – largeur du VC étudié.

Pratique A



Pratique B



2. Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P.

En intégrant l'équation (3.7) sur le volume de contrôle (fig. 3.2) on obtient successivement :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0; \quad (3.8)$$

$$\left[\lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \int_w^e S dx = 0; \quad (3.9)$$

$$\lambda_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S}[x]_w^e = 0, \quad (3.10)$$

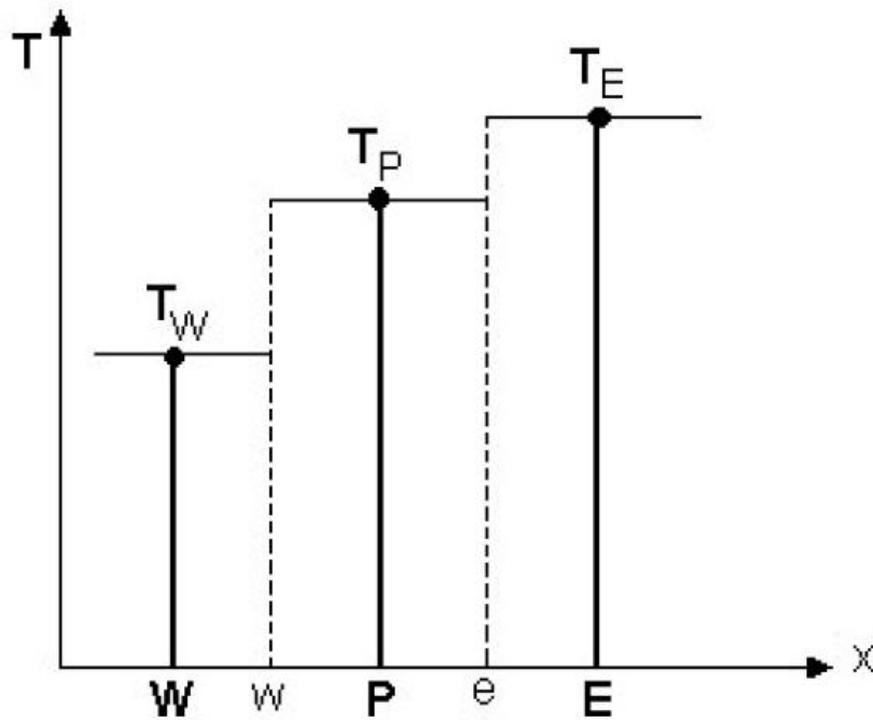
où \bar{S} est une valeur moyenne du terme source S sur le volume de contrôle. En tenant compte de la loi de Fourier ($\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$), \vec{q} étant la densité du flux thermique, l'équation (3.10) peut être écrite ainsi :

$$-q_e + q_w + \bar{S}\Delta x = 0, \quad (3.11)$$

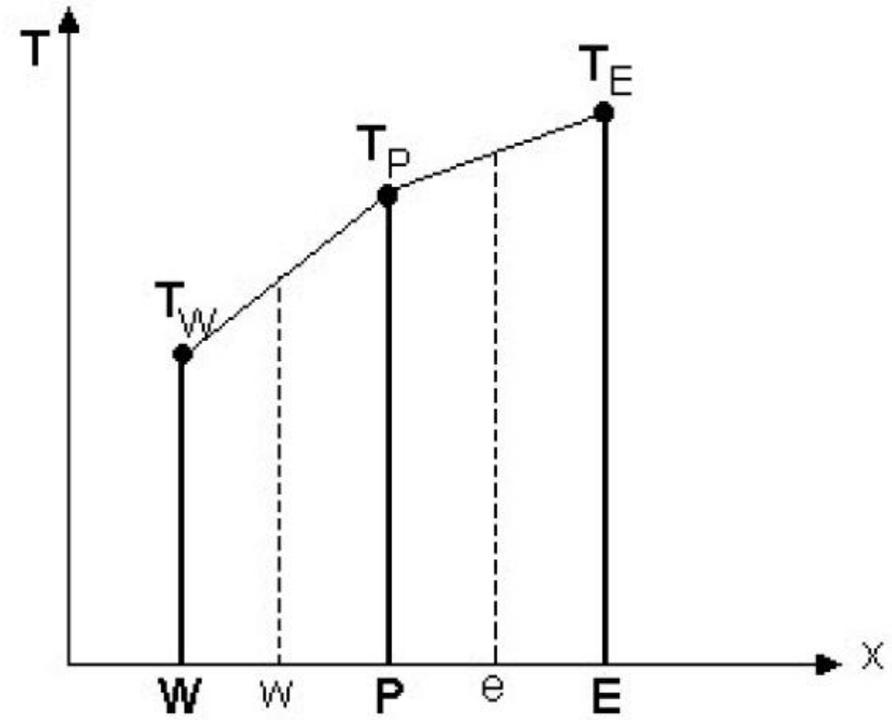
où q_e et q_w sont les densités du flux thermique aux interfaces du volume de contrôle.

3. *Choix d'un profil de température (ou d'une formule d'interpolation) entre les noeuds voisins de P.*

Il y a deux types de profils qu'on peut envisager, l'un étant le profil constant (fig. 3.3 a) et l'autre le profil linéaire (fig.3.3 b).



a)



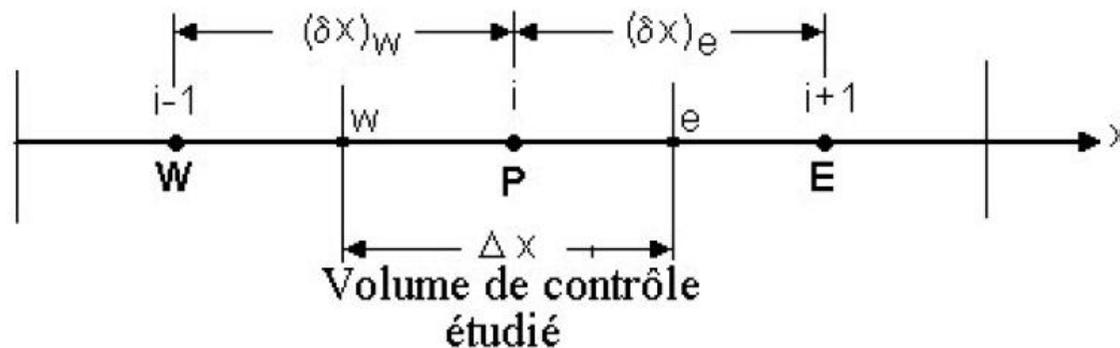
b)

Fig. 3.3 *Choix du profil de température.*
a) *Profil constant.* b) *Profil linéaire.*

Dans le cas d'un profil constant de température (Fig. 3.3 a), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de T aux interfaces w et e du volume de contrôle. De plus, la dérivée dT/dx n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas.

Dans le cas d'un profil linéaire de température (Fig. 3.3 b), entre les noeuds du maillage, la discontinuité de T n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}; \quad (3.12)$$



$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}. \quad (3.13)$$

4. Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique

L'équation (3.11) s'écrit ainsi :

$$\frac{\lambda_e(T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w(T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S}\Delta x = 0, \quad (3.14)$$

où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume de contrôle.

Finalement, après le regroupement des termes, l'équation algébrique s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \quad (3.15)$$

avec

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \quad a_P = a_E + a_W \quad b = \bar{S}\Delta x. \quad (3.16)$$

Remarques

1. La forme générale des équations discrétisées est la suivante :

$$a_P T_P = \sum_{vs} a_{vs} T_{vs} + b \quad vs = \text{voisin} \quad . \quad (3.17)$$

2. La dérivée dT / dx aurait pu être évaluée avec d'autres fonctions d'interpolation ;
3. Toutes les quantités ne doivent pas forcément être évaluées avec les mêmes fonctions d'interpolation ;
4. Pour une même variable, les mêmes fonctions d'interpolation ne doivent pas être forcément utilisées pour tous les termes dans l'équation modèle.

Principes à respecter

Même sur un maillage grossier, il faut que :

1. les variations des quantités Φ aient un comportement physique réaliste ;
2. le bilan global soit conservatif.

Traitement du terme source S

Si le terme source S varie de façon non linéaire, $S = S(T)$, on écrit :

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p, \quad (3.18)$$

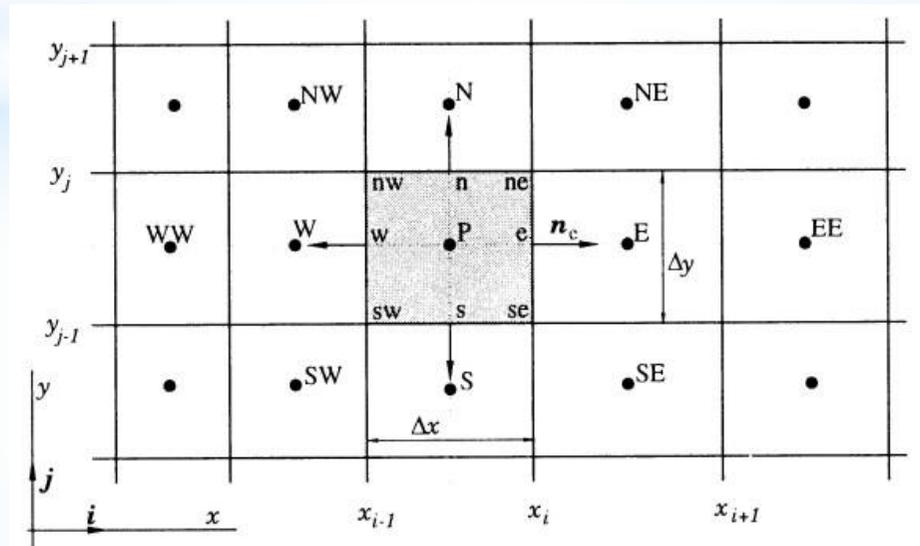
où S_c est un terme constant (indépendant de température). Il faut linéariser en T pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

3.5.2 Les règles de base (règles de Patankar)

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar, [50]

Règle N° 1 : *Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.*

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.



Règle N° 2 : *Tous les coefficients a_P et a_{vs} doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.*

On peut justifier cette règle par un contre exemple. Supposons que dans l'équation (3.15) on ait $a_P > 0$, $a_E > 0$ et $a_W < 0$. Alors, si T_W augmente il faut que T_P baisse, donc un comportement physique non réaliste.

$$a_P T_P = \sum_{vs} a_{vs} T_{vs} + b \quad vs = \text{voisin} \quad . \quad (3.17)$$

Règle N° 3 : *Pente négative dans le terme source linéarisé.*

Lors de la linéarisation du terme source $\bar{S} = S_c + S_P T_P$ la pente S_P doit être ≤ 0 car sinon on peut avoir $a_P < 0$ avec des $a_{vs} > 0$ (contraire à la règle n° 2).

Règle N° 4 : *Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :*

$$a_P = \sum a_{vs} \quad \text{si } S = 0 ; \tag{3.19}$$

$$a_P \geq \sum a_{vs} \quad \text{si } S \neq 0.$$

Démonstration

Si $S = 0$, l'équation modèle est une équation différentielle ne contenant que des dérivées de T ; T et $T + C$ sont des solutions de l'équation différentielle du problème continu et discontinu. L'équation discrétisée pour les deux solutions s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b ; \tag{3.20}$$

$$a_P (T_P + C) = \sum a_{vs} (T_{vs} + C) + b. \tag{3.21}$$

En soustrayant l'équation (3.20) de l'équation (3.21) on obtient :

$$a_P = \sum a_{vs} . \tag{3.22}$$

There are some thinks else

Les équations de diffusion

- Équation de conduction thermique
- Équation de diffusion massique
- Équation de diffusion du quantité de mouvement

Heat Diffusion Equation (3)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Special case 1: no generation $\dot{q}=0$

Special case 2: constant thermal conductivity $k=\text{constant}$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = k \nabla^2 T + \dot{q},$$

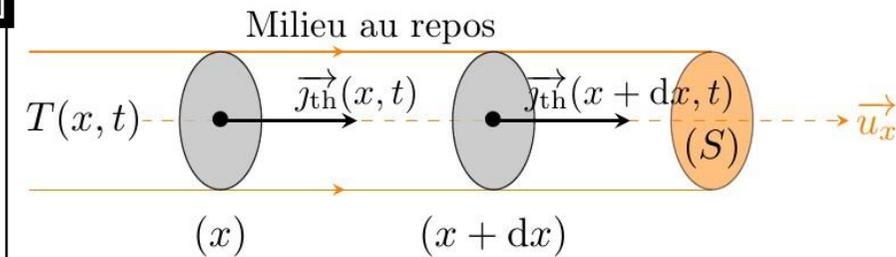
where $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplacian operator

Special case 3: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ and $\dot{q}=0$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ The famous Laplace's equation}$$

Doccity.com

Équation de conduction thermique



Diffusion

Mass Transfer in Fluid Systems

Third Edition

E. L. Cussler

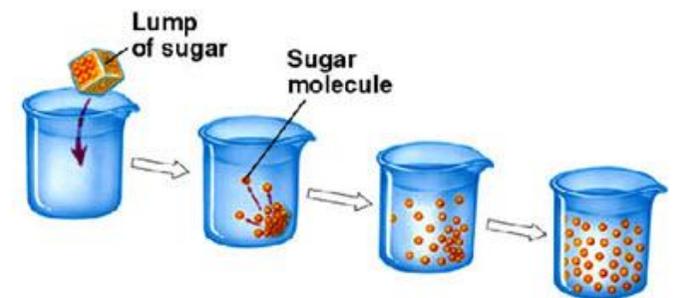
CAMBRIDGE

CAMBRIDGE www.cambridge.org/9780521871211



Équation de diffusion massique

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C,$$



Visualization of vortical structure in Taylor-Couette flow

Jin LEE, Razieh JALALABADI & Hyung Jin SUNG
Flow Control Lab.

[KAIST](#)

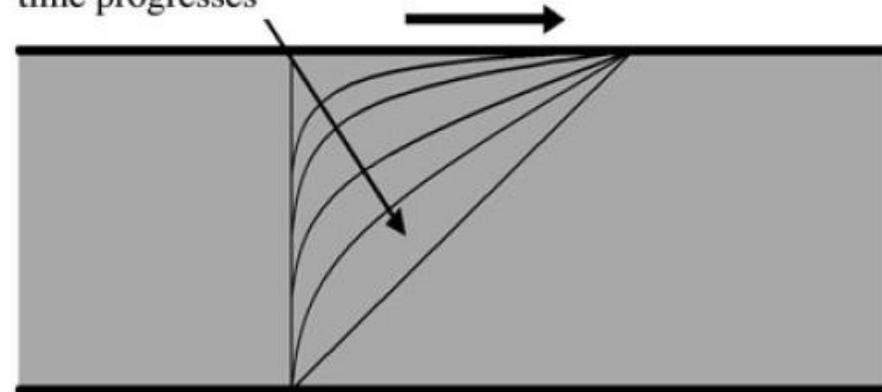
Équation de diffusion du quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \underbrace{\nabla^2 u}_{\text{Laplacian}} = k \underbrace{\nabla \cdot \nabla u}_{\text{div}(\nabla u)} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

ASEN 6037: Turbulent Flows
Experimental Exploration of Turbulent
Taylor-Couette Flow

Bryce Schaefer
Spring 2014

Velocity profile as
time progresses



3. Application de la MVF sur les Problèmes de diffusion

Heat Diffusion Equation (3)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Special case 1: no generation $\dot{q}=0$

Special case 2: constant thermal conductivity $k=\text{constant}$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = k \nabla^2 T + \dot{q},$$

where $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplacian operator

Special case 3: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ and $\dot{q}=0$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ The famous Laplace's equation}$$



Cas d'application:

Équation de Conduction
Thermique

Application à l'équation de diffusion

En régime permanent

$$\operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) + S_{\phi} = 0$$

↓

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) d\Omega + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = \int_A \Gamma_{\phi} \cdot \vec{n} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi dA + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = 0$$

Application à l'équation de diffusion

En régime permanent

$$\operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) + S_{\phi} = 0$$

⇓

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\Gamma_{\phi} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi \right) d\Omega + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = \int_A \Gamma_{\phi} \cdot \vec{n} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \phi dA + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega = 0$$

Dans le cas 1-D

$$\operatorname{div} \cdot \Gamma_{\phi} \vec{\operatorname{grad}} \phi \equiv \frac{d}{dx} \left(\Gamma_{\phi} \frac{d\phi}{dx} \right)$$

→ Equation de conduction avec $\phi \equiv T$ et $\Gamma_{\phi} \equiv k$

- k : coefficient de conductivité thermique

Exemple 1

On considère une barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur $L = 0.5 \text{ m}$. Les extrémités, A et B de la barre sont maintenues aux températures constantes de 100°C et de 500°C respectivement.

Calculer la distribution de la température le long de la barre. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000 \text{ W/mK}$.

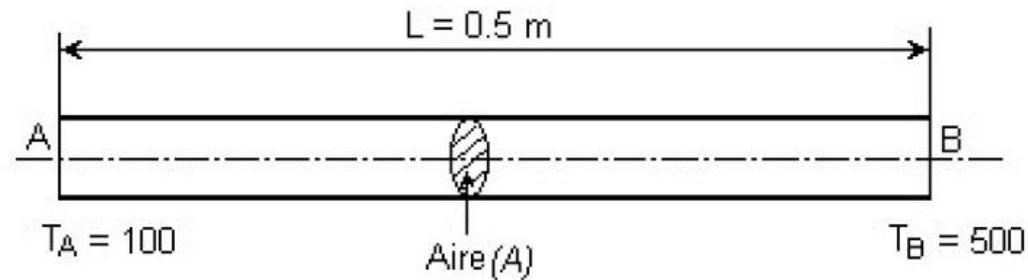


Fig. 4.7 Barre cylindrique

Solution

La distribution de la température est gouvernée par l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (4.46)$$

On considère six points le long de la barre avec $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ (fig. 4.8).

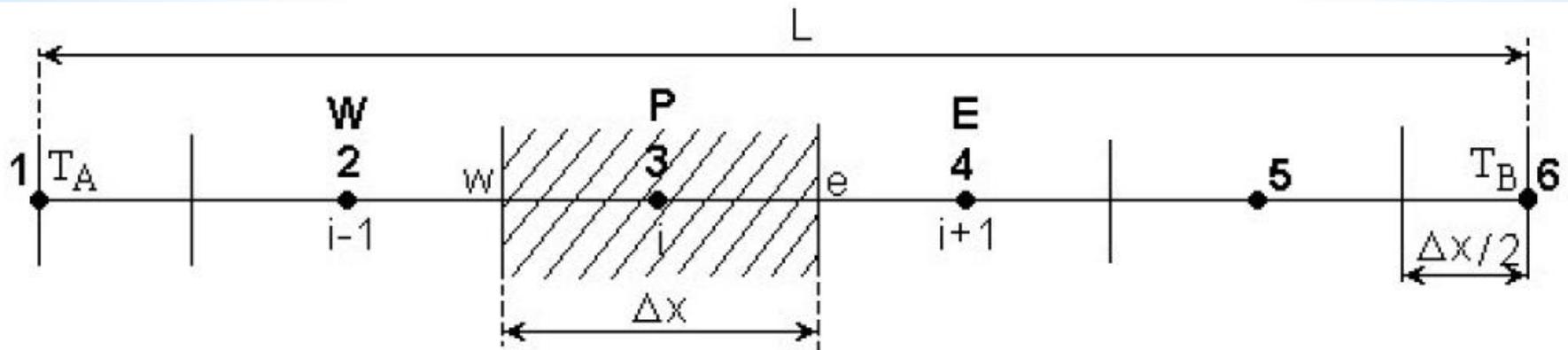


Fig. 4.8 Maillage 1D

Si l'on considère que $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ et $A_e = A_w = A$ pour les noeuds intérieurs (3 et 4) l'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E, \quad (4.47)$$

où $a_P = a_E + a_W$ $a_W = a_E = \frac{\lambda}{\Delta x}$.

Pour les noeuds 2 et 5 on utilise la même équation que pour un noeud intérieur mais on tient compte que pour les noeuds voisins 1 et 6 les températures sont connues, T_A et T_B respectivement.

Pour le noeud 2 l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_A. \quad (4.48)$$

Pour le noeud 5 l'équation discrétisée s'écrit :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_B. \quad (4.49)$$

Les équations à résoudre sont les suivantes (le nombre d'équations est égal à 4) :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1} \quad i = 2 \div 5. \quad (4.50)$$

En tenant compte que

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{1000}{0.1} = 10000 \quad a_P = a_W + a_E = 10000 + 10000 = 20000,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$2T_2 = T_3 + T_A$$

$$2T_3 = T_2 + T_4$$

$$2T_4 = T_3 + T_5$$

$$2T_5 = T_4 + T_B$$

(4.51)

En regroupant les termes, on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ T_B \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations ci-dessus comportant un nombre réduit d'équations peut être résolu, par exemple, en utilisant le logiciel MATHCAD (version MATHCAD 7 Professional, MathSoft Inc., 1997). La solution est :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 260 \\ 340 \\ 420 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

La solution analytique de l'équation (4.46) est une distribution linéaire entre les valeurs de la température des points A et B , c'est-à-dire :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L} x + T_A = 800 \cdot x + T_A \quad . \quad (4.53)$$

À la figure 4.9 sont représentées les solutions analytique et numérique qui correspondent.

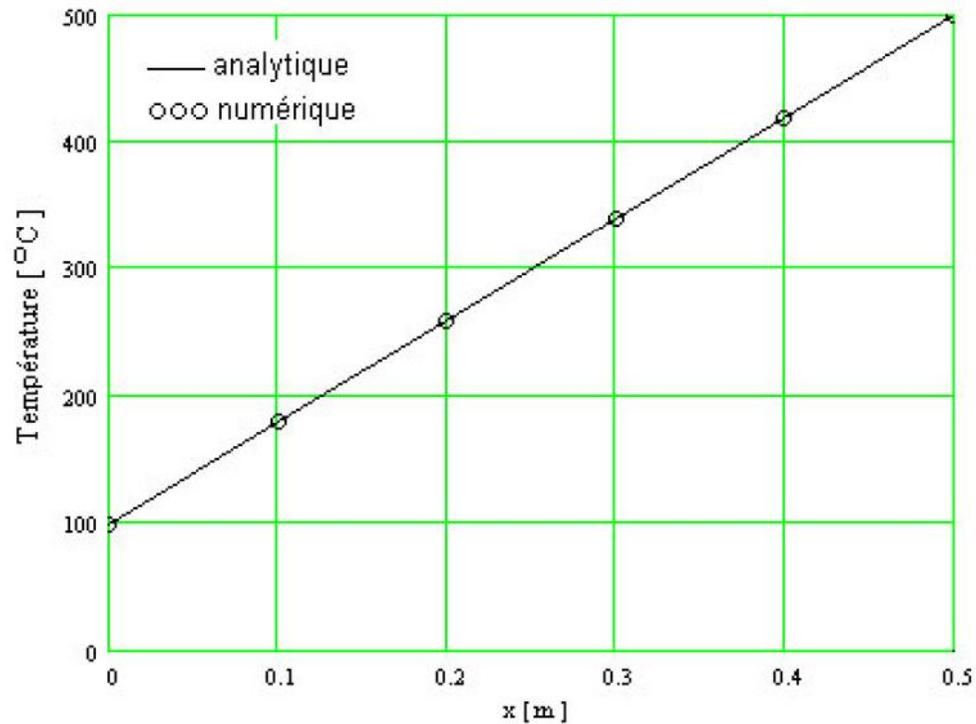


Fig. 4.9 Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique

Exemple 2

On considère une plaque très longue d'épaisseur $L = 20 \text{ mm}$, ayant la conductivité thermique constante $\lambda = 0.5 \text{ W/m/K}$ et une source de chaleur uniforme, $S = 1000 \text{ kW/m}^3$. Les faces de la plaque se trouvent à la température constante de 100°C et 200°C respectivement.

En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions "y" et "z" soient très grandes et donc le gradient de la température est significatif dans la direction "x" seulement, calculer la distribution de la température et comparer les résultats numériques avec la solution analytique.

Solution

L'équation différentielle qui gouverne la distribution de la température est la suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0. \quad (4.54)$$

Le domaine d'analyse est divisé en six noeuds, comme dans l'exemple précédent, avec $\Delta x = 0.004$ m. L'aire $A = 1$ est considérée dans le plan $y - z$.

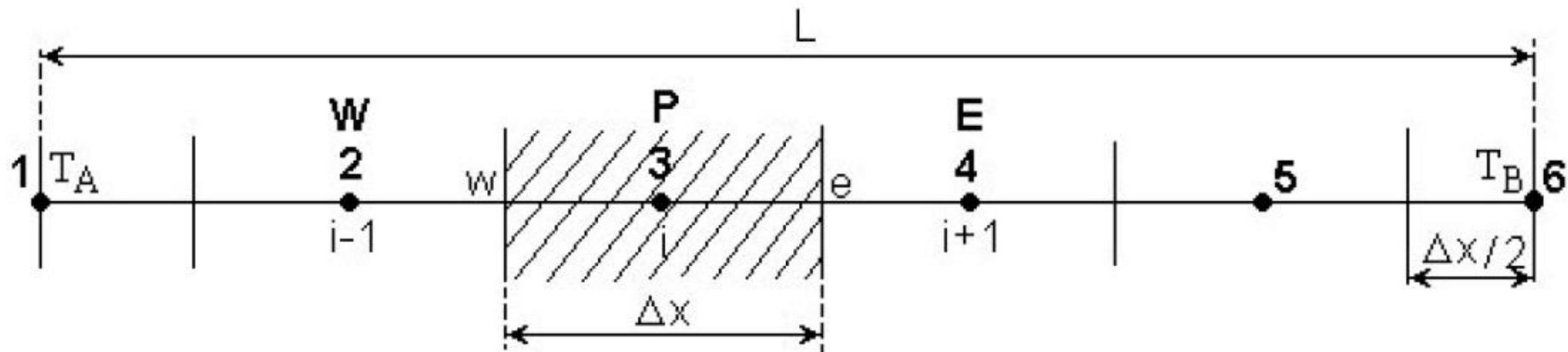


Fig. 4.10 Maillage 1D

L'intégration formelle, sur un volume de contrôle (VC), de l'équation (4.54) donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{VC} S dV = 0. \quad (4.55)$$

La première intégrale est évaluée comme dans l'exemple précédent. La deuxième intégrale, qui contient le terme source, est évaluée en considérant une valeur moyenne de S sur le volume de contrôle. L'équation (4.55) peut être écrite ainsi :

$$\left[\left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta V = 0 ; \quad (4.56)$$

$$\left[\lambda_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \lambda_w A \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) \right] + \bar{S} A \Delta x = 0 . \quad (4.57)$$

En regroupant les termes on obtient la forme générale de l'équation discrétisée, valable pour les noeuds 3 et 4 ainsi :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b, \quad (4.58)$$

$$\text{où : } a_P = a_W + a_E \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x} \quad b = \bar{S} \Delta x.$$

Pour le noeud 2 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “W” corresponde au noeud “1” où la température est connue $T_W \equiv T_1 \equiv T_A$ et passe comme un terme source supplémentaire. L'équation discrétisée est donc :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_A. \quad (4.59)$$

Pour le noeud 5 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “E” correspond au noeud “6” où la température est connue $T_E \equiv T_6 \equiv T_B$ et passe comme un terme source supplémentaire. L'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + b + a_E T_B. \quad (4.60)$$

En tenant compte que $\lambda_w = \lambda_e = \lambda$ et

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{0.5}{0.004} = 125 \quad a_P = a_W + a_E = 125 + 125 = 250,$$

$$b = \bar{S} \Delta x = 1000000 \cdot 0.004 = 4000,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$250T_2 = 125T_3 + 4000 + 125 \cdot T_A$$

$$250T_3 = 125T_2 + 125T_4 + 4000$$

$$250T_4 = 125T_3 + 125T_5 + 4000$$

$$250T_5 = 125T_4 + 4000 + 125 \cdot T_B$$

En regroupant les termes et en remplaçant les valeurs de T_A et T_B on obtient le système "tri-diagonal" à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 250 & -125 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & -125 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16500 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

La solution numérique du système (4.61) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 236 \\ 256 \\ 244 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (4.54) et en imposant les conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A. \quad (4.63)$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 236 \\ 256 \\ 244 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (4.54) et en imposant les conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda} (L - x) \right] x + T_A. \quad (4.63)$$

La comparaison des résultats numériques, obtenus avec la méthode des volumes finis, avec la solution analytique est présentée au tableau 4.1 et à la fig. 4.11.

Tableau 4.1 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Numéro du noeud</i>	2	3	4	5
<i>x [m]</i>	0.004	0.008	0.012	0.016
<i>Solution numérique</i>	184	236	256	244
<i>Solution analytique</i>	184	236	256	244
<i>Erreur %</i>	0	0	0	0

On constate que malgré un maillage très grossier les solutions numérique et analytique correspondent. Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

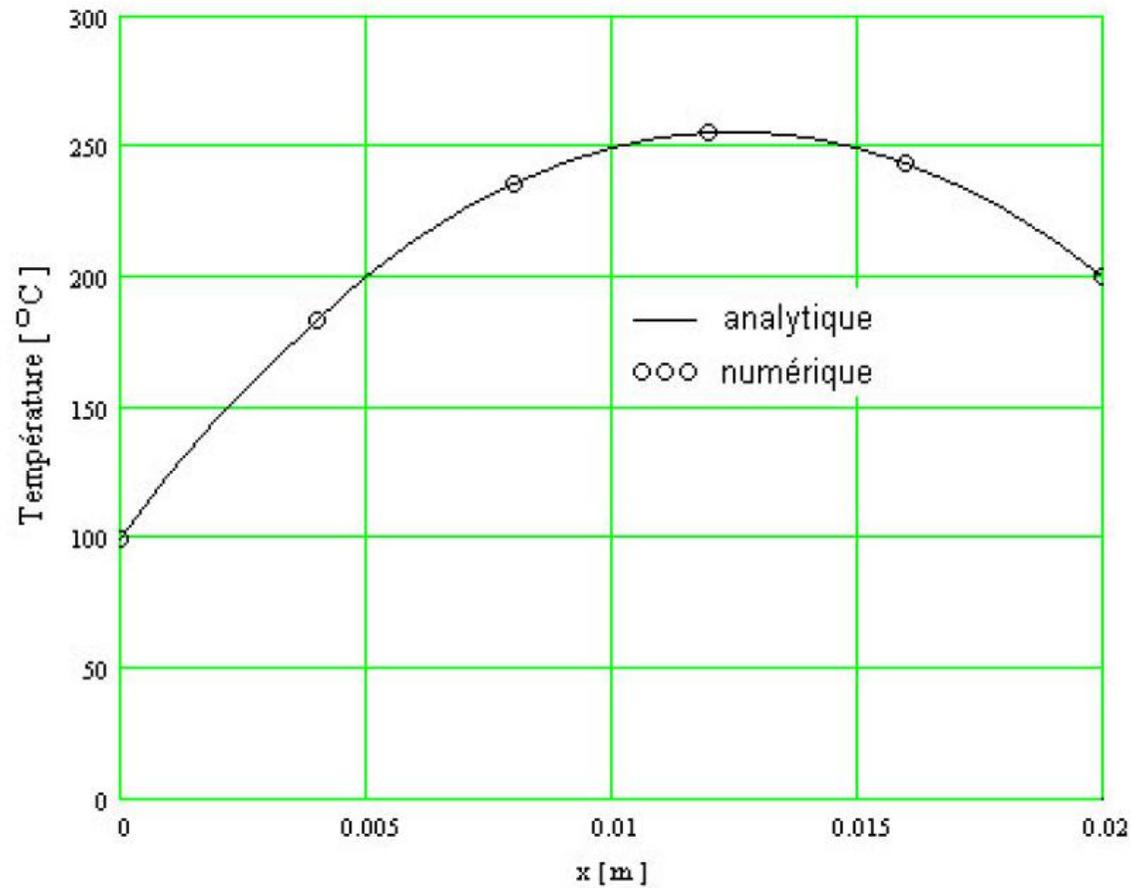


Fig. 4.11 Comparaison des résultats numérique avec la solution analytique

Exemple 3

On considère une barre cylindrique (fig. 4.12) de l'aire A avec une extrémité maintenue à la température constante de 100 °C (T_B) et l'autre extrémité est isolée (le flux de chaleur est nul). Sur le long de la barre il y a un échange de chaleur par convection dépendante de la température. La température du milieu extérieur est de 20 °C .

Calculer la distribution de la température et comparer les résultats avec la solution analytique.

On connaît : $L = 1\text{ m}$, $hP / (\lambda A) = 25\text{ m}^{-2}$.

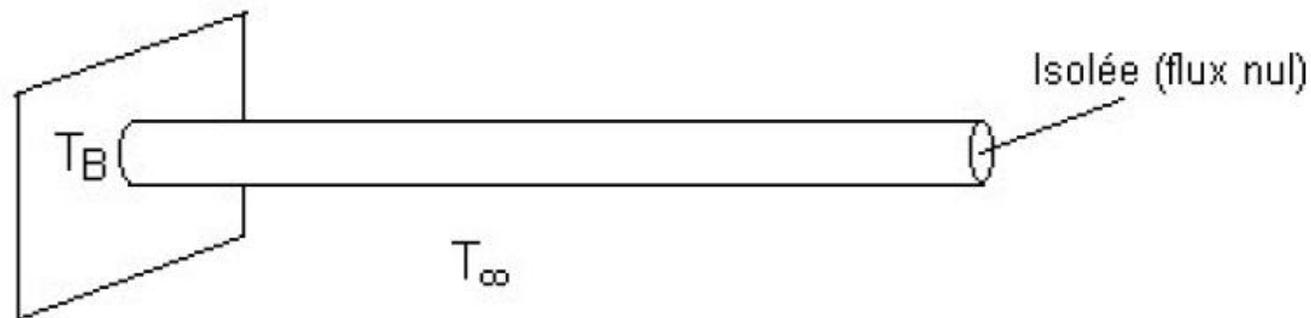


Fig. 4.12 Géométrie de l'exemple 3

Solution

L'équation différentielle qui gouverne le transfert thermique dans ce cas est :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda A \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_{\infty}) = 0, \quad (4.64)$$

où h est le coefficient de transfert thermique par convection, P est le périmètre, λ est la conductivité thermique et T_{∞} est la température du milieu extérieur.

La solution analytique est donnée par la relation suivante [48] :

$$T(x) = (T_B - T_{\infty}) \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)} + T_{\infty}, \quad (4.65)$$

où $n^2 = hP / (\lambda A)$ (il faut noter que $\lambda A = cte$).

Le maillage utilisé est celui de la figure 4.13.

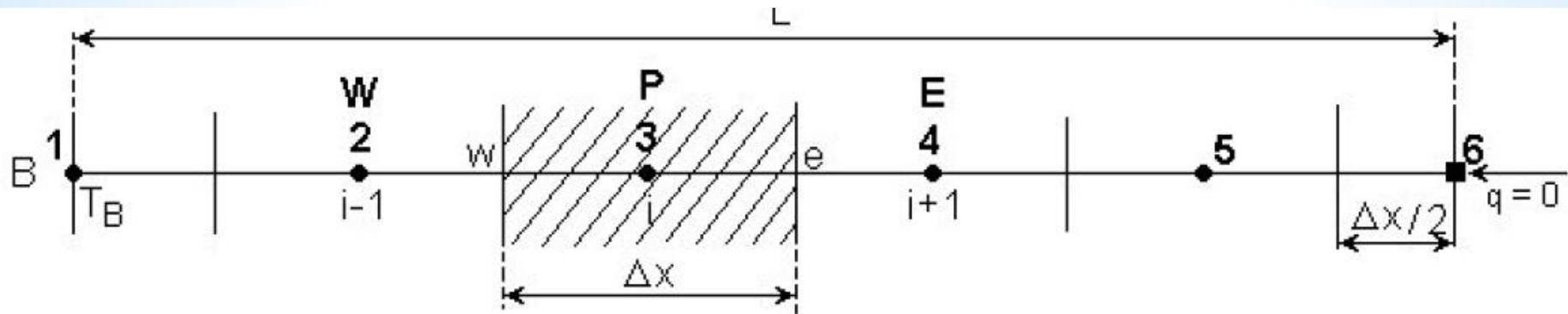


Fig. 4.13 Maillage utilisé pour l'exemple 3

Lorsque $\lambda A = \text{cte}$, l'équation (4.64) peut être écrite ainsi :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{où} \quad n^2 = hP / \lambda A. \quad (4.66)$$

L'intégration de l'équation (4.66) sur le volume de contrôle, autour du point P , donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0. \quad (4.67)$$

La première intégrale de l'équation (4.67) sera traitée comme dans les exemples 1 et 2. La deuxième intégrale, à cause du terme source, est évaluée en supposant que la quantité à intégrer est localement constante sur chaque volume de contrôle et donc :

$$\left(A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_w - [n^2 (T_P - T_\infty) A \Delta x] = 0. \quad (4.68)$$

Pour les noeuds intérieurs l'équation discrétisée est :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) \Delta x = 0. \quad (4.69)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_P = \frac{1}{\Delta x}T_W + \frac{1}{\Delta x}T_E + n^2\Delta x T_\infty - n^2\Delta x T_P. \quad (4.70)$$

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3, 4 et 5) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b, \quad (4.71)$$

où $a_W = a_E = \frac{1}{\Delta x}$ $a_P = a_W + a_E - S_P$ $b = S_c = n^2\Delta x T_\infty$

$$S_P = -n^2 \Delta x.$$

Le terme source dans l'équation ci-dessus est identifié comme $S = S_c + S_p T_p$.

Pour le noeud 2 (pour le noeud 1 ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire, la température étant connue) est valable la même équation que pour un noeud intérieur où le voisin "W" correspond à la température du point "1", $T_W = T_1 = T_B$. Le terme qui contient la température du point "1" est interprété comme un terme source. L'équation discrétisée, pour le noeud "2", est :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_B, \quad (4.72)$$

où $a_W = a_E = \frac{1}{\Delta x} \quad a_P = a_W + a_E - S_P \quad b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty.$

Pour le noeud "6" on intègre l'équation (4.66) sur le demi-volume de contrôle :

$$\int_{1/2VC} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{1/2VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 ; \quad (4.73)$$

$$\left(A \frac{dT}{dx} \right)_P - \left(A \frac{dT}{dx} \right)_W - n^2 (T_P - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Parce que le flux dans le point P est nul ($q_P = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_P = 0$), on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$0 - A \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0. \quad (4.74)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.74) on obtient :

$$a_P T_P = a_W T_W + b, \quad (4.75)$$

$$\text{où } a_W = \frac{1}{\Delta x} \quad a_P = a_W - S_P \quad b = S_c = n^2 \frac{\Delta x}{2} T_\infty \quad S_P = -n^2 \frac{\Delta x}{2}.$$

En tenant compte que

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{0.2} = 5 \quad n^2 \Delta x T_\infty = 25 \cdot 0.2 \cdot 20 = 100 \quad -n^2 \Delta x = -25 \cdot 0.2 = -5,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{aligned}15T_2 &= 5T_3 + 100 + 5T_B \\15T_3 &= 5T_2 + 5T_4 + 100 \\15T_4 &= 5T_3 + 5T_5 + 100 \\15T_5 &= 5T_4 + 5T_6 + 100 \\7.5T_6 &= 5T_5 + 50\end{aligned}$$

En regroupant les termes on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

La solution numérique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.569 \\ 31.707 \\ 24.553 \\ 21.951 \\ 21.301 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Dans le tableau 4.2 on compare les résultats numériques avec la solution analytique.

Tableau 4.2 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Noeud</i>	<i>x [m]</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
2	0.2	50.569	49.439	-2.28
3	0.4	31.707	30.853	-2.76
4	0.6	24.553	24.056	-2.06
5	0.8	21.951	21.663	-1.33
6	1.0	21.301	21.078	-1.05

La précision de la solution numérique peut être augmentée en utilisant un maillage plus fin. Dans le tableau 4.3 et à la figure 4.14 sont présentés les résultats numériques et les erreurs pour un maillage de 21 noeuds ($\Delta x = 0.05$ m, quatre fois plus petit). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

Tableau 4.3 Comparaison : solution numérique – solution analytique

<i>Noeud</i>	<i>x [m]</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
2	0.2	49.515	49.439	-0.150
3	0.4	30.910	30.853	-0.180
4	0.6	24.088	24.056	-0.130
5	0.8	21.682	21.663	-0.087
6	1.0	21.092	21.078	-0.066

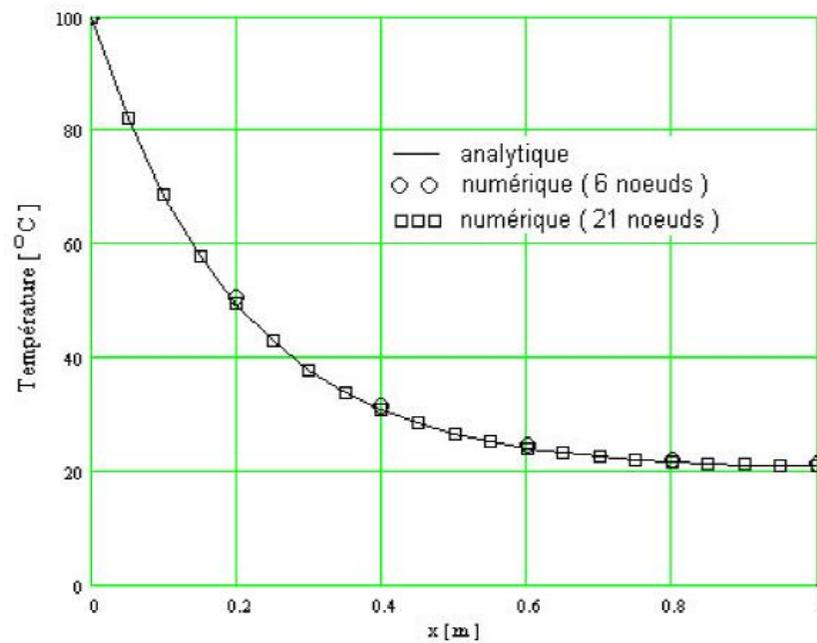


Fig. 4.14 Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique

4.2 Conduction thermique 1D instationnaire

4.2.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S, \quad (4.78)$$

où ρ est la densité de masse (kg / m^3), c_p étant la chaleur spécifique à pression constante (J/KgK).

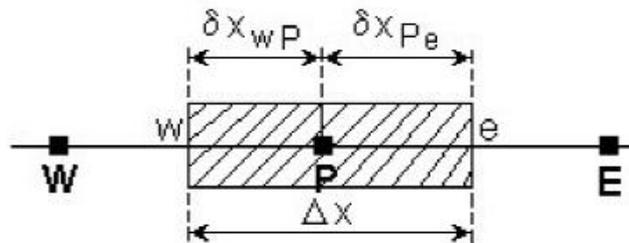


Fig. 4.15 Volume de contrôle 1D

On considère le volume de contrôle unidimensionnel de la figure 4.15. L'intégration de l'équation (4.78) sur le volume de contrôle et sur un interval de temps de t au $t + \Delta t$ donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dV dt. \quad (4.79)$$

L'équation intégrée (4.79) peut être écrite ainsi :

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt. \quad (4.80)$$

où A est l'aire transversale du volume de contrôle, ΔV étant le volume de celui-ci égale à $A\Delta x$.

Si la température du noeud P est supposée la même sur le volume de contrôle, la partie gauche de l'équation (4.80) peut être écrite ainsi :

$$\int_{VC} \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V , \quad (4.81)$$

où T_P^0 est la température à l'instant t et T_P à l'instant $t + \Delta t$.

En utilisant un schéma avec des différences centrales pour les termes de conduction de la part droite de l'équation (4.81) on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[\lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x dt, \quad (4.82)$$

Pour calculer la partie droite de l'équation (4.82) il faut connaître la variation de T_P , T_W et T_E dans le temps. Pour cela il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant t , T_P^0 , à l'instant $t + \Delta t$, T_P ou une combinaison linéaire des températures à l'instant t et $t + \Delta t$. La forme générale d'intégration temporelle s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \begin{cases} T_P^0 \Delta t \\ T_P \Delta t \\ (f T_P + (1-f) T_P^0) \Delta t \end{cases}, \quad (4.83)$$

où $0 \leq f \leq 1$ est un facteur de pondération.

En appliquant la forme générale d'intégration temporelle (4.83) aux points T_P , T_W et T_E on obtient :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta x = & f \left[\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} \right] \\ & + (1 - f) \left[\frac{\lambda_e (T_E^0 - T_P^0)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P^0 - T_W^0)}{\delta x_w} \right] + \bar{S} \Delta x \end{aligned} \quad (4.84)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.84) on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} + f \left(\frac{\lambda_e}{\delta x_e} + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right) \right] T_P = & \frac{\lambda_e}{\delta x_e} [f T_E + (1 - f) T_E^0] + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} [f T_W + (1 - f) T_W^0] \\ & + \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - f) \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - (1 - f) \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right] T_P^0 + \bar{S} \Delta x \end{aligned} \quad (4.85)$$

Si l'on identifie les coefficients de T_W et T_E comme a_W et a_E on peut écrire l'équation (4.85) sous la forme générale discrétisée :

$$a_P T_P = a_W [f T_W + (1-f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + [a_P^0 - (1-f)a_W - (1-f)a_E] T_P^0 + b \quad (4.86)$$

où $a_P = f(a_W + a_E) + a_P^0$ $a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t}$;

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \quad b = \bar{S} \Delta x \quad .$$

La forme exacte de l'équation discrétisée dépend de la valeur du facteur f . Lorsque $f = 0$ on utilise seulement les températures T_P^0 , T_W^0 et T_E^0 à l'instant t , dans le membre droit de l'équation (4.86), pour calculer T_P à l'instant $t + \Delta t$; un tel schéma s'appelle *schéma explicite*. Lorsque $0 < f \leq 1$, on utilise tant les températures à l'instant t que les températures à l'instant $t + \Delta t$; le schéma obtenu s'appelle *le schéma implicite*. Le cas limite quand $f = 1$ le schéma s'appelle *totalemment implicite*. Si $f = 1/2$ le schéma s'appelle *schéma Crank-Nicolson ou semi-implicite*.

4.2.2 Schéma explicite

Dans le cas du schéma explicite le terme source est linéarisé par l'expression $b = S_c + S_p T_P^0$. En remplaçant $f = 0$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation explicite* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - (a_W + a_E - S_p)] T_P^0 + S_c, \quad (4.87)$$

où $a_P = a_P^0$ $a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w}$ $a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$.

La règle N° 2 n'est pas toujours satisfaite. Le coefficient de T_p^0 peut être regardé comme le coefficient du "voisin" de T_p dans la "direction" temps ou un coefficient voisin qui fait la liaison entre les valeurs de T à l'instant t et celles à l'instant $t + \Delta t$. Pour que le coefficient de T_p^0 soit positif il faut $a_p^0 - a_w - a_E \geq 0$. Dans le cas général la condition devient :

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \geq 0. \quad (4.88)$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.88) devient :

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \frac{2\lambda}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} \quad (4.89)$$

Si l'on note $\alpha = \lambda / \rho c_p$, on obtient le nombre de Fourier qui doit être inférieur ou égal à $1/2$:

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.90)$$

La relation (4.90) représente le critère de stabilité pour les schémas explicites.

Remarques

- le critère de convergence du schéma utilisé, pour l'intégration dans le temps, résulte d'une considération physique (la règle N° 2).
- si l'on réduit Δx pour améliorer la précision spatiale, il faut diminuer beaucoup Δt ($\propto 1/(\Delta x)^2$).

4.2.3 Schéma Crank-Nicolson

En remplaçant $f = 1/2$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation Crank-Nicolson* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_E \left[\frac{T_E + T_E^0}{2} \right] + a_W \left[\frac{T_W + T_W^0}{2} \right] + \left[a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} \right] T_P^0 + b, \quad (4.91)$$

où
$$a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_P \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \quad b = S_c + \frac{1}{2} S_P T_P^0$$

À l'instant $t + \Delta t$ plusieurs inconnues sont présentes dans l'équation (4.91), le schéma est donc implicite et les équations doivent être résolues simultanément pour tous les noeuds à chaque pas dans le temps.

Mathématiquement le schéma Crank-Nicolson est inconditionnellement stable, mais *numériquement* la convergence vers une solution physiquement acceptable n'est pas assurée (par exemple, des solutions oscillantes d'amplitude constante ou décroissante).

La règle N° 2 est satisfaite uniquement lorsque

$$a_p^0 - \frac{a_E + a_W}{2} = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{2\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{2\delta x_w} \geq 0. \quad (4.92)$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.92) devient :

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1. \quad (4.93)$$

Remarque

La relation (4.93) est moins restrictive que la relation (4.90) associée au schéma explicite. La précision du schéma Crank-Nicolson est de second ordre dans le temps donc pour le même pas dans le temps la précision des résultats est plus grande que dans le cas du schéma explicite.

4.2.4 Schéma totalement implicite

Lorsque $f = 1$, dans l'équation (4.86) on obtient le schéma totalement implicite. L'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_c, \quad (4.94)$$

où $a_P = a_P^0 + a_W + a_E - S_P$ $a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w}$ $a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}$.

La règle N° 2 est toujours vérifiée, donc le schéma totalement implicite (TI) est inconditionnellement stable. La précision du schéma TI est de premier ordre dans le temps, donc un petit pas dans le temps est nécessaire pour augmenter la précision des résultats.

4.2.5 Exemples

Par la suite on démontre les propriétés des schémas de discrétisation explicite et implicite en comparant les résultats numériques, pour un problème 1D instationnaire, avec la solution analytique.

Exemple 1

Une plaque métallique mince se trouve initialement à une température uniforme de 200°C . À l'instant $t = 0$ la température de la paroi "East" de la plaque est brusquement réduite à 0°C . Les autres surfaces de la plaque sont isolées.

1. Utiliser le schéma explicite de la méthode des volumes finis, pour un pas de temps adéquate, pour calculer la distribution transitoire de la température et comparer les résultats avec la solution analytique aux instants (i) $t = 40\text{ s}$, (ii) $t = 80\text{ s}$, (iii) $t = 120\text{ s}$;
2. Calculer la solution numérique pour un pas de temps donné par la formule (4.90), pour $t = 40\text{ s}$ et comparer avec la solution analytique ;

Les données du problème sont : la longueur de la plaque $L = 2\text{ cm}$, la conductivité thermique $\lambda = 10\text{ W/mK}$ et $\rho c_p = 10^7\text{ J/m}^3\text{K}$.

Solution

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (4.95)$$

La condition initiale est : $T = 200 \text{ °C}$ à $t = 0$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 & \text{pour } x = 0, t > 0 ; \\ T &= 0 & \text{pour } x = L, t > 0. \end{aligned}$$

La solution analytique est donnée par la relation suivante [28] :

$$T(x, t) = T(x, 0) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x), \quad (4.96)$$

où $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$.

On considère six points sur le domaine de calcul avec $\Delta x = 0.004$ mm (fig. 4.16).

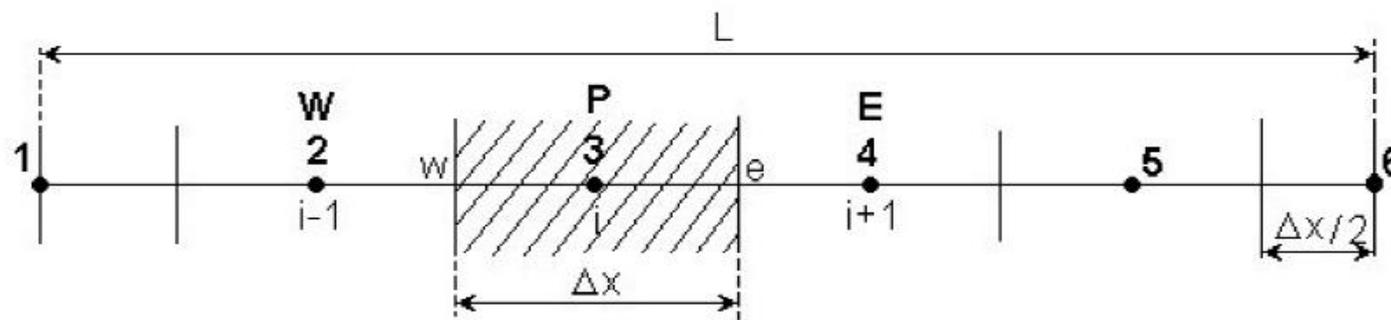


Fig. 4.16 Maillage pour le problème de l'exemple 1.

Pour un noeud intérieur (les noeuds 2, 3 et 4) l'équation discrétisée obtenue de l'équation (4.87) pour $S = 0$ est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + [a_P^0 - a_W - a_E] T_P^0, \quad (4.97)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 1 (noeud situé sur la frontière), la condition à la limite impose d'intégrer l'équation (4.95) sur un demi-volume de contrôle. L'équation discrétisée ainsi obtenue, pour le noeud 1, est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + (a_P^0 - a_E) T_P^0, \quad (4.98)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{2\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 1 (noeud situé sur la frontière), la condition à la limite impose d'intégrer l'équation (4.95) sur un demi-volume de contrôle. L'équation discrétisée ainsi obtenue, pour le noeud 1, est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + (a_P^0 - a_E) T_P^0, \quad (4.98)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{2\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour le noeud 6 (noeud de frontière), la condition à la limite étant de type Dirichlet, ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire. On utilise la même équation que pour un noeud intérieur, mais comme la température du point 6 est connue ($T_c = T_6 = 0^\circ\text{C}$) le terme qui contient la température du point 6 passe comme un terme source. Ainsi, on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 5 :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_W - a_E) T_P^0 + a_E T_C, \quad (4.99)$$

où

$$a_P = a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Le pas dans le temps Δt doit satisfaire la condition de stabilité (4.90), donc :

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} = \frac{10^7 \cdot (0.004)^2}{2 \cdot 10} = 8 \text{ s.}$$

Parce que $\Delta t \leq 8 \text{ s}$ on choisi $\Delta t = 2 \text{ s}$ et on trouve :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 ;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques, dans les équations (4.97), (4.98) et (4.99) et simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Noeud 1 :} & \quad 100T_P = 25T_E^0 + 75T_P^0 \\ \text{Noeuds 2} \div 4 : & \quad 200T_P = 25T_W^0 + 25T_E^0 + 150T_P^0 \\ \text{Noeud 5 :} & \quad 200T_P = 25T_W^0 + 150T_P^0 + 25T_c \end{aligned} \tag{4.100}$$

Dans le tableau 4.4 on présente un exemple de calcul, en utilisant les équations (4.100) pour les deux premières pas de temps.

Tableau 4.4

<i>Temps</i>	<i>Noeud 1</i>	<i>Noeud 2</i>	<i>Noeud 3</i>	<i>Noeud 4</i>	<i>Noeud 5</i>
t= 0 s	$T_1^0 = 200$	$T_2^0 = 200$	$T_3^0 = 200$	$T_4^0 = 200$	$T_5^0 = 200$
1	$100T_1^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_5^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 0$
t=2 s	$T_1^1 = 200$	$T_2^1 = 200$	$T_3^1 = 200$	$T_4^1 = 200$	$T_5^1 = 175$
2	$100T_1^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 175$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_5^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 175$ $+ 25 \cdot 0$
t=4 s	$T_1^2 = 200$	$T_2^2 = 200$	$T_3^2 = 198.72$	$T_4^2 = 196.87$	$T_5^2 = 156.25$

Les résultats numériques de l'exemple 1 sont présentés au tableau 4.5.

Tableau 4.5

<i>Temps [s]</i>	<i>Numéro du noeud</i>					
	1	2	3	4	5	6
	$x = 0$	$x = 0.004$	$x = 0.008$	$x = 0.012$	$x = 0.016$	$x = 0.02$
0	200	200	200	200	200	200
2	200	200	200	200	175	0
4	200	200	200	196.87	156.25	0
6	200	200	199.6	192.18	141.79	0
8	200	199.95	198.73	186.82	130.37	0
10	199.98	199.8	197.39	181.25	121.13	0
12	199.94	199.52	195.67	175.75	113.5	0
14	199.84	199.09	193.66	170.46	107.09	0
16	199.65	198.51	191.44	165.44	101.63	0
18	199.36	197.77	189.08	160.71	96.9	0
20	198.96	196.88	186.62	156.28	92.76	0

Le tableau 4.6 montre les résultats numériques et analytiques aux instants 40, 80 et 120 s. À la figure 4.17 on présente la comparaison des résultats numériques obtenus pour différents pas de temps avec la solution analytique (6 noeuds). La comparaison des résultats numériques et analytiques aux différents instants de temps est présentée à la figure 4.18 (21 noeuds).

Tableau 4.0

<i>Temps [s]</i>	<i>Noeud</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Erreur %</i>
<i>t = 40 s</i>	1	188.026	189.861	0.96
	2	182.196	183.814	0.88
	3	162.767	163.708	0.57
	4	125.662	125.712	0.039
	5	69.407	69.045	-0.52
	6	0	0	0
<i>t = 80 s</i>	1	153.526	154.462	0.6
	2	146.467	147.265	0.54
	3	125.610	126.080	0.37
	4	92.177	92.329	0.16
	5	48.851	48.850	-0.002
	6	0	0	0
<i>t = 120 s</i>	1	121.015	121.361	0.28
	2	115.150	115.460	0.26
	3	98.080	98.304	0.22
	4	71.376	71.500	0.17
	5	37.574	37.624	0.13
	6	0	0	0

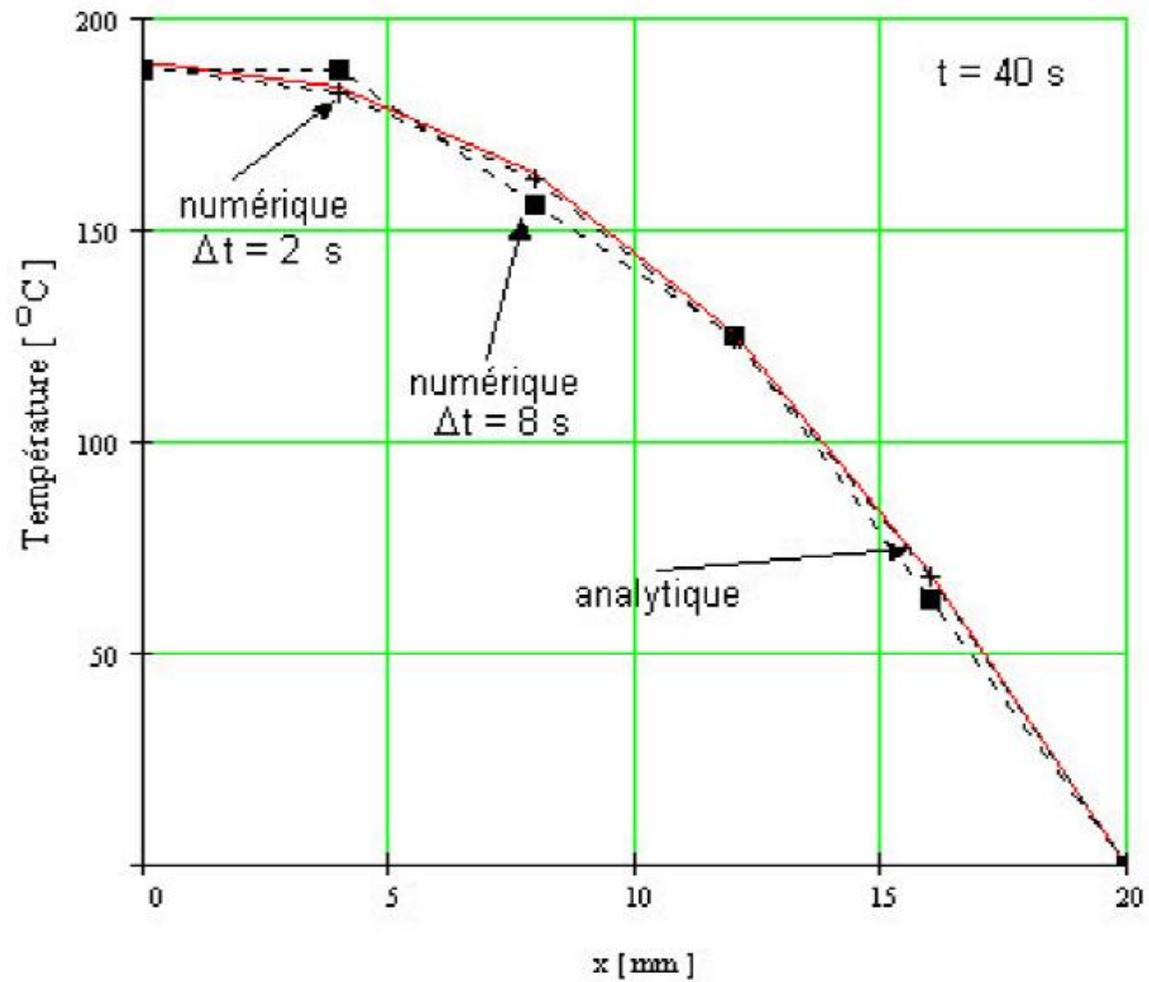


Fig. 4.17 Comparaison des résultats pour différents pas de temps.

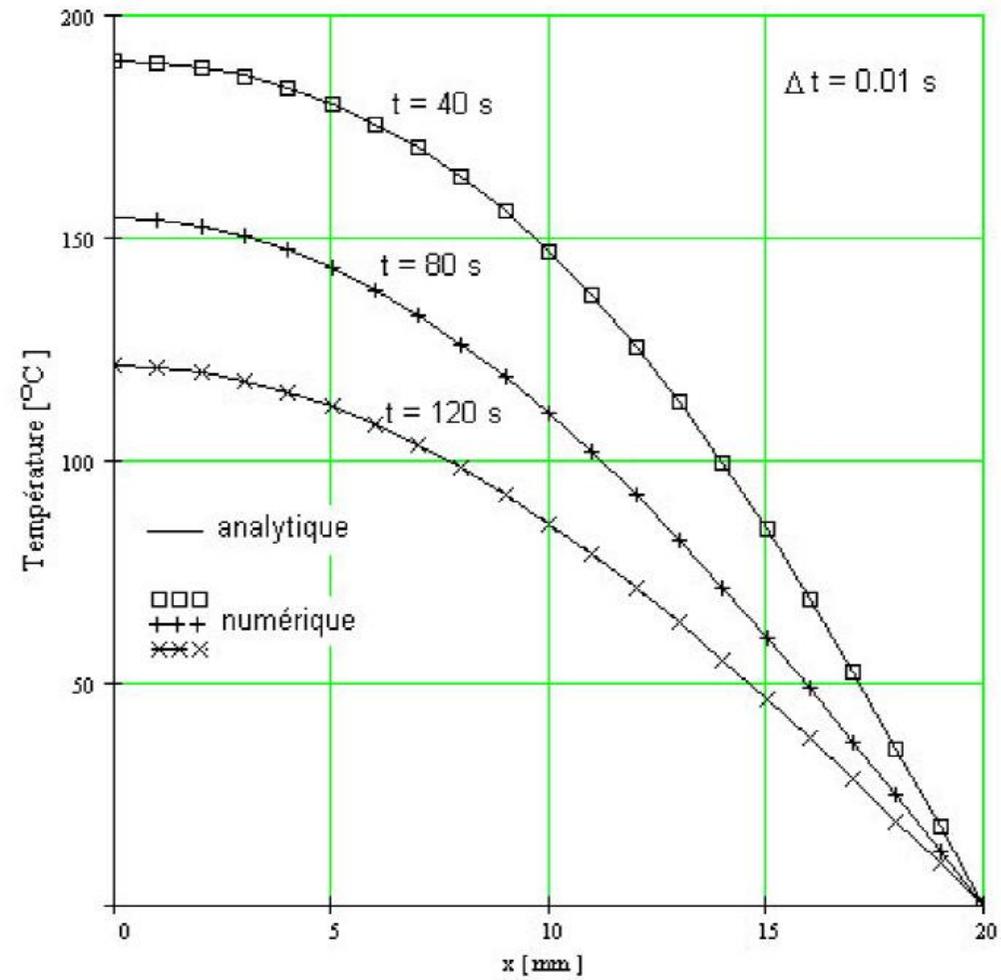


Fig. 4.18 Comparaison des résultats numériques (maillage à 21 noeuds) et analytiques aux différents instants de temps (méthode explicite).

Exemple 2

Résoudre le problème de l'exemple 1 en utilisant le schéma totalement implicite et comparer les résultats numériques obtenus avec la méthode implicite avec ceux obtenus avec la méthode explicite, pour un pas de temps de 8 s.

Solution

On utilise le même maillage de la figure 4.16. L'équation discrétisée, en utilisant le schéma totalement implicite, pour un noeud intérieur du domaine de calcul (*les noeuds 2, 3, et 4*) est celle décrite par l'équation (4.94) mais avec le terme source nul, c'est-à-dire :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \quad (4.101)$$

où $a_P = a_P^0 + a_W + a_E$ $a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t}$;

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour les noeuds situés sur la frontière 1 et 5 un traitement spécial s'impose. Ainsi, pour *le noeud 1* l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \quad (4.102)$$

$$\text{où } a_P = a_P^0 + a_E \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}.$$

Pour *le noeud 5* l'équation discrétisée, en tenant compte que $T_E \equiv T_6 = T_c$ (connue), est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + a_E T_c, \quad (4.103)$$

$$\text{où } a_P = a_W + a_E + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x} \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x}.$$

Même si la méthode implicite permet d'utiliser un pas de temps quelconque, par la suite nous allons utiliser un pas de temps raisonnable, $\Delta t = 2$ s, pour assurer une bonne précision des résultats. On a donc :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 ;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques dans les équations (4.101), (4.102) et (4.103) et après simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Noeud 1 :} & \quad 125T_P = 25T_E + 100T_P^0 \\ \text{Noeuds 2 } \div \text{ 4 :} & \quad 250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^0 \\ \text{Noeud 5 :} & \quad 250T_P = 25T_W + 200T_P^0 + 25T_c \end{aligned} \tag{4.104}$$

En tenant compte que $T_c = 0$ le système d'équations algébriques à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 125 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100T_1^0 \\ 200T_2^0 \\ 200T_3^0 \\ 200T_4^0 \\ 200T_5^0 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

On constate que l'équation pour chaque point contient les températures inconnues des points voisins. La méthode implicite nécessite la résolution simultanée du système d'équations (4.105). Les valeurs de la température du pas de temps précédent sont utilisées seulement pour le calcul du membre droit de l'équation matricielle (4.105).

Le tableau 4.7 et la figure 4.19 présentent les résultats numériques en comparaison avec la solution analytique (pour un maillage de 6 noeuds). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G (THER1Di2)

Tableau 4.7

<i>Temps [s]</i>	<i>Noeud</i>	<i>Numérique</i>	<i>Analytique</i>	<i>Ereur %</i>
<i>t = 40 s</i>	1	187.419	189.861	1.28
	2	181.853	183.814	1.06
	3	163.162	163.708	0.33
	4	126.868	125.712	-0.91
	5	70.605	69.045	-2.25
	6	0	0	0
<i>t = 80 s</i>	1	153.719	154.462	0.48
	2	146.754	147.265	0.34
	3	126.087	126.080	-0.005
	4	92.739	92.329	-0.44
	5	49.241	48.850	-0.8
	6	0	0	0
<i>t = 120 s</i>	1	121.524	121.361	-0.13
	2	115.656	115.460	-0.16
	3	98.559	98.304	-0.25
	4	71.766	71.501	-0.37
	5	37.797	37.624	-0.45
	6	0	0	0

À la figure 4.20 on présente une comparaison, des résultats numériques à l'instant $t = 40 \text{ s}$, obtenus en utilisant les schémas explicite et implicite, avec la solution analytique pour un pas de temps de $\Delta t = 8 \text{ s}$. On constate que le schéma explicite, pour $\Delta t = 8 \text{ s}$, donne des oscillations, tandis que le schéma implicite donne des résultats en bon accord avec la solution analytique. Ceci montre l'avantage du schéma implicite qui permet d'utiliser un pas de temps plus grand. Il faut signaler toutefois qu'une bonne précision sera obtenue en utilisant tout de même un pas de temps plus petit.

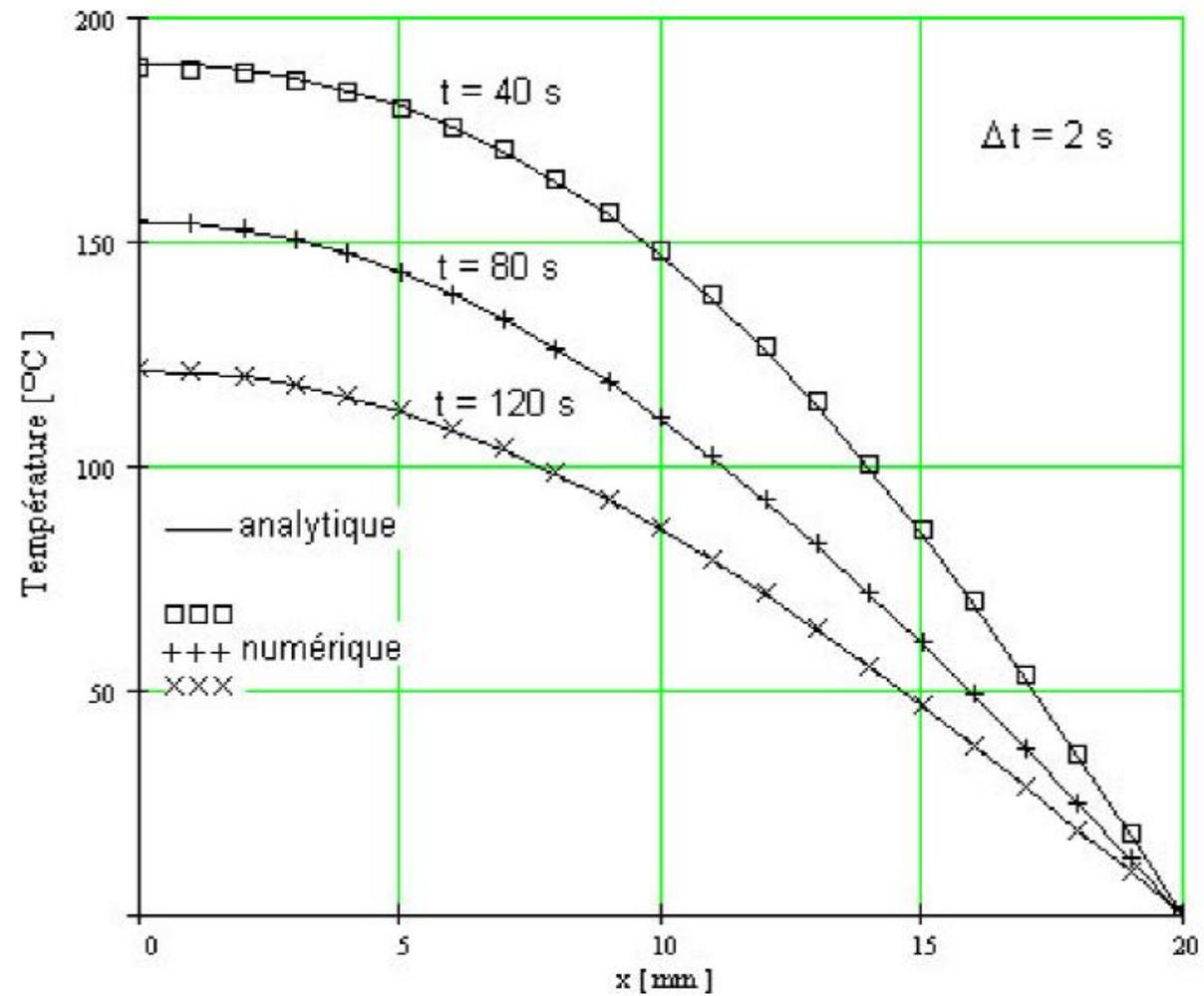


Fig. 4.19 Comparaison des résultats numériques (maillage de 21 noeuds) et analytiques au différents instants de temps (méthode implicite).

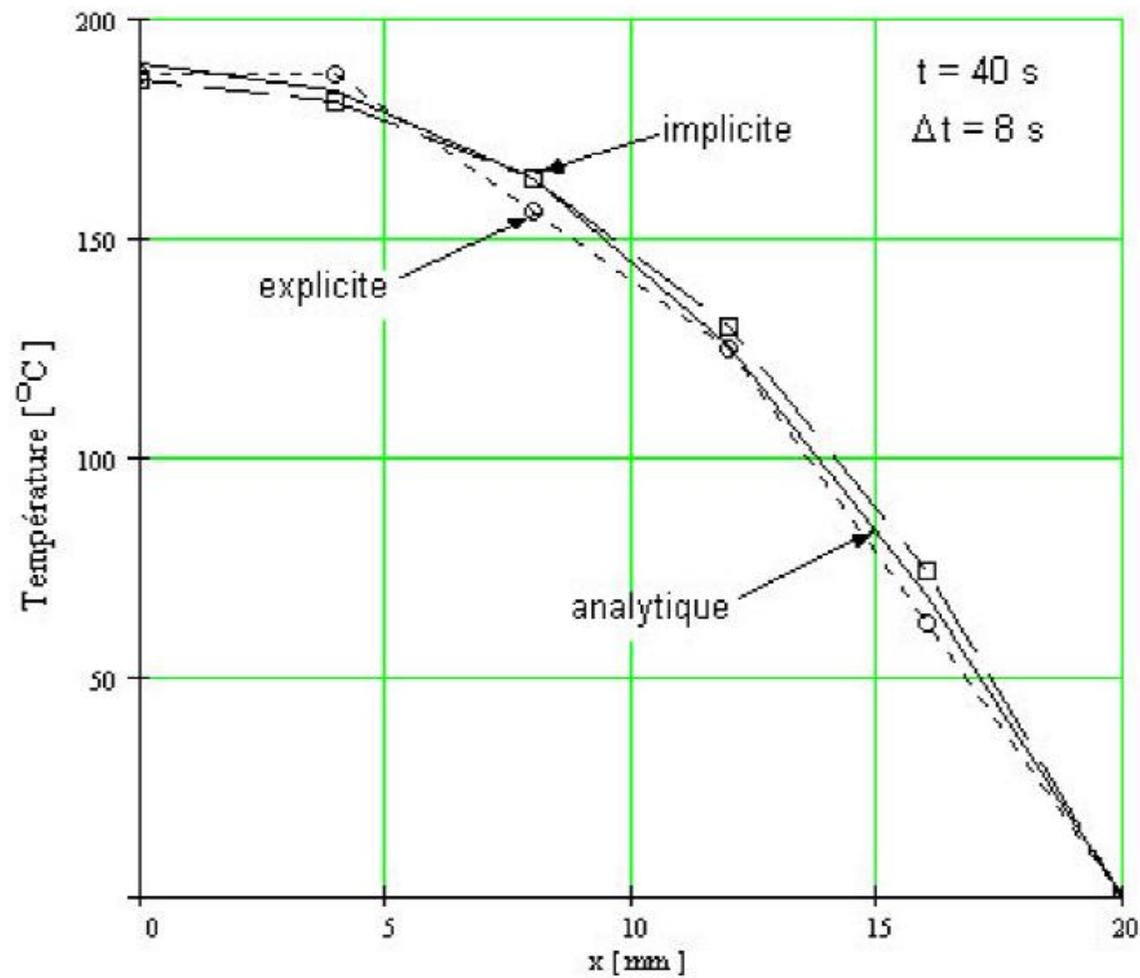


Fig. 4.20 Comparaison des solutions, en utilisant les méthodes explicite et implicite

4.3 Conduction thermique stationnaire en deux dimensions (2D)

4.3.1 Forme générale de l'équation discrétisée

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique 2D stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0. \quad (4.106)$$

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représentée à la figure 4.21

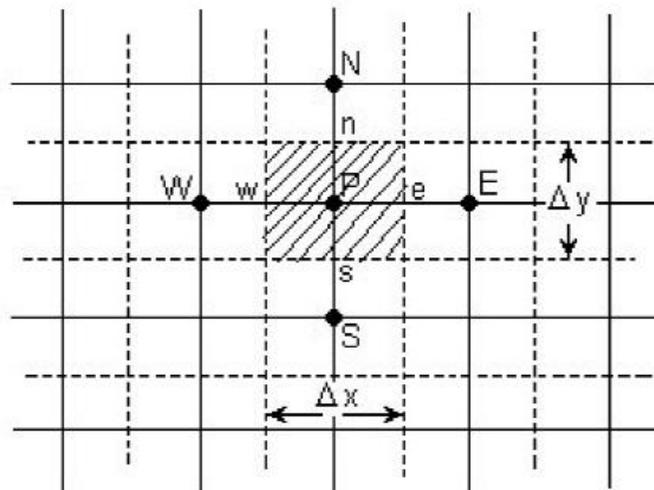


Fig. 4.21 Maillage 2D.

De plus, par rapport au maillage 1D, aux noeuds voisins, “East” (E) et “West” (W) du point P on ajoute les voisins “North” (N) et “South” (S).

L’intégration de l’équation (4.106), sur le volume de contrôle, donne :

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \int_{VC} S dV = 0. \quad (4.107)$$

Si l’on note $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, on obtient :

$$\left[\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (4.108)$$

L’équation (4.108) représente le bilan entre la génération de T dans le volume de contrôle et les flux aux faces du volume de contrôle. En utilisant la même approximation que dans le cas 1D, c’est-à-dire on suppose une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle :

$$\text{Le flux au face " w " } = \lambda_w A_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w = \lambda_w A_w \frac{T_E - T_W}{\delta x_{WP}} \quad (4.109)$$

$$\text{Le flux au face "e"} = \lambda_e A_e \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} ; \quad (4.110)$$

$$\text{Le flux au face "s"} = \lambda_s A_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s = \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} ; \quad (4.111)$$

$$\text{Le flux au face "n"} = \lambda_n A_n \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n = \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} . \quad (4.112)$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (4.108), on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 . \quad (4.113)$$

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_p T_P$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (4.113) peut s'écrire ainsi :

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_p T_P$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (4.113) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_p \Delta x \Delta y \right) T_P \\ & = \left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left(\frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E + \left(\frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) T_S + \left(\frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) T_N + S_c \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (4.114)$$

L'équation (4.114) peut être écrite donc sous la forme générale discrétisée pour un noeud intérieur :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.115)$$

où
$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n - S_p \Delta x \Delta y \quad b = S_c \Delta x \Delta y.$$

Pour obtenir la distribution de la température T (ou pour une autre variable dépendante Φ) dans une situation 2D on écrit l'équation discrétisée pour chaque noeud du maillage. Aux frontières du domaine d'analyse où la température ou le flux sont connus l'équation discrétisée est modifiée pour prendre en compte les conditions aux limites dans la manière présentée aux exemples ci-dessous.

4.3.2 Exemples

Exemple 1

On considère une plaque rectangulaire (0.5 x 0.4 m) d'épaisseur 0.01 m (fig. 4.22). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 1000 \text{ W/mK}$. La frontière "West" de la plaque reçoit un flux constant $q = 500 \text{ kW/m}^2$ et les frontières "South" et "East" sont isolées. La frontière "North" est maintenue à la température de $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Calculer la distribution stationnaire de la température dans les noeuds 1, 2, 3, ...etc., en utilisant le maillage présenté à la figure 4.22 ($\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ m}$).

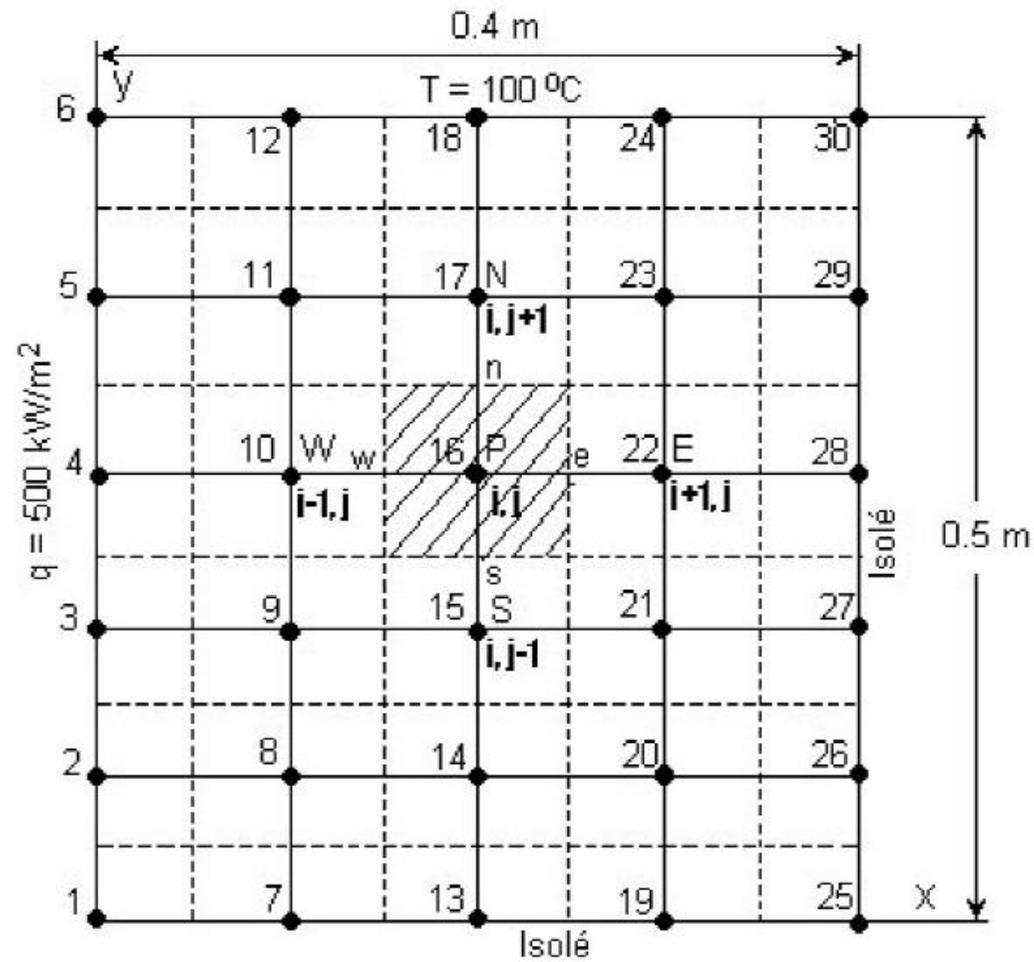


Fig. 4.22 Maillage et conditions aux limites pour le problème de conduction thermique 2D.

Solution

L'équation de conduction thermique stationnaire 2D pour les conditions énoncées est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.116)$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N, \quad (4.117)$$

où $a_W = \frac{\lambda A_w}{\Delta x}$ $a_E = \frac{\lambda A_e}{\Delta x}$ $a_S = \frac{\lambda A_s}{\Delta y}$ $a_N = \frac{\lambda A_n}{\Delta y}$;

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n.$$

Les valeurs des coefficients, des points voisins avec le point P , dans les conditions d'un maillage uniforme, sont :

$$a_W = a_E = a_N = a_S = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds intérieurs (le noeud 8-11, 14-17, 20-23) sont :

$$\begin{aligned}40T_8 &= 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9 \\40T_9 &= 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} \\40T_{10} &= 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} \\40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24}\end{aligned}\tag{4.118}$$

Pour les noeuds situés sur la frontière “West” (les noeuds 2, 3, 4 et 5) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.23.

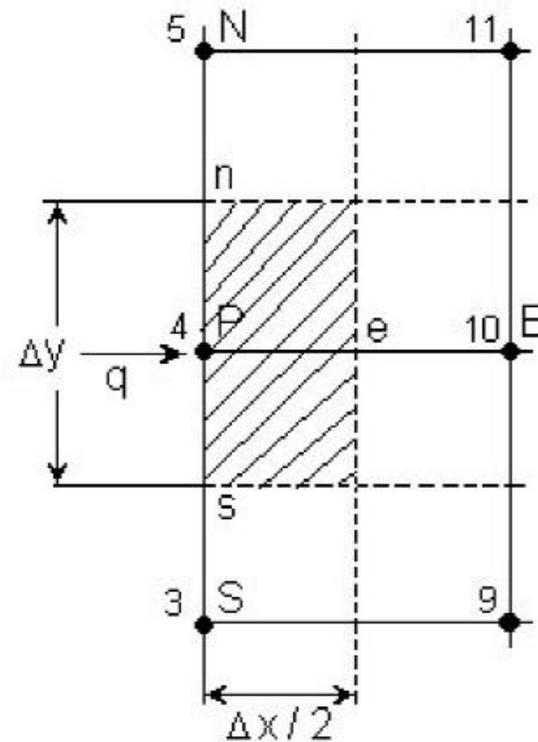


Fig. 4.23 Demi-volume de contrôle sur la frontière “W”.

$$\int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (4.119)$$

L'intégration de l'équation (4.119) donne :

$$\left[\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_p A_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] = 0, \quad (4.120)$$

où $A_e = A_p = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x / 2$. En remplaçant les gradients de température dans les points e, p, n et s , on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_p q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0,$$

où $q = -\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$ est le flux imposé sur la frontière “West”.

En regroupant les termes, on obtient l'équation discrétisée pour les noeuds intérieurs de la frontière “West” ainsi :

$$a_p T_P = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.121)$$

où $a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x}$ $a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y}$ $a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$ $b = q A_p$;

$$a_P = a_E + a_S + a_N.$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 ;$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \qquad b = qA_P = 500000 \cdot (0.1 \cdot 0.01) = 500 ;$$

$$a_P = a_E + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20.$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 2, 3, 4 et 5 sont les suivantes :

$$20T_2 = 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500$$

$$20T_3 = 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500 \quad (4.122)$$

$$20T_4 = 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500$$

$$20T_5 = 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500$$

Pour les noeuds situés sur la frontière “East” (les noeuds 26, 27, 28 et 29) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.24.

$$\int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0 ; \quad (4.123)$$

$$\left[\lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] = 0. \quad (4.124)$$

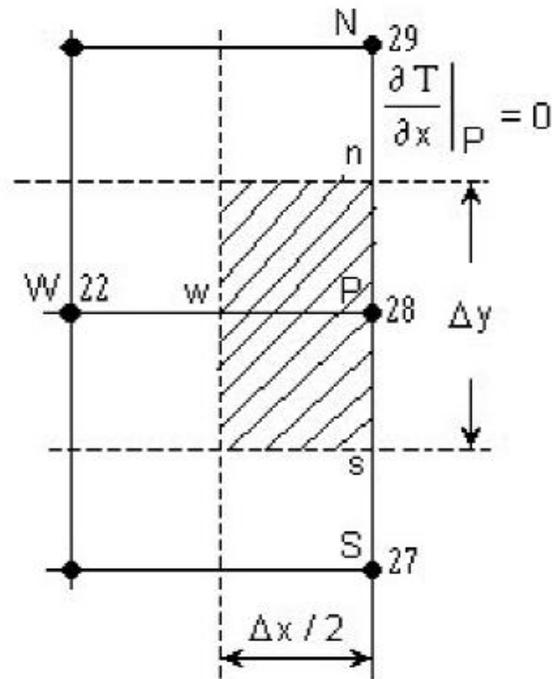


Fig. 4.24 Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".

où $A_w = \Delta y \cdot 1$ et $A_n = A_s = \Delta x / 2 \cdot 1$. En tenant compte que $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = 0$ et en supposant une variation linéaire du gradient de température, on obtient :

$$-\lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0. \quad (4.125)$$

En regroupant les termes de l'équation (4.125) on obtient l'équation discrétisée pour un noeud intérieur sur la frontière "East" :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N, \quad (4.126)$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x}$ $a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y}$ $a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$;

$$a_P = a_W + a_S + a_N.$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10$$

$$a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 ;$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5$$

$$a_P = a_W + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20 .$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 26, 27, 28, et 29 sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 20T_{26} &= 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27} \\
 20T_{27} &= 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28} \\
 20T_{28} &= 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29} \\
 20T_{29} &= 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30}
 \end{aligned}
 \tag{4.127}$$

Pour les noeuds situés sur la frontière “South” (les noeuds 7, 13, et 19) on obtient l’équation discrétisée en intégrant l’équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.25.

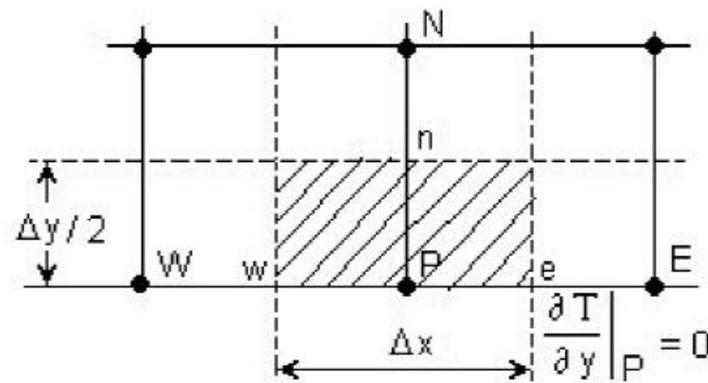


Fig. 4.25 Demi-volume de contrôle sur la frontière “South”.

L'intégration de l'équation (4.116) sur le demi-volume de contrôle hachuré de la figure 4.25 donne :

$$\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_p A_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = 0, \quad (4.128)$$

où $A_w = A_e = \Delta y / 2 \cdot 1$ et $A_n = \Delta x \cdot 1$. En rapprochant les gradients de température par une variation linéaire et en tenant compte de la condition à la limite $(\partial T / \partial y)_p = 0$ on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0 \quad (4.129)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.129) on obtient finalement la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N, \quad (4.130)$$

$$\text{où } a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_N .$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 \quad a_E = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 ;$$

$$a_N = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \quad a_P = 5 + 5 + 10 = 20 ;$$

Les équations discrétisée pour les noeuds 7, 13 et 19 sont :

$$\begin{aligned} 20T_7 &= 5T_1 + 5T_{13} + 10T_8 \\ 20T_{13} &= 5T_7 + 5T_{19} + 10T_{14} \\ 20T_{19} &= 5T_{13} + 5T_{25} + 10T_{20} \end{aligned} \tag{4.131}$$

Les noeuds 1 et 25 sont traités aussi de façon particulière. Ainsi, pour le noeud 1 on intègre l'équation (4.116) sur le volume de contrôle hachuré présenté à la figure 4.26.

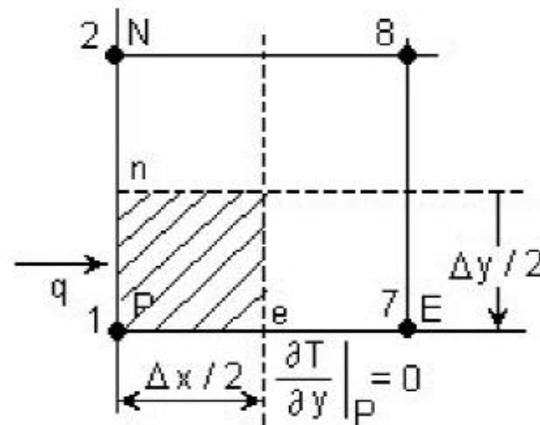


Fig. 4.26 Quart de volume de contrôle (le coin W-S).

$$\int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad (4.132)$$

$$\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P = 0, \quad (4.133)$$

où $A_e = A_p = (\Delta y / 2) \cdot 1$ et $A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1$. En tenant compte que $q = -\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$ et

$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = 0$, on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_p q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0. \quad (4.134)$$

En regroupant les termes, on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud de coin 1 :

$$a_p T_P = a_E T_E + a_N T_N + b, \quad (4.135)$$

$$\text{où } a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} \quad a_p = a_E + a_N \quad b = A_p q .$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 ;$$

$$a_P = a_E + a_N = 5 + 5 = 10 \quad b = A_P q = \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right) \cdot 500 \cdot 10^3 = 250.$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$10T_1 = 5T_7 + 5T_2 + 250. \tag{4.136}$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin "E - S") on intègre l'équation (4.116) sur le quart de volume de contrôle hachuré à la figure 4.27.

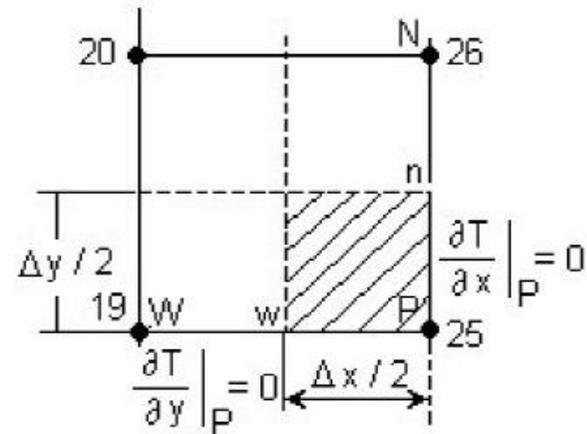


Fig. 4.27 Quart de volume de contrôle (le coin E-S).

$$\int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (137)$$

Après l'intégration on a :

$$\lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P = 0, \quad (4.138)$$

où $A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1$ et $A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1$. En tenant compte que $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P = 0$ et

$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P = 0$, on obtient :

$$-\lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0. \quad (4.139)$$

Finalement on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin) :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N, \quad (4.140)$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x}$ $a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$ $a_P = a_W + a_N$.

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 ;$$

$$a_P = a_W + a_N = 5 + 5 = 10 \quad .$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$10T_{25} = 5T_{19} + 5T_{26} \quad (4.141)$$

Finalement, le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 5T_7 + 5T_2 + 250 \\ 20T_2 &= 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500 \\ 20T_3 &= 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500 \\ 20T_4 &= 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500 \\ 20T_5 &= 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500 \\ 20T_7 &= 5T_1 + 5T_{13} + 10T_8 \\ 40T_8 &= 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9 \\ 40T_9 &= 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} \\ 40T_{10} &= 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\
20T_{13} &= 5T_7 + 5T_{19} + 10T_{14} \\
40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\
40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\
40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\
40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\
20T_{19} &= 5T_{13} + 5T_{25} + 10T_{20} \\
40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\
40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\
40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\
40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24} \\
10T_{25} &= 5T_{19} + 5T_{26} \\
20T_{26} &= 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27} \\
20T_{27} &= 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28} \\
20T_{28} &= 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29} \\
20T_{29} &= 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30}
\end{aligned}
\tag{4.142}$$

Tableau 4.8 La solution numérique du système (4.142) (la méthode des volumes finis – MVF, 30 noeuds et 546 noeuds, et la méthode des éléments finis – MEF, 31 noeuds et 485 noeuds)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T₁	T₂	T₃	T₄	T₅	T₇	T₈	T₉	T₁₀	T₁₁	T₁₃	T₁₄	T₁₅
319.8	312.9	291.8	254.7	196.3	276.7	270.0	249.8	215.3	165.3	246.9	240.7	222.1
320.6	311.9	289.4	250.8	190.3	277.3	270.2	249.9	216.0	167.4	246.8	240.6	221.6
321.2	314.5	293.7	257.6	201.5	278.0	271.4	251.3	216.9	166.5	247.9	241.6	223.0
321.2	314.5	293.8	257.6	201.6	278.0	271.4	251.2	216.8	166.5	247.9	241.6	223.0

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
T₁₆	T₁₇	T₁₉	T₂₀	T₂₁	T₂₂	T₂₃	T₂₅	T₂₆	T₂₇	T₂₈	T₂₉	Noeud
191.4	149.7	229.5	223.7	206.4	178.6	141.9	223.8	218.2	201.4	174.6	139.6	M V F 30 noeuds
191.3	148.7	228.9	222.8	205.3	177.4	141.7	223.4	217.6	200.7	173.9	139.2	M E F 31 noeuds
192.0	149.9	230.3	224.4	206.9	178.9	142.0	224.5	218.7	201.8	174.7	139.6	M V F 546 noeuds
192.1	149.9	230.2	224.4	206.9	178.8	142.0	224.4	218.7	201.8	174.7	139.6	M E F 485 noeuds

Exemple 2

On considère une plaque métallique rectangulaire (0.05 x 0.04 m). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 4 \text{ W/m/K}$. Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à la température de 0°C et le terme source est $S = 40 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$.

Calculer la distribution stationnaire de la température dans la plaque en utilisant le maillage de la figure 4.31 ($\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$).

Solution

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 . \quad (4.145)$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b , \quad (4.146)$$

où

$$a_W = \frac{\lambda A_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda A_e}{\Delta x} \quad a_S = \frac{\lambda A_s}{\Delta y} \quad a_N = \frac{\lambda A_n}{\Delta y} ,$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n \quad b = \bar{S} \Delta x \Delta y .$$

Le terme source, \bar{S} étant constant, ce n'est pas nécessaire d'être linéarisé. Les valeurs des coefficients voisins, pour le maillage choisi, sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{4 \cdot 0.01 \cdot 1}{0.01} = 4 ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 ;$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y = 40 \cdot 10^6 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 4000 .$$

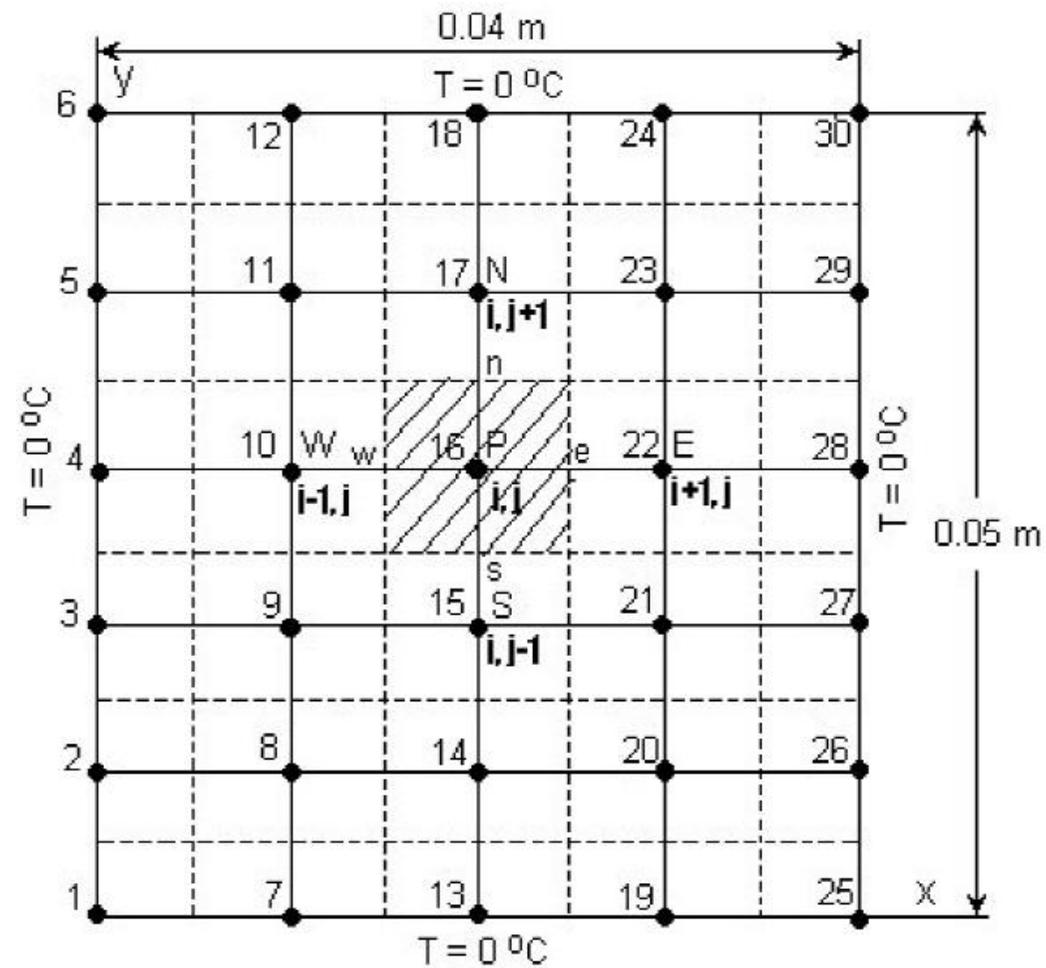


Fig. 4.31 Maillage et conditions aux limites pour l'exemple 2

Pour les noeuds de frontière (noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30) la température étant connue ce n'est pas nécessaire d'écrire les équations discrétisées. Alors le nombre d'équations à résoudre est égal à 12, les équations discrétisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}4T_8 &= T_{14} + T_9 + 1000 \\4T_9 &= T_{15} + T_8 + T_{10} + 1000 \\4T_{10} &= T_{16} + T_9 + T_{11} + 1000 \\4T_{11} &= T_{17} + T_{10} + 1000 \\4T_{14} &= T_8 + T_{20} + T_{15} + 1000 \\4T_{15} &= T_9 + T_{21} + T_{14} + T_{16} + 1000 \\4T_{16} &= T_{10} + T_{22} + T_{15} + T_{17} + 1000 \\4T_{17} &= T_{11} + T_{23} + T_{16} + 1000 \\4T_{20} &= T_{14} + T_{21} + 1000 \\4T_{21} &= T_{15} + T_{20} + T_{22} + 1000 \\4T_{22} &= T_{16} + T_{21} + T_{23} + 1000 \\4T_{23} &= T_{17} + T_{22} + 1000\end{aligned}\tag{4.147}$$

En regroupant les inconnues, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

(4.148)

La solution du système (4.148) est :

$$\begin{bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 746.479 \\ 1028.000 \\ 1028.000 \\ 746.479 \\ 957.746 \\ 1338.000 \\ 1338.000 \\ 957.746 \\ 746.479 \\ 1028.000 \\ 1028.000 \\ 746.479 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

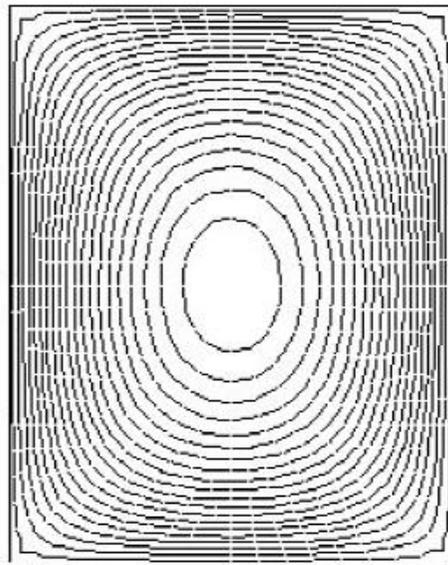


Fig. 4.32 Les courbes isothermes (obtenues à l'aide du logiciel QuickField)

La solution analytique du problème pour un quart du domaine d'analyse (fig. 4.34) est la suivante, [28] :

$$T(x, y) = \frac{S(a^2 - x^2)}{2\lambda} - \frac{16Sa^2}{\pi^3\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \cosh\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{(2n+1)^3 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \quad (4.150)$$

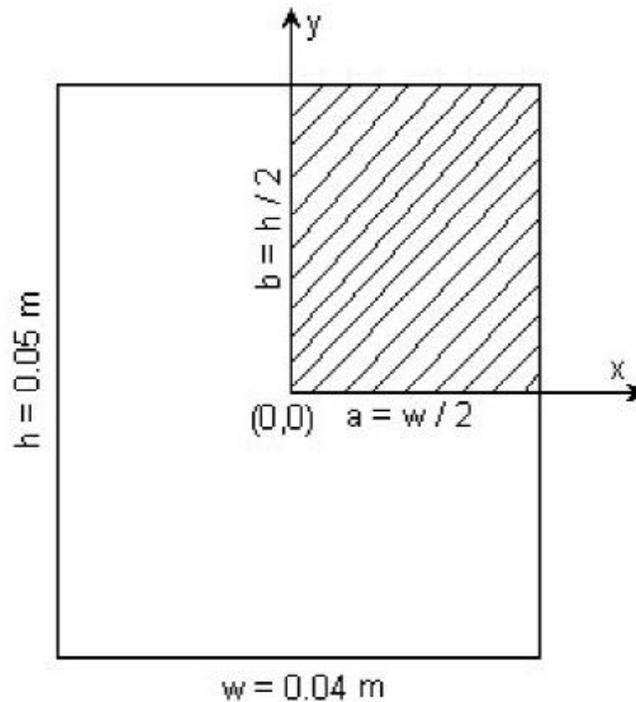


Fig. 4.34 Le domaine de calcul analytique

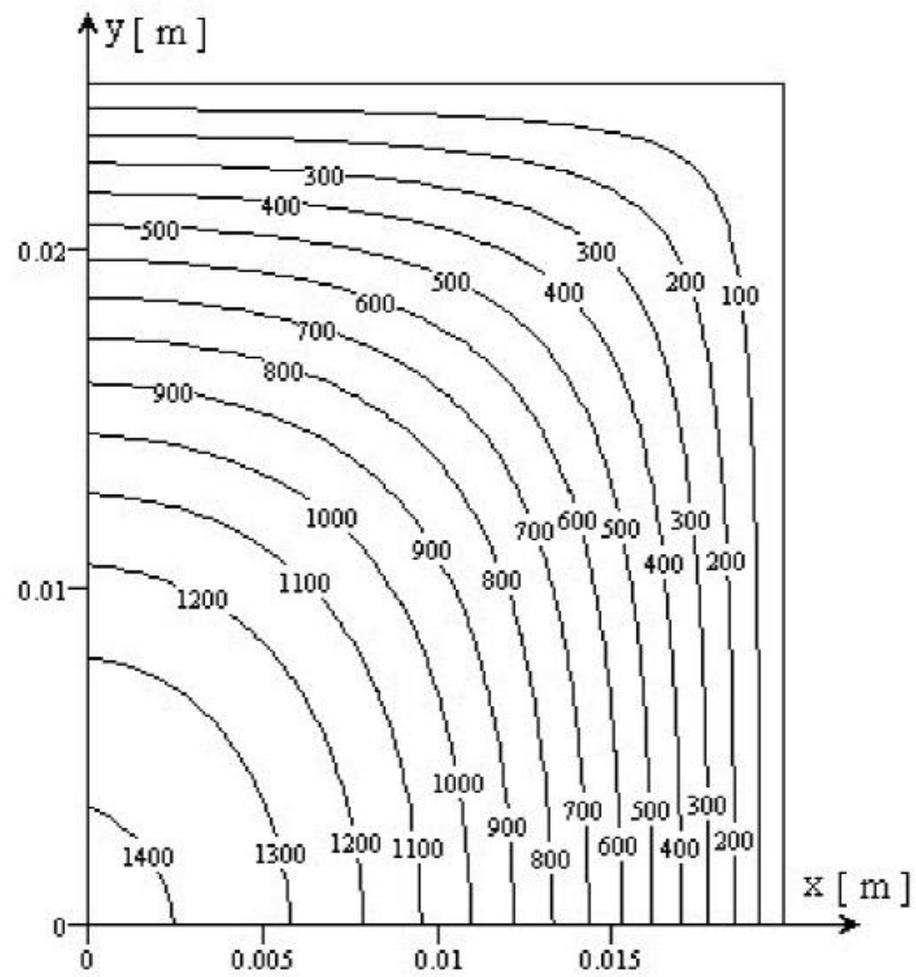


Fig. 4.34a Les courbes isothermes (solution analytique)

À la figure 4.34-a on présente la solution analytique obtenue à l'aide de l'expression (4.150) pour le domaine de calcul hachuré de la figure 4.34. À la figure 4.34-b on présente la solution numérique. On constate une très bonne correspondance entre la solution numérique et la solution analytique (mais il faut tenir compte que même la solution analytique est le résultat d'un calcul numérique d'évaluation d'une série tronquée). Dans le tableau ci-dessous on présente une comparaison des résultats obtenus en utilisant la méthode des volumes finis (le programme THERM2D2), la solution analytique et à l'aide du logiciel QuickField.

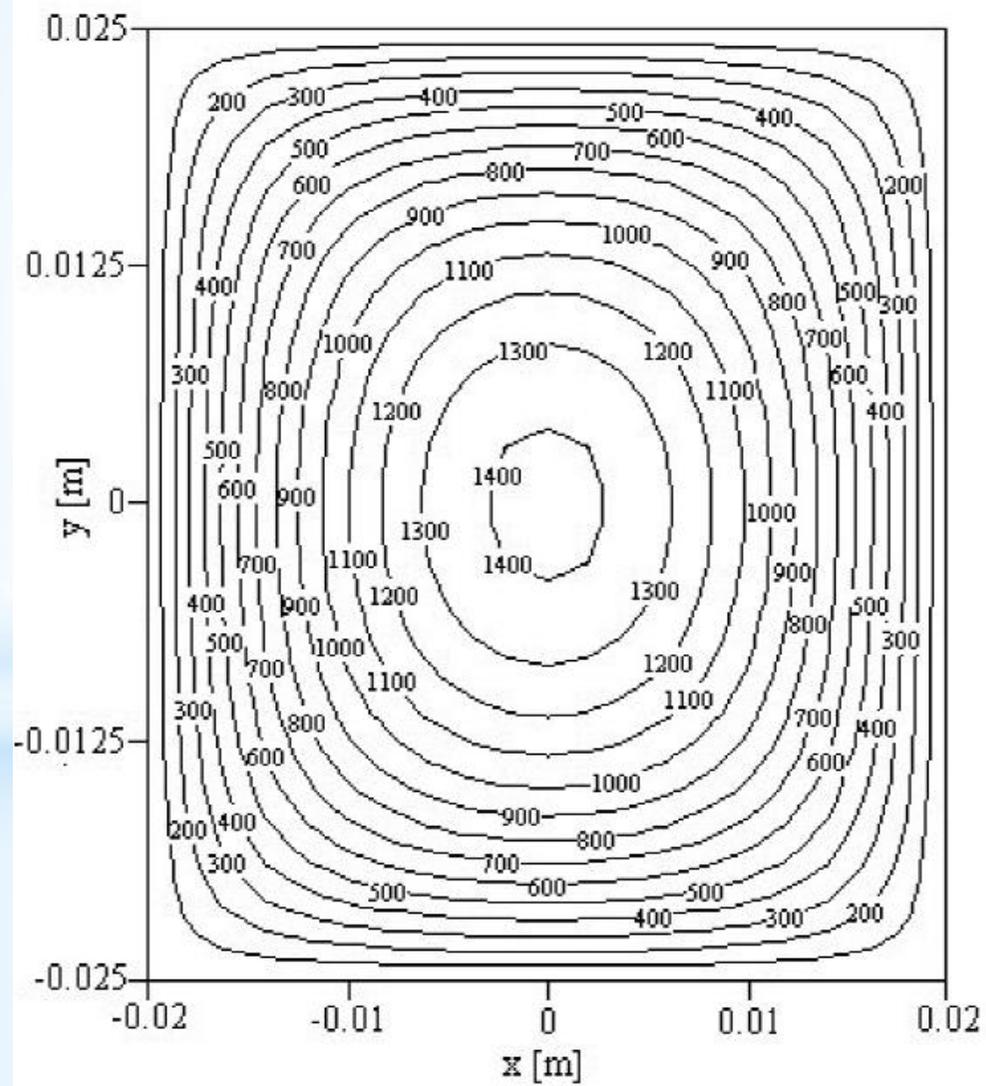


Fig.4.34b Les courbes isothermes (solution numérique)

$x = 0$ $y[mm]$	$T[K]$ QuickField	$T[K]$ Analytique	$T[K]$ numérique MVF	Erreur [%]
1	1429.10	1430.000	1428.26	0.12
3	1413.70	1416.000	1414.27	0.12
5	1386.80	1388.000	1385.97	0.14
7	1341.60	1345.000	1342.71	0.17
9	1281.60	1286.000	1283.49	0.19
11	1206.50	1209.000	1206.97	0.16
13	1113.30	1113.000	1111.47	0.14
15	996.47	996.558	994.92	0.16
17	852.53	856.310	854.90	0.16
19	683.60	689.757	688.63	0.16
21	486.86	493.798	493.01	0.16
23	259.76	265.067	264.66	0.15
	485 noeuds		546 noeuds	

4.4 Conduction thermique instationnaire en deux dimensions (2D)

4.4.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation de conduction thermique instationnaire pour un problème 2D est la suivante

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S. \quad (4.151)$$

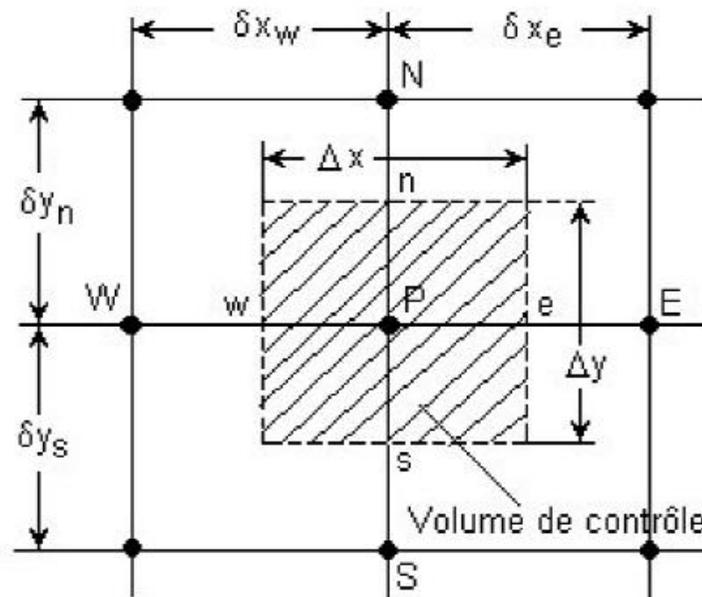


Fig. 4.35 Volume de contrôle en deux dimensions.

L'intégration de l'équation (4.151) sur le volume de contrôle schématisé à la figure 4.35 donne :

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dx dy dt \quad (4.152)$$

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x \Delta y dt$$

En remplaçant les gradients de température on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) - \lambda_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta y_n} \right) - \lambda_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right) \right) \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x \Delta y dt \quad (4.153)$$

En utilisant le schéma totalement implicite, on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = \lambda_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right) \Delta y - \lambda_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right) \Delta y + \lambda_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta y_n} \right) \Delta x - \lambda_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right) \Delta x + \bar{S} \Delta x \Delta y \quad (4.154)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.154) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.155)$$

où
$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} ;$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0.$$

Tableau 4.9

A_w	A_e	A_s	A_n
$\Delta y \cdot 1$	$\Delta y \cdot 1$	$\Delta x \cdot 1$	$\Delta x \cdot 1$

Si l'on peut exprimer $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ (linéarisation du terme source) alors les coefficients a_p et b , de l'équation discrétisée, sont les suivants :

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y ;$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 T_p^0 .$$

Remarque

L'équation (4.155) est valable pour un noeud intérieur du domaine de calcul. Pour les noeuds situés sur la frontière (dans le cas des conditions aux limites de type flux imposé, de type convection ou de type Neumann) ou voisins avec la frontière (dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet) les équations discrétisées sont obtenues en tenant compte des conditions aux limites. Le traitement des différentes conditions aux limites est illustré dans les exemples qui suivent.

4.4.2 Exemples

Exemple 1

On considère une plaque métallique rectangulaire (0.05 x 0.04 m). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 10 \text{ W/m/K}$. À l'instant $t = 0$ la frontière "North" de la plaque est mise en contact avec une paroi maintenue à la température constante $T_p = 1000 \text{ K}$. Les autres frontières de la plaque sont maintenues à la température de 300 K .

Le terme source est constant et distribué de façon uniforme. $S = 40 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$. À l'instant $t = 0$ la plaque se trouve à la température de 300 K .

Calculer la distribution transitoire de la température dans la plaque en utilisant le maillage présenté à la figure 4.31 ($\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$). On connaît $\rho c_p = 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$.

Solution

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S. \quad (4.156)$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.157)$$

où

$$a_W = \frac{\lambda A_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda A_e}{\Delta x} \quad a_S = \frac{\lambda A_s}{\Delta y} \quad a_N = \frac{\lambda A_n}{\Delta y}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0$$

Le terme source \bar{S} étant constant, il n'est pas nécessaire d'être linéarisé. Les valeurs des coefficients voisins, pour le maillage choisi ($\Delta x = \Delta y = 0.01$), sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{10 \cdot 0.01 \cdot 1}{0.01} = 10 ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = 10^6 \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.1} = 1000 ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n + a_P^0 = 10 + 10 + 10 + 10 + 1000 = 1040 ;$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 = 40 \cdot 10^6 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 1000 \cdot T_P^0 = 4000 + 1000 \cdot T_P^0 .$$

Pour les noeuds situés sur la frontière (les noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30) la température étant connue, il n'est pas nécessaire d'écrire les

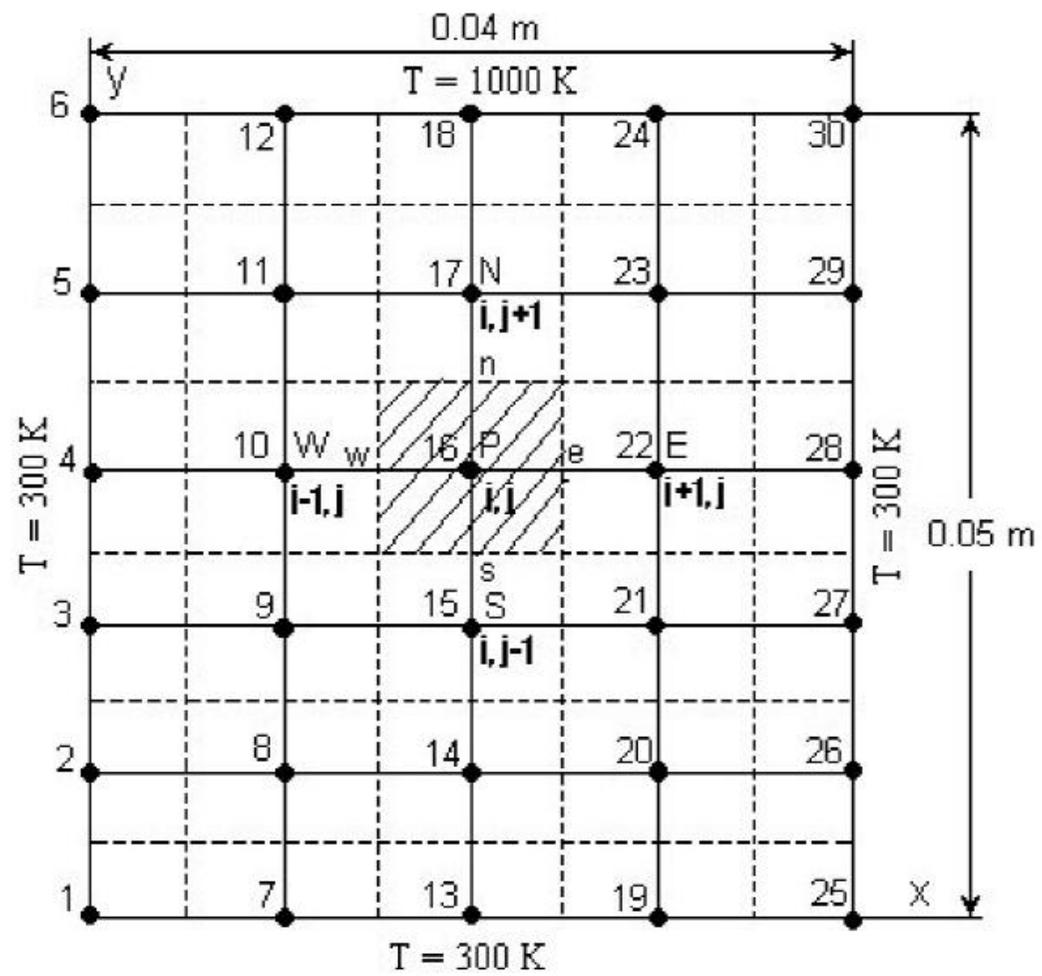


Fig. 4.36 Maillage 2D pour l'exemple 1.

équations discrétisées. Alors, le nombre d'équations à résoudre est égal à 12, les équations discrétisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 1040T_8 &= 10 \cdot 300 + 10T_{14} + 10 \cdot 300 + 10T_9 + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_9 &= 10 \cdot 300 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{10} &= 10 \cdot 300 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{11} &= 10 \cdot 300 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10 \cdot 300 + 10T_{15} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{20} &= 10T_{14} + 10 \cdot 300 + 10 \cdot 300 + 10T_{21} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{21} &= 10T_{15} + 10 \cdot 300 + 10T_{20} + 10T_{22} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{22} &= 10T_{16} + 10 \cdot 3000 + 10T_{21} + 10T_{23} + 4000 + 1000T_P^0 \\
 1040T_{23} &= 10T_{17} + 10 \cdot 300 + 10T_{22} + 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0
 \end{aligned} \tag{4.158}$$

En regroupant les inconnues, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$1040T_8 - 10T_9 - 10T_{14} = 10000 + 1000T_8^0$$

$$- 10T_8 + 1040T_9 - 10T_{10} - 10T_{15} = 7000 + 1000T_9^0$$

$$\begin{aligned}
-10T_9 + 1040T_{10} - 10T_{11} - 10T_{16} &= 7000 + 1000T_{10}^0 \\
-10T_{10} + 1040T_{11} - 10T_{17} &= 14000 + 1000T_{11}^0 \\
-10T_8 + 1040T_{14} - 10T_{15} - 10T_{20} &= 7000 + 1000T_{14}^0 \\
-10T_9 - 10T_{14} + 1040T_{15} - 10T_{16} - 10T_{21} &= 4000 + 1000T_{15}^0 \\
-10T_{10} - 10T_{15} + 1040T_{16} - 10T_{17} - 10T_{22} &= 4000 + 1000T_{16}^0 \\
-10T_{11} - 10T_{16} + 1040T_{17} - 10T_{23} &= 14000 + 1000T_{17}^0 \\
-10T_{14} + 1040T_{20} - 10T_{21} &= 10000 + 1000T_{20}^0 \\
-10T_{15} - 10T_{20} + 1040T_{21} - 10T_{22} &= 7000 + 1000T_{21}^0 \\
-10T_{16} - 10T_{21} + 1040T_{22} - 10T_{23} &= 7000 + 1000T_{22}^0 \\
-10T_{17} + 1040T_{23} - 10T_{22} &= 17000 + 1000T_{23}^0
\end{aligned}
\tag{4.159}$$

Sous la forme matricielle le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -10 & 1040 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -10 & 0 & 0 & 0 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1040 & -10 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 T_8 \\
 T_9 \\
 T_{10} \\
 T_{11} \\
 T_{14} \\
 T_{15} \\
 T_{16} \\
 T_{17} \\
 T_{20} \\
 T_{21} \\
 T_{22} \\
 T_{23}
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10000 + 1000T_8^0 \\ 7000 + 1000T_9^0 \\ 7000 + 1000T_{10}^0 \\ 17000 + 1000T_{11}^0 \\ 7000 + 1000T_{14}^0 \\ 4000 + 1000T_{15}^0 \\ 4000 + 1000T_{16}^0 \\ 14000 + 1000T_{17}^0 \\ 10000 + 1000T_{20}^0 \\ 7000 + 1000T_{21}^0 \\ 7000 + 1000T_{22}^0 \\ 17000 + 1000T_{23}^0 \end{bmatrix}$$

Pour la résolution du système (4.160) on applique l'algorithme de Thomas, adapté aux problèmes 2D, présenté au paragraphe 4.3.3. Pour cela, l'équation discrétisée doit être mise sous la forme :

$$-a_S T_S + a_P T_P - a_N T_N = a_W T_W^* + a_E T_E^* + \bar{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0. \quad (4.161)$$

Aux figures 4.37 et 4.39 sont présentées les solutions numériques obtenues à l'aide du programme **THERM2Di** (Annexe G), aux différents moments de temps, pour un pas de temps $\Delta t = 0.1$ s.

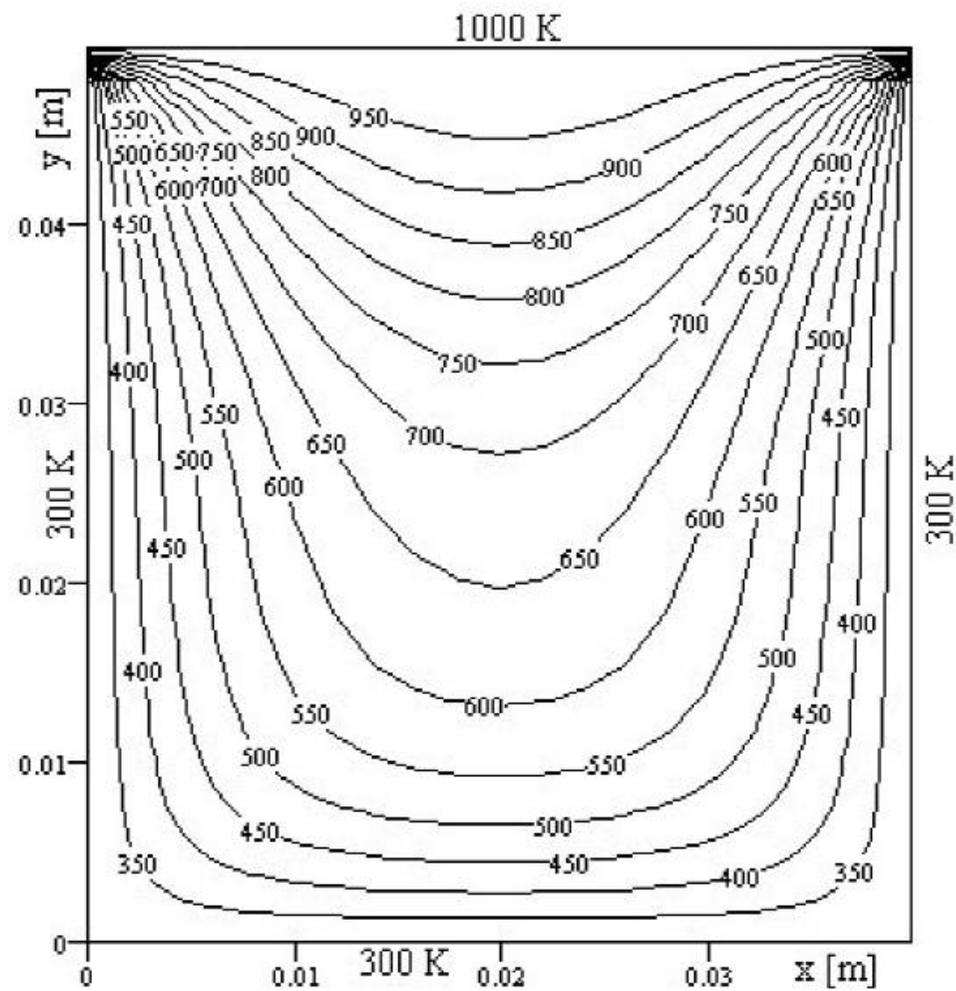


Fig. 4.37 Distribution du champ thermique à l'instant $t = 10\text{ s}$.

À la figure 4.38 on présente une comparaison entre la solution numérique obtenue à l'aide du programme THERM2Di, en utilisant la méthode des volumes finis, et celles obtenue à l'aide du logiciel QuickField (**QuickField™ 4.2T version 4.2.2.2, Copyright © 1993-2001 Tera Analysis**) en utilisant la méthode des éléments finis.

La comparaison est présentée le long de la droite $x = 20 \text{ mm}$. À cause du fait que la version du logiciel QuickField utilisée est limitée à 200 noeuds les erreurs sont assez grandes. Vers la frontière "North" où les gradients de température sont grands il faut utiliser un maillage très dense (fig. 4.40). On constate que, pour le maillage (fig. 4.41), les erreurs dans la zone de forts gradients sont très grandes, la distribution de la température ayant un comportement non réaliste. Au contraire si le maillage devient plus dense dans la zone des forts gradients, mais plus grossière dans le reste du domaine (fig. 4.40), les erreurs diminuent, mais augmente dans la zone $y = 0 \div 15 \text{ mm}$. On constate aussi que pour la méthode des volumes finis la solution est presque la même si l'on passe d'un maillage à 208 noeuds au maillage à 546 noeuds ce qui nous permet de tirer la conclusion que pour un même nombre de

noeuds et pour le même pas dans le temps la méthode des volumes finis semble être plus précise que la méthode des éléments finis dans le cas des problèmes de conduction thermique instationnaire. Cette analyse est plutôt qualitative parce qu'une analyse correcte doit être faite pour le même type de maillage, pour le même nombre de noeuds et pour le même schéma dans le temps.

En ce qui concerne le pas de discrétisation dans le temps, même si le schéma utilisé est totalement implicite, il faut noter que pour avoir une bonne précision de la solution, le pas dans le temps doit être très petit. Le schéma de discrétisation est du premier ordre comme précision dans le temps, tandis que dans l'espace est de second ordre.

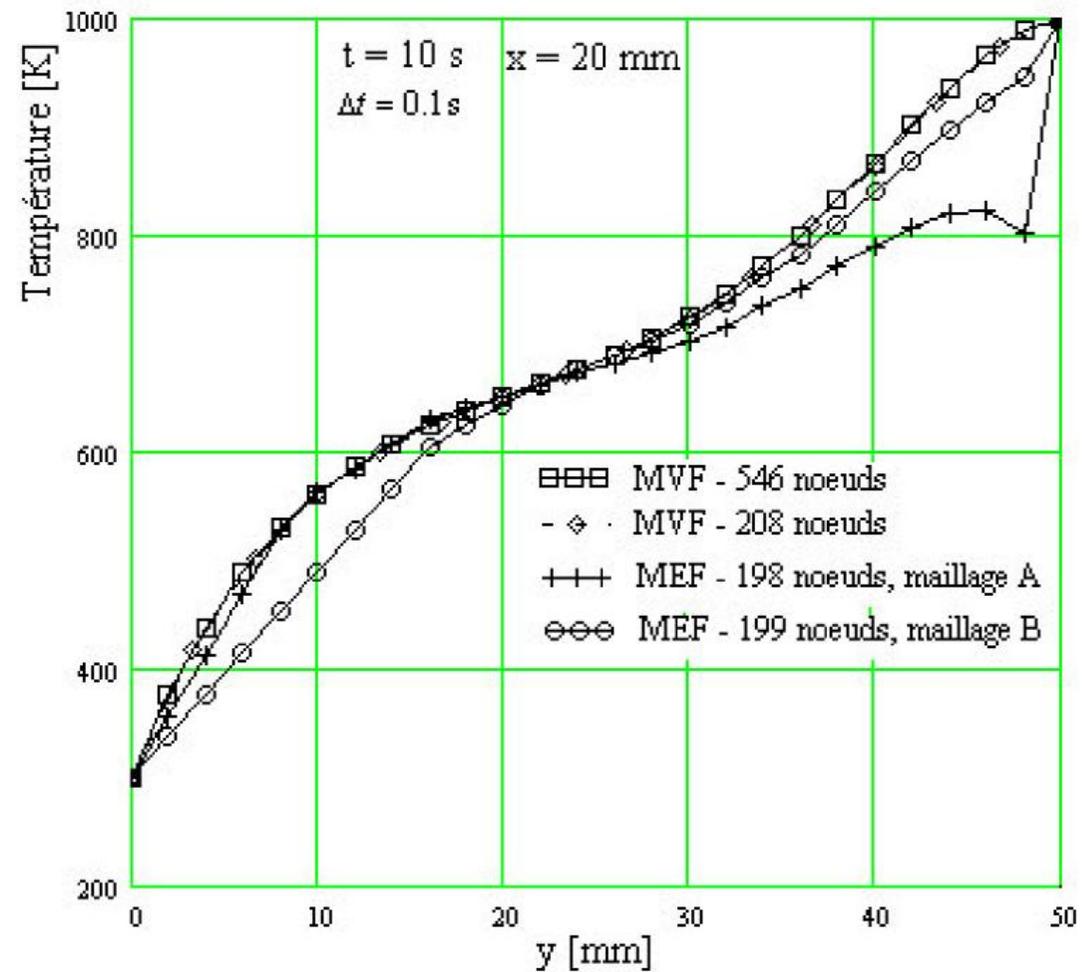


Fig. 4.38 Comparaison des distributions spatiales de température ($x = 20, y$) à l'instant $t = 10 \text{ s}$, obtenue à l'aide du programme THERM2Di et à l'aide du logiciel QuickField 4.2T (version Student).

Dans le tableau ci-dessous on présente l'évolution de la distribution de la température pour différents pas de temps à l'instant $t = 10$ s .

Tableau 4.10 L'évolution de la température pour différents pas de temps

Δt [s]	1	0.5	0.1	0.05	0.01
y [mm]					
4	436.22	437.74	438.95	439.10	439.23
8	524.93	527.71	529.95	530.24	530.46
12	581.01	584.69	587.69	588.06	588.37
16	616.87	621.15	624.68	625.13	625.49
20	642.46	647.25	651.27	651,78	652.20
24	665.80	671.29	675.98	676.59	677.08
28	693.73	700.27	705.90	706.63	707.22
32	732.07	739.89	746.55	747.40	748.10
36	784.83	793.59	800.88	801.81	802.55
40	851.86	860.37	867.26	868.12	868.82
44	925.12	931.48	936.51	937.13	937.63
48	984.83	987.21	989.06	989.29	989.47

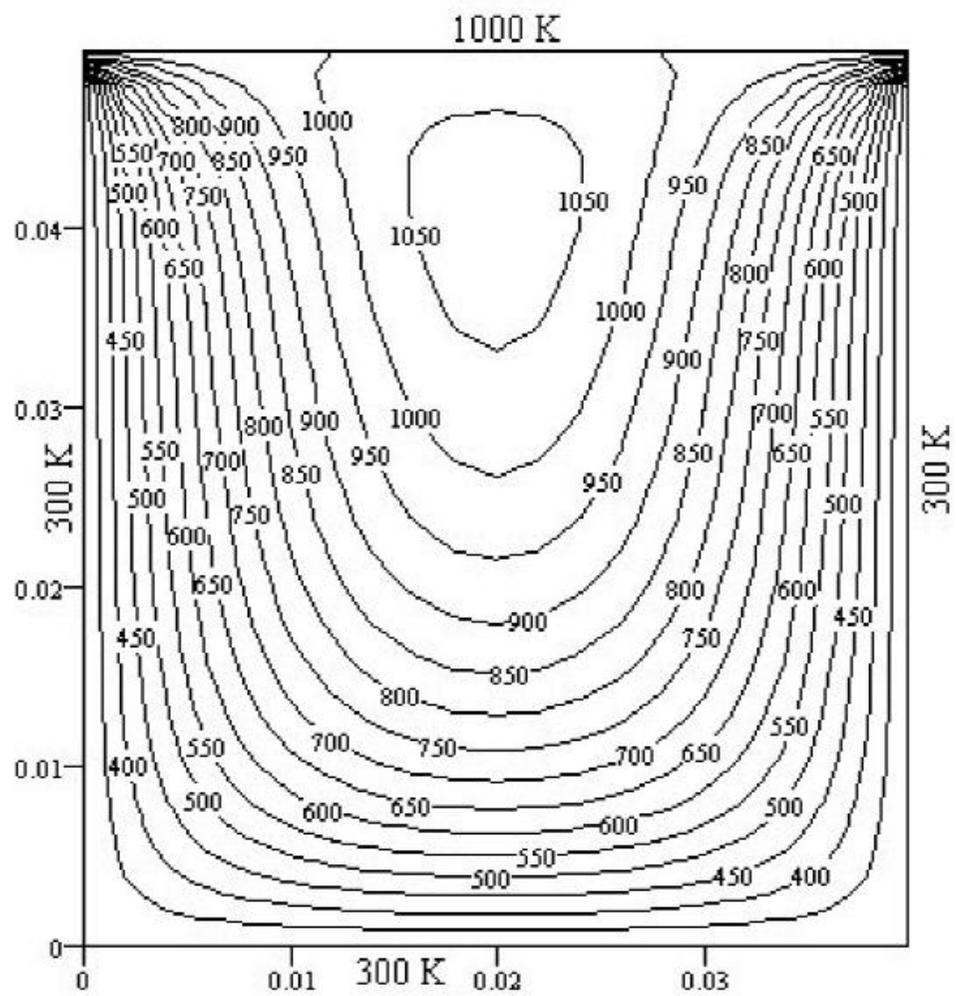


Fig. 4.39 Distribution du champ thermique à l'instant $t = 50$ s.

D'après les résultats présentés au tableau 4.1 on constate qu'une bonne précision est obtenue pour un pas de temps $\Delta t \leq 0.1$ s .

Exemple 2

On considère une barre très longue ayant la section transversale rectangulaire $(0.08 \times 0.1) \text{ m}^2$. À l'instant $t = 0$ la section transversale, de la barre, a une distribution uniforme de la température, $T_0 = 425 \text{ }^\circ\text{C}$. La barre est mise en contact avec un fluide ayant la température uniforme $T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Le coefficient de transfert thermique par convection, sur la surface de séparation entre la barre et le fluide, est $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Déterminer l'évolution, dans le temps, de la distribution de la température sur la section transversale de la barre, en utilisant un pas de temps $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

On connaît les suivantes propriétés du matériau de la barre :

- la conductivité thermique, $\lambda = 35 \text{ W/mK}$;
- la densité de masse, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$;
- la chaleur spécifique, $c_p = 3500 \text{ J/kgK}$.

Solution

En profitant de la symétrie, on calcule la distribution de la température sur un quart de la section transversale (fig. 4.42).

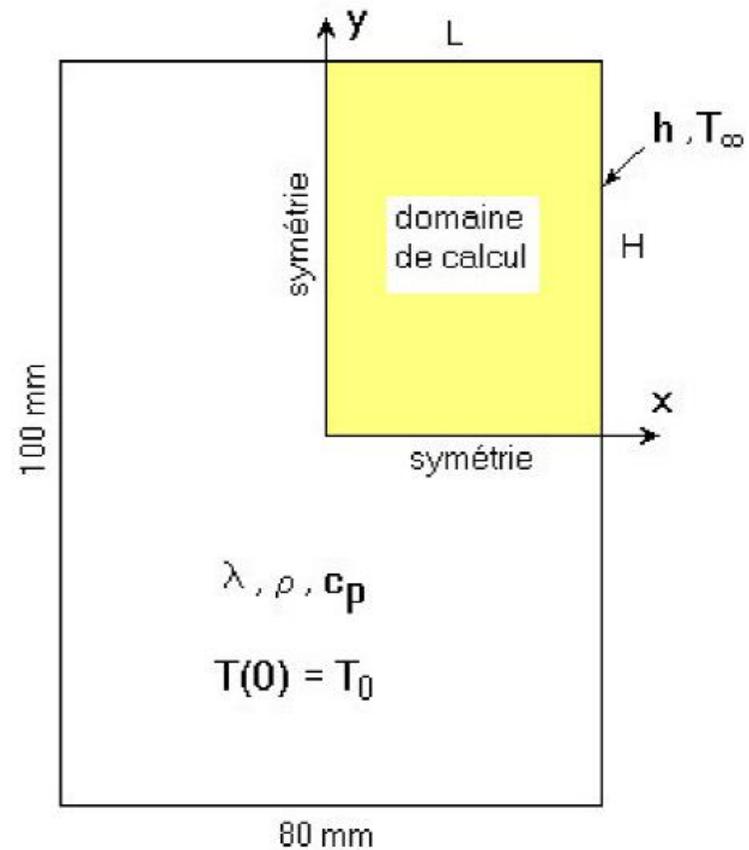


Fig. 4.42 Section transversale par la barre rectangulaire.

Le domaine de calcul découpé sur la fig. 4.42 est présenté à la fig. 4.43. On considère un maillage à 30 noeuds comme dans l'exemple 1 ($\Delta x = \Delta y = 0.01$ m).

L'équation différentielle qui gouverne le régime transitoire de la barre est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (4.162)$$

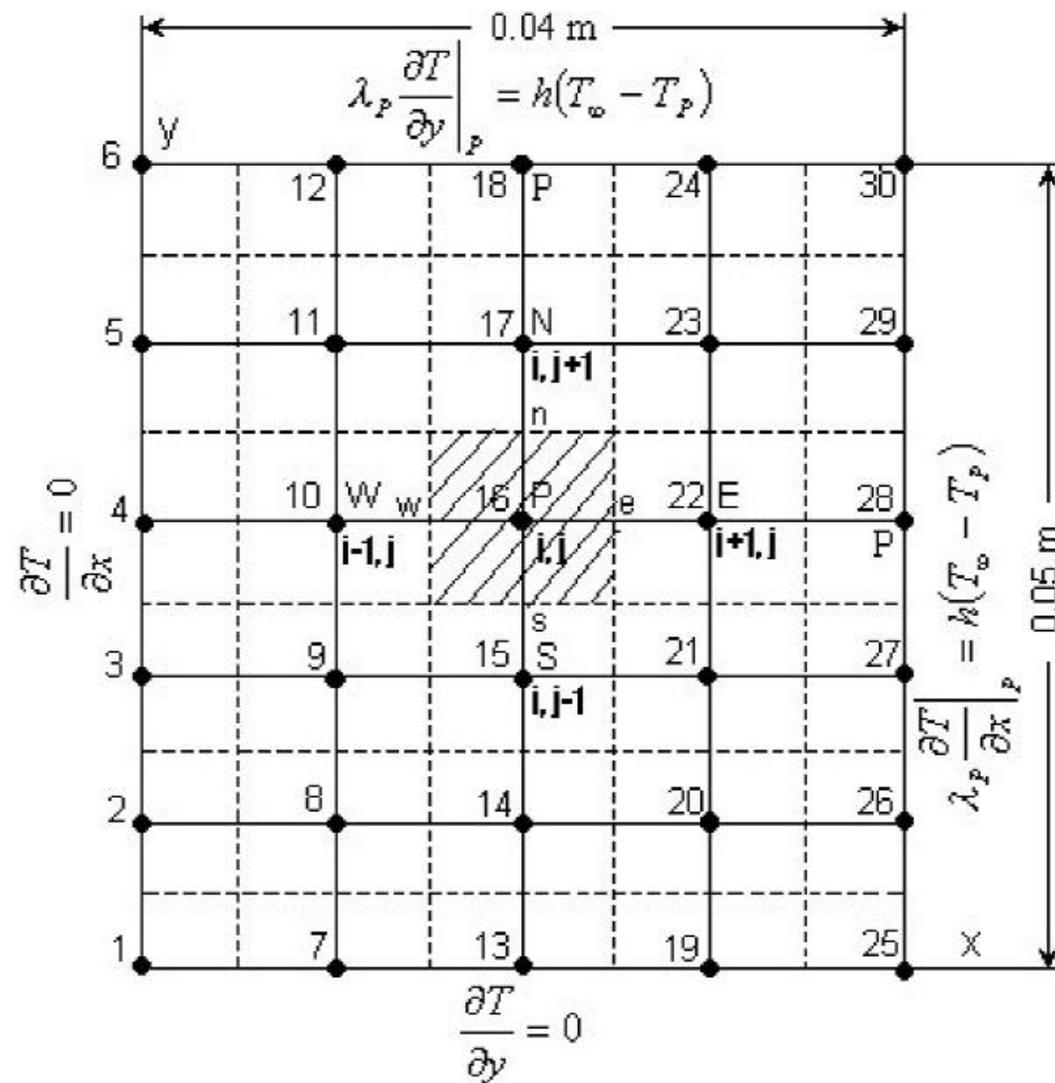


Fig. 4.43 Maillage 2D pour le domaine de calcul.

Pour obtenir l'équation discrétisée pour un noeud intérieur du domaine de calcul (le noeud 16 par exemple) on intègre l'équation (4.162) sur le volume de contrôle hachuré autour du noeud 16 (fig. 4.43). En utilisant le schéma totalement implicite on obtient (voir l'obtention de l'équation (4.155)) :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.163)$$

où

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad b = a_P^0 T_P^0,$$

$$A_w = A_e = \Delta y \cdot 1 \quad A_s = A_n = \Delta x \cdot 1,$$

le terme source S étant nul dans notre exemple.

Les valeurs numériques des coefficients de l'équation (4.163), dans les conditions d'un maillage uniforme, sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 ;$$
$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.1} = 3500 ;$$

$$a_P = 35 + 35 + 35 + 35 + 3500 = 3640 ;$$

$$b = 3500 \cdot T_P^0 .$$

L'équation (4.163) s'applique successivement pour les noeuds intérieurs du domaine de calcul (les noeuds 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, et 23) et on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
3640T_8 &= 35T_2 + 35T_{14} + 35T_7 + 35T_9 + 3500T_8^0 \\
3640T_9 &= 35T_3 + 35T_{15} + 35T_8 + 35T_{10} + 3500T_9^0 \\
3640T_{10} &= 35T_4 + 35T_{16} + 35T_9 + 35T_{11} + 3500T_{10}^0 \\
3640T_{11} &= 35T_5 + 35T_{17} + 35T_{10} + 35T_{12} + 3500T_{11}^0 \\
3640T_{14} &= 35T_8 + 35T_{20} + 35T_{13} + 35T_{15} + 3500T_{14}^0 \\
3640T_{15} &= 35T_9 + 35T_{21} + 35T_{14} + 35T_{16} + 3500T_{15}^0 \\
3640T_{16} &= 35T_{10} + 35T_{22} + 35T_{15} + 35T_{17} + 3500T_{16}^0 \\
3640T_{17} &= 35T_{11} + 35T_{23} + 35T_{16} + 35T_{18} + 3500T_{17}^0 \\
3640T_{20} &= 35T_{14} + 35T_{26} + 35T_{19} + 35T_{21} + 3500T_{20}^0 \\
3640T_{21} &= 35T_{15} + 35T_{27} + 35T_{20} + 35T_{22} + 3500T_{21}^0 \\
3640T_{22} &= 35T_{16} + 35T_{28} + 35T_{21} + 35T_{23} + 3500T_{22}^0 \\
3640T_{23} &= 35T_{17} + 35T_{29} + 35T_{22} + 35T_{24} + 3500T_{23}^0
\end{aligned}
\tag{4.164}$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière “West”, le noeud 4 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.44.

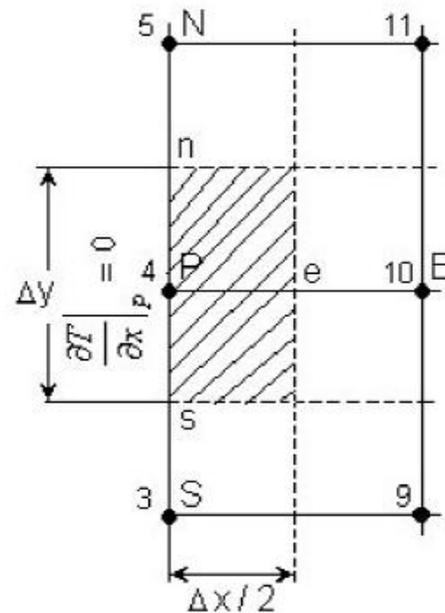


Fig. 4.44 Demi-volume de contrôle sur la frontière “W”.

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt \quad (4.165)$$

L'intégration de l'équation (4.165) donne :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{2} \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \frac{\Delta x}{2} dt$$

En tenant compte que $(\partial T / \partial x)_p = 0$ (condition à la limite sur la frontière West), en supposant une variation linéaire du gradient de température et en utilisant le schéma totalement implicite pour l'intégration dans le temps, on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}, \quad (4.166)$$

où $A_e = \Delta y$ et $A_s = A_n = \Delta x / 2$.

En regroupant les termes, dans l'équation (4.166), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.167)$$

où

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} ;$$

$$a_P = a_E + a_S + a_N + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} \quad b = a_P^0 T_P^0.$$

Les valeurs numériques des coefficients pour l'équation (4.167) sont les suivantes :

$$a_E = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 \quad a_S = a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 ;$$

$$a_p = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 = 1820$$

$$b = 1750 \cdot T_p^0.$$

Les équations discrétisées pour les noeuds intérieurs sur la frontière “West” (les noeuds 2, 3, 4 et 5) sont :

$$\begin{aligned} 1820T_2 &= 35T_8 + 17.5T_1 + 17.5T_3 + 1750T_2^0 \\ 1820T_3 &= 35T_9 + 17.5T_2 + 17.5T_4 + 1750T_3^0 \\ 1820T_4 &= 35T_{10} + 17.5T_3 + 17.5T_5 + 1750T_4^0 \\ 1820T_5 &= 35T_{11} + 17.5T_4 + 17.5T_6 + 1750T_5^0 \end{aligned} \tag{4.168}$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière “South”, le noeud 13 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.45 et on obtient :

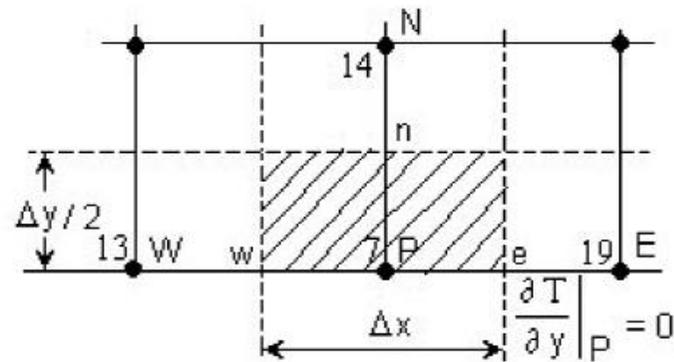


Fig. 4.45 Demi-volume de contrôle sur la frontière "S"

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P \right) \Delta x dt . \quad (4.169)$$

En tenant compte que $(\partial T / \partial y)_p = 0$ (condition à la limite sur la frontière “South”), en remplaçant les gradients de température aux points e, w, et n et en utilisant le schéma totalement implicite pour l’intégration dans le temps, on obtient l’équation discrétisée sous la forme générale :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + b, \quad (4.170)$$

où

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n};$$

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_P^0 \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} \quad b = a_P^0 T_P^0 ;$$

$$A_e = A_w = \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \text{ et } A_n = \Delta x \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients, de l’équation (4.170), sont :

$$a_W = a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 \quad a_N = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 ;$$

$$a_p = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 = 1820 \quad b = 1750 \cdot T_P^0 .$$

Les équations discrétisée pour les noeuds 7, 13 et 19 sont les suivantes :

$$1820T_7 = 17.5T_1 + 17.5T_{13} + 35T_8 + 1750T_7^0$$

$$1820T_{13} = 17.5T_7 + 17.5T_{19} + 35T_{14} + 1750T_{13}^0 \quad (4.171)$$

$$1820T_{19} = 17.5T_{13} + 17.5T_{25} + 35T_{20} + 1750T_{19}^0$$

L'équation discrétisée pour le noeud 1 est obtenue en intégrant l'équation (4.162) sur le quart de volume de contrôle hachuré présenté à la fig. 4.46. Après la première intégration on obtient :

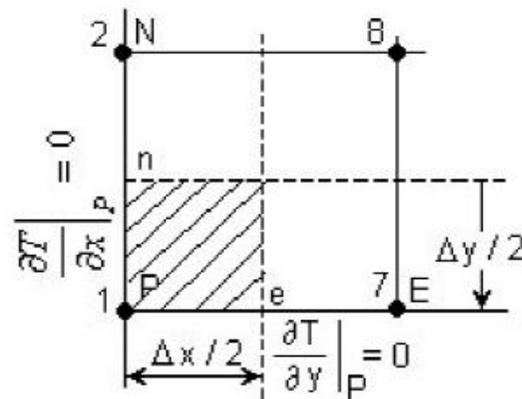


Fig. 4.46 Quart de volume de contrôle (le coin W-S).

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right) \frac{\Delta x}{2} dt \quad (4.172)$$

De la même façon, on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 1 sous la forme générale suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + b, \quad (4.173)$$

où
$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_E + a_N + a_P^0 \quad b = a_P^0 T_P^0 ;$$

$$A_e = (\Delta y / 2) \cdot 1 \text{ et } A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.173) sont :

$$a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 \quad a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 = 910 ;$$

$$b = 875T_P^0.$$

On obtient ainsi l'équation discrétisée pour le noeud 1 :

$$910T_1 = 17.5T_7 + 17.5T_2 + 875T_1^0 \quad (4.174)$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière “East”, le noeud 28 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.47.

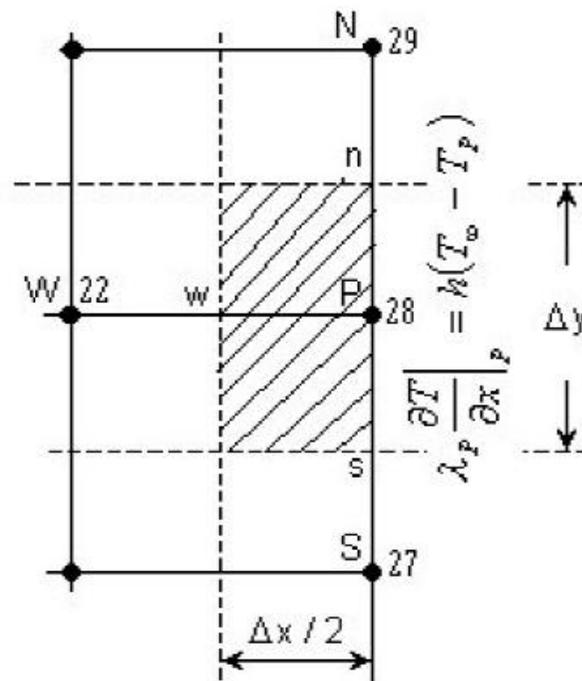


Fig. 4.47 Demi-volume de contrôle sur la frontière “E”.

Après l'intégration dans l'espace et dans le temps pour la part gauche de l'équation et dans l'espace pour la part droite, on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{2} \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \frac{\Delta x}{2} dt. \quad (4.175)$$

En tenant compte que sur cette frontière la condition à la limite est :

$$\lambda_p \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_p = h(T_\infty - T_P), \quad (4.176)$$

et en intégrant avec le schéma totalement implicite, on obtient, en remplaçant les gradients de température, l'équation suivante :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} = h(T_\infty - T_P) A_p - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_w}{\delta x_w} + \lambda_n A_n \frac{T_n - T_P}{\delta y_n} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_s}{\delta y_s}. \quad (4.177)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.177) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (4.178)$$

où

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_W + a_S + a_N + a_P^0 + hA_P \quad b = a_P^0 T_P^0 + hA_P T_\infty ;$$

$$A_P = \Delta y \cdot 1, A_W = \Delta y \cdot 1 \text{ et } A_S = A_N = (\Delta x / 2) \cdot 1$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.178) sont :

$$a_S = a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 \quad a_W = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 ;$$

$$a_P = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 + 100(0.01 \cdot 1) = 1821 ;$$

$$b = 1750 \cdot T_P^0 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) \cdot 25 = 1750 T_P^0 + 25 ;$$

Les équations à résoudre pour les noeuds intérieurs de la frontière “East” (les noeuds 26, 27, 28 et 29) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}1821T_{26} &= 35T_{20} + 17.5T_{25} + 17.5T_{27} + 1750T_{26}^0 + 25 \\1821T_{27} &= 35T_{21} + 17.5T_{26} + 17.5T_{28} + 1750T_{27}^0 + 25 \\1821T_{28} &= 35T_{22} + 17.5T_{27} + 17.5T_{29} + 1750T_{28}^0 + 25 \\1821T_{29} &= 35T_{23} + 17.5T_{28} + 17.5T_{30} + 1750T_{29}^0 + 25\end{aligned}\tag{4.179}$$

Pour un noeud situé sur la frontière “North”, le noeud 18 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.48.

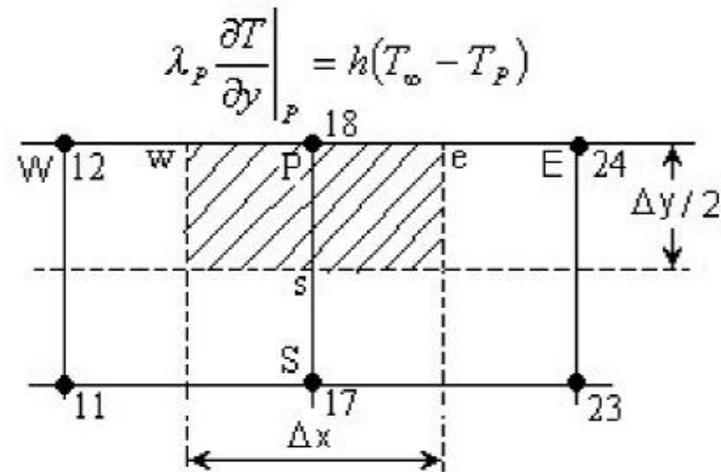


Fig. 4.48 Demi-volume de contrôle sur la frontière “N”.

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x dt \quad (4.180)$$

En tenant compte que sur cette frontière la condition à la limite est :

$$\lambda_P \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_P = h(T_\infty - T_P). \quad (4.181)$$

Après l'intégration de l'équation (4.180), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + b, \quad (4.182)$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_P^0 + h A_P \quad b = a_P^0 T_P^0 + h A_P T_\infty$$

$$A_P = A_S = \Delta x \cdot 1 \text{ et } A_e = A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.182) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5$$

$$a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_S = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 ;$$

$$a_P = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) = 1821 ;$$

$$b = 1750T_P^0 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) \cdot 25 = 1750T_P^0 + 25 ;$$

Les équations à résoudre, pour les noeuds intérieurs, sur la frontière "North" (les noeuds 12, 18 et 24) sont :

$$\begin{aligned}
1821T_{12} &= 17.5T_6 + 17.5T_{18} + 35T_{11} + 1750T_{12}^0 + 25 \\
1821T_{18} &= 17.5T_{12} + 17.5T_{24} + 35T_{17} + 1750T_{18}^0 + 25 \\
1821T_{24} &= 17.5T_{18} + 17.5T_{30} + 35T_{23} + 1750T_{24}^0 + 25
\end{aligned} \tag{4.183}$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 30 on intègre l'équation (4.162) sur le quart du volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.49, c'est-à-dire

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt. \tag{4.184}$$

L'intégration de l'équation (4.184) donne :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \frac{\Delta x}{2} dt \tag{4.185}$$

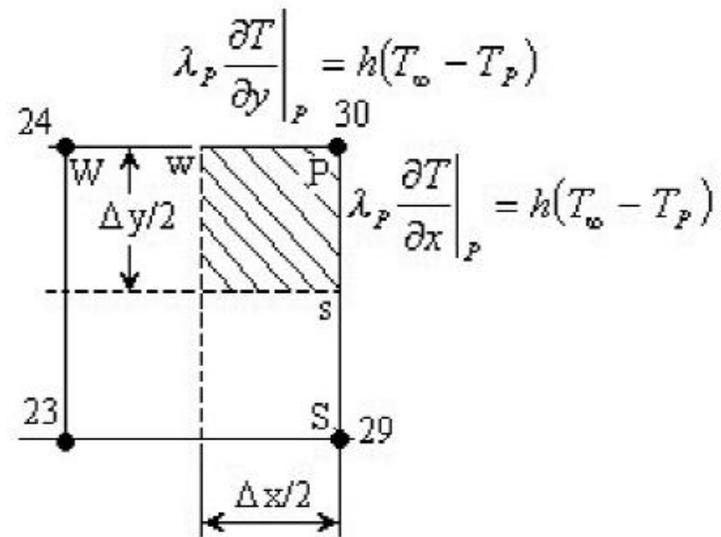


Fig.4.49 Quart du volume de contrôle (le coin "N-E").

En tenant compte de conditions aux limites sur les frontières “North” et “East” après l’intégration, on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} = h(T_\infty - T_P) \frac{\Delta y}{2} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + h(T_\infty - T_P) \frac{\Delta x}{2} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}. \quad (4.186)$$

En regroupant les termes, dans l’équation (4.186), on obtient la forme générale de l’équation discrétisée pour le noeud 30 :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + b ; \quad (4.187)$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_W + a_S + a_P^0 + h \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2} \right) \quad b = a_P^0 T_P^0 + h T_\infty \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2} \right) ;$$

$$A_s = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ et } A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.187) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 \quad a_S = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \left(\frac{0.01 + 0.01}{2} \right) = 911$$

$$b = 875T_P^0 + 100 \cdot 25 \cdot \left(\frac{0.01 + 0.01}{2} \right) = 875T_P^0 + 25.$$

L'équation à résoudre pour le noeud 30 est la suivante :

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt. \quad (4.189)$$

L'intégration de l'équation (4.189) donne :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \frac{\Delta x}{2} dt \quad (4.190)$$

En tenant compte de conditions aux limites sur les frontières "North" et "West" après l'intégration on obtient :

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} + h(T_\infty - T_P) \frac{\Delta x}{2} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}. \quad (4.191)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.191), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud 6 :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + b ; \quad (4.192)$$

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_E + a_S + a_P^0 + h \frac{\Delta x}{2} \quad b = a_P^0 T_P^0 + h T_\infty \frac{\Delta x}{2} ;$$

$$A_s = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ et } A_e = (\Delta y / 2) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.192) sont :

$$a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5$$

$$a_S = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \frac{0.01}{2} = 911.5 ;$$

$$b = 875T_P^0 + 100 \cdot 25 \cdot \frac{0.01}{2} = 875T_P^0 + 12.5 ;$$

L'équation à résoudre pour le noeud 6 est la suivante :

$$911.5T_6 = 17.5T_{12} + 17.5T_5 + 875T_6^0 + 12.5. \quad (4.193)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 25 on intègre l'équation (4.162) sur le quart du volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.51.

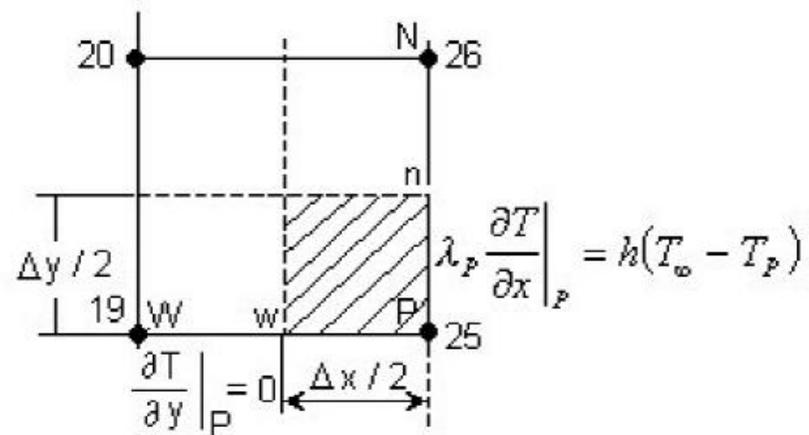


Fig. 4.51 Quart du volume de contrôle (le coin "S-E").

En intégrant de la même façon que pour le noeud 6 on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N + b ; \quad (4.194)$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} ;$$

$$a_P = a_W + a_N + a_P^0 + h \frac{\Delta y}{2} \quad b = a_P^0 T_P^0 + h T_\infty \frac{\Delta y}{2} ;$$

$$A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ et } A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.194) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 \quad a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1 \right)}{0.01} = 17.5 ;$$

$$a_p^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_p = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \frac{0.01}{2} = 911.5 ;$$

$$b = 875T_p^0 + 100 \cdot 25 \cdot \frac{0.01}{2} = 875T_p^0 + 12.5 .$$

L'équation à résoudre pour le noeud 25 est la suivante :

$$911.5T_{25} = 17.5T_{19} + 17.5T_{26} + 875T_{25}^0 + 12.5 . \quad (4.195)$$

Les équations (4.164), (4.168), (4.171), (4.174), (4.179), (4.183), (4.188), (4.193), et (4.195) forment le système d'équations à résoudre. Pour la résolution de ce système, on applique l'algorithme de Thomas adapté aux problèmes 2D comme à l'exemple 1. À la figure 4.52 on présente la solution numérique après $\Delta t = 10$ s et à la figure 4.53 après $\Delta t = 1000$ s.

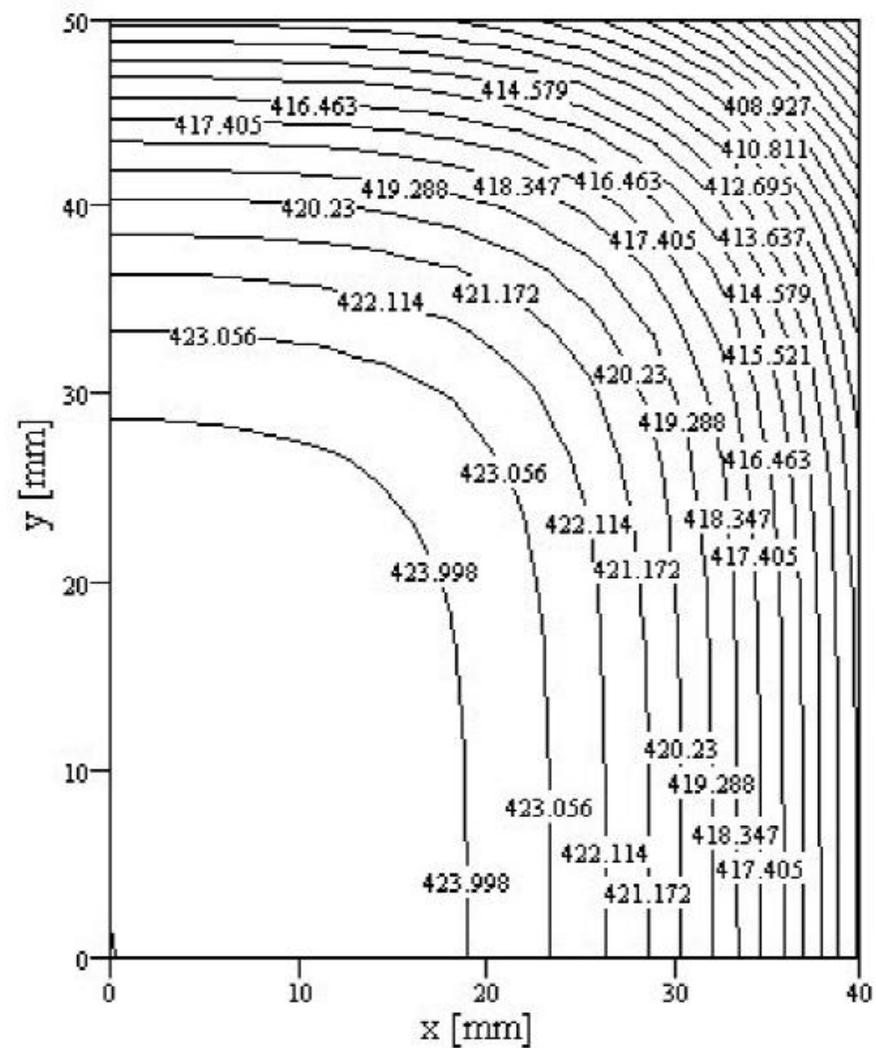


Fig. 4.52 Distribution spatiale du champ thermique à l'instant $t = 10$ s.

Dans le tableau 4.11 on présente une comparaison des solutions numériques obtenues par la méthode des volumes finis (le programme THERM2Di_2) et celle obtenue par la méthode des éléments finis (à l'aide du logiciel QuickField 4.2T).

À la figure 4.54 on présente une comparaison des solutions numériques en ce qui concerne l'évolution dans le temps de la température du point de coordonnées $(x = 40, y = 50)$. On constate qu'il y a une très bonne correspondance.

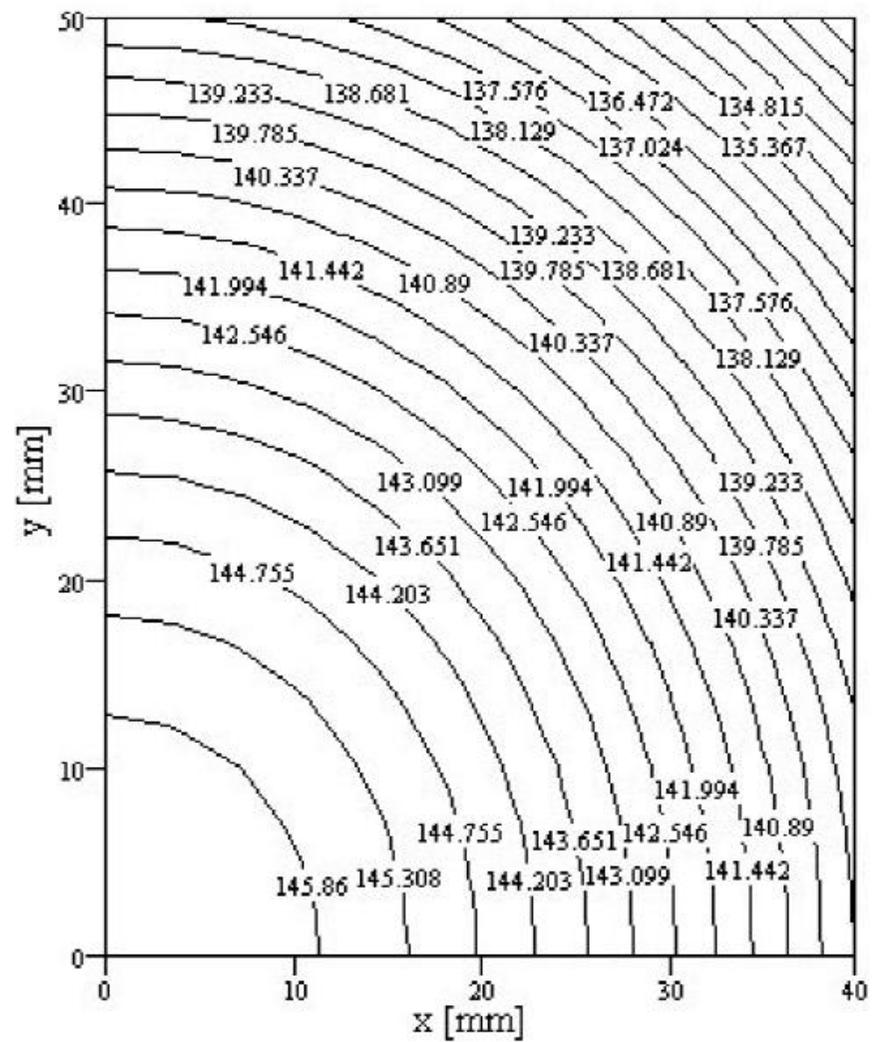


Fig. 4.53 Distribution spatiale du champ thermique à l'instant $t = 1000$ s.

Tableau 4.11 Comparaison des résultats

$x = 40 \text{ mm}$				
$y [\text{mm}]$	$t = 10 \text{ s}$		$t = 100 \text{ s}$	
	T [K]		T [K]	
	Volumes finis	QuickField	Volumes finis	QuickField
0	412.533	412.515	373.025	373.063
3.333	412.531	412.460	372.923	372.905
6.666	412.525	412.437	372.619	372.578
9.999	412.512	412.444	372.110	372.078
13.332	412.485	412.442	371.398	371.388
16.665	412.434	412.357	370.482	370.476
19.998	412.340	412.266	369.359	369.331
23.331	412.175	412.139	368.031	368.012
26.664	411.896	411.849	366.495	366.474
29.997	411.447	411.349	364.751	364.718
33.333	410.752	410.674	362.799	362.790
36.663	409.724	409.630	360.638	360.621
39.996	408.264	408.083	358.268	358.228
43.329	406.280	406.044	355.690	355.641
46.662	403.692	403.502	352.904	352.877
50.000	400.450	400.411	349.912	349.928

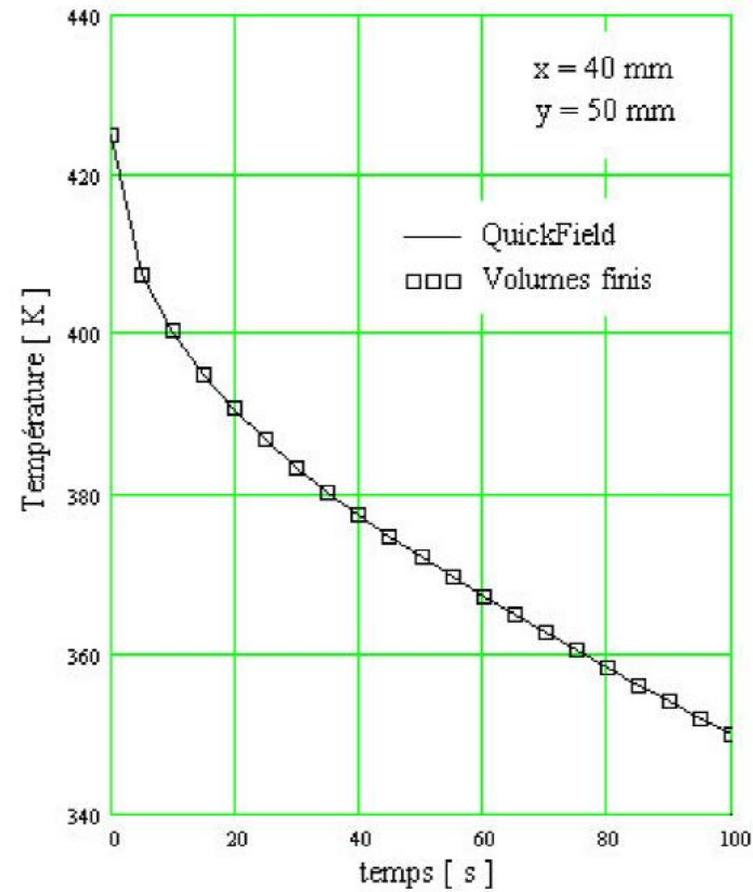


Fig. 4.54 Évolution de la température dans le temps pour le point de coordonnées (40,50) mm (comparaison : volumes finis – QuickField).

