Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Introduction à la théorie des opérateurs

Solutions des séries d'exercices

S. Beloul, A. Rehouma et K. Zaiz

Pour les étudiants de :

Troisième Année Licence Mathématiques

2019-2020

Solutions de la série 01

Exercice 1

À l'aide de les propriétés caractéristique de borne inférieur et des normes des espaces, on montre que $\{||v||_{X+Y} = \inf_{v=x+y}(||x||_X + ||y||_Y) \quad x \in X, y \in Y\}$ est un norme.

- $\forall\ v \in X+Y \quad ||v||_{X+Y} \geq 0$?

  on a

$$\|x\|_X \geq 0 \text{ et } \|y\|_Y \geq 0;$$

  d'où

$$\|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0;$$

  alors

$$\inf_{x\in X, y\in Y}(||x||_X + ||y||_Y) \geq 0;$$

- $\|v\|_{X+Y} = 0 \Leftrightarrow \ v = 0$?

  On pose

$$\|v\|_{X+Y} = \inf A, \text{ où } A = \{||x||_X + ||y||_Y : \ v = x+y\}$$

1. $\Rightarrow$) Soit $v \in X+Y$, supposons que $\inf A = 0$ i.e $\|v\| = 0$

   La propriété caracté ristique de la borne inférieure dit que

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists\ z_\epsilon \in A \text{ t.q} : z_\epsilon < \inf A + \epsilon).$$

   Soit $j \in \mathbb{N}^*$, choisissons $\epsilon = \frac{1}{j}$. Donc, $\exists z_j \in A$ t.q : $z_j < 0 + \frac{1}{j} = \frac{1}{j}$.

   On sait que $z_j \geq 0$ et que z_j s'écrit forcement comme

$$z_j = \|x_j\| + \|y_j\|, x_j \in X, y_j \in Y\ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

   Ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq ||x||_X + ||y||_Y < \frac{1}{j} \tag{1}$$

De plus, on sait que $v = x_j + y_j$ par $\forall j \in \mathbb{N}$,

on fait un passage à la limite dans (1) qui donne

$$\|x_j\| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \wedge \quad \|y_j\| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$x_j \overset{X}{\longrightarrow} 0 \quad \wedge \quad y_j \overset{Y}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

Par conséquent (se rappeler que $X \hookrightarrow X + Y \;\wedge\; Y \hookrightarrow X + Y$).

Par suite :

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow \quad & x_j \overset{X+Y}{\longrightarrow} 0 \quad \wedge \quad y_j \overset{X+Y}{\longrightarrow} 0. \\ & \Rightarrow x_j + y_j \overset{X+Y}{\longrightarrow} 0 \\ & \Rightarrow v = 0. \end{aligned}$$

2. $(\Leftarrow) v = 0 \Rightarrow \inf A = 0$ evident car $v = 0 + 0$ est une décomposition possible et $\inf A \geq 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ v \in X + Y,\ \|\lambda v\|_{X+Y} = |\lambda| \|v\|_{X+Y}$?

  on a

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_{X+Y} &= \inf_{v=x+y}(||\lambda x||_X + ||\lambda y||_Y); \\ &= \inf_{v=x+y}(|\lambda|||x||_X + |\lambda|||y||_Y); \\ &= \inf_{v=x+y}(|\lambda|(||x||_X + ||y||_Y)); \\ &= |\lambda| \inf_{v=x+y}(||x||_X + ||y||_Y); \\ &= |\lambda| \|v\|_{X+Y}. \end{aligned}$$

- $\forall (u = x' + y',\ v = x + y) \in (X + Y,\ X + Y)\ \ \|u + v\|_{X+Y} \leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}$?

  on pose $z = x + x'$ et $z' = y + y'$

  on a

$$\|u + v\|_{X+Y} = \inf_{v+u=z+z'}(||z||_X + |z'||_Y);$$

$$\leq \inf_{v+u=z+z'}(((||x||_X + ||x'||_X) + (||y||_Y + ||y'||_Y);$$

$$\leq \inf_{v+u=z+z'}(((||x||_X + ||y||_Y) + (||x'||_X + ||y'||_Y);$$

$$\leq \inf_{v=x+y}(||x||_X + ||y||_Y) + inf_{u=x'+y'}(||x'||_X + ||y'||_Y);$$

$$\leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}.$$

Donc $\|.\|_{X+Y}$ est un norme.

En général

$$\|v\|_{X+Y} = \inf_{v=x+y}(\|x\|_X + t\|y\|_Y) \quad \forall t > 0$$

est une norme. De même manière on le montre.

Exercice 2

1. Utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$|f(2^k y) - 2^k f(y)| \leq |f(2^k y) - 2f(2^{k-1}y)| + 2|f(2^{k-1}y) - f(2^{k-2}y)| + ... + 2^{k-1}|f(2y) - 2f(y)|$$

$$\leq (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1})a = a(2^k - 1) \leq 2^k a.$$

2. Soit $n \geq 0$ et $k \geq 0$. Posons $y = 2^n x$ dans l'inégalité précédente et après division par $2^n + k$, on trouve

$$|\frac{f(2^{n+k}x)}{2^{n+k}} - \frac{f(2^n x)}{2^n}| \leq \frac{a}{2^n}$$

ce qui implique que la suite définie par $x_n = \frac{f(2^n x}{2^n}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 3

1. Pour a et b strictement positives, on a

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$$

$$\leq \ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

puisque la fonction expontielle est continue et croissante, on obtient :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est évidente.

2. Posons $a = \frac{x_i}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{y_i}{\|y\|_q}$, ou $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\|y\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$.
   Maintenant, en appliquant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} ab = \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{1}{p}\Big(\frac{x_i}{\|x\|_p}\Big)^p + \frac{1}{q}\Big(\frac{y_i}{\|y\|_p}\Big)^q \\ &= \frac{1}{p}\Big(\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\Big(\frac{|y_i|^q}{\|q\|_q^q} \end{aligned}$$

   Passant à la somme, on trouve

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|x\|_p^p}\Big) + \frac{1}{q}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^p}{\|y\|_q^q}\Big)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

   Donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

3. d'après l'inégalité précèdente (de Holder), on a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|(|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i(x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1-\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 4

Supposons que $(E, \|.\|_1)$ est de Banach. Soit (x_n) une suite de Cauchy dnas E pour la norme $\|.\|_2$, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon,$$

puisque les deux normes sont équivalente, alors il existe $c_1 > 0$, tel que

$$c_1 \|x_n - x_m\|_1 \leq \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon,$$

ce qui implique (x_n) est de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$, qui est complet, donc (x_n) converge vers $x \in E$ pour la norme $\|.\|_1$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - x\|_1 < \varepsilon',$$

l'équivalence de les normes nous donne :

$$\|x_n - x\|_2 \leq c_2 \|x_n - x\|_1 < c_1 \varepsilon'.$$

Par conséquent, (x_n) est convergente dans $(E, \|.\|_1)$.

Exercice 5

1. Il est clair que
$$|x_n - x_l| \leq \|x_n - x_l\| \leq \varepsilon$$
2. L'inégalité précédente implique que $(x_n(k))$ est Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle est convergente vers $x \in \mathbb{R}$.
3. Puisque $x_{N(\varepsilon)}(k) \in \ell^1$, alors la serie$\sum_k x_{N(\varepsilon)}(k \geq 0)$ est convergente, et par la défintion de la limite, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k \geq K} x_{N(\varepsilon)}(k) \leq \varepsilon$.

4. Pour $n \geq N(\varepsilon)$ fixé, on a

$$\sum_{k \geq K}^{L} |x_n(k)| \leq \sum_{k \geq K}^{L} |x_n - x_{N(\varepsilon)}(k)| + \sum_{k \geq K}^{L} x_{N(\varepsilon)}(k)$$

$$\leq \|x_n - x_{N(\varepsilon)}(k)\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Passanr à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $\sum_{k \geq K}^{L} |x(k)| \leq 2\varepsilon$.

5. La série de terme générale $|x(k)|$ est à termes positifs, d'après la question 4, la suite des sommes partieles est majorée, donc la série est convergente, i.e., $x \in \ell^1$.

   Par ailleur, quand $L \to \infty$, alors pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ on a

$$\|x_n(k) - x(k)\| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |x_n(k) - x(k)| + \sum_{k \geq K} x_n(k) + \sum_{k \geq K} x(k),$$

   la première somme est finie et indépendant de n, donc il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$\sum_{k=1}^{K-1} |x_n(k) - x(k)| \leq \varepsilon.$$

   Par conséquant, pour $n \geq \max(N_1, N(\varepsilon))$, on a

$$\|x_n(k) - x(k)\| \leq 5\varepsilon.$$

   Donc, x_n converge vers x et ℓ^1 est complet.

Exercice 6

Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}$, alors on a

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in, \forall n, m \geq n_0, \|T_n x - T_m x\|_F \leq \|x\| \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}} \to 0,$$

alors $(T_n x)$ est de Cauchy dans F, qui est complet, donc $T_n x \to y$.

définissons l'opérateur à tout $x \in E$ associe y.On va montrer que T est linéaire borné et est une limite de la suite (T_n).

En effet, pour x_1 et x_2, on a

$$T(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \lim_{n\to\infty} T_n(x_1)$$

$$= Tx_1 + Tx_2$$

$$T(\alpha x_1) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) = \alpha x_1$$

$$|\|T_n\|_{\mathcal{L}} - \|T_m\|_{\mathcal{L}}| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}} \to 0$$

alors $\|T_n\|_{\mathcal{L}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}$, donc elle est bornée, cest à dire

$$\exists M > 0, \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|T_n x\|_F \leq M\|x\|$$

Passant à la limite, on trouve que

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et tout $x \in E$, tel que $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|T_{n+p}x - T_p x\|_F \leq \varepsilon$$

Pour $p \to \infty$, on obtient

$$\|T_n x - Tx\| \to 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x - Tx\|_F = \|T_n - T\|_{\mathcal{L}} \to 0.$$

Exercice 7

Théorème 0.1. *(Rappel : limites de fonctions dérivables)*
Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables(de classe C^1) sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. S'il existe un point x_0 de $[a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge et

que la suite (f'_n) converge uniformement vers g. Alors, (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, f est dérivable (de classe C^1) et $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n$. C'est à dire $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f'_n = f'$.

1. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n - f_m| = |\frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - (x^2 + \frac{1}{m^2})}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}}}| \leq |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|,$$

   donc $\lim_{n,m\to\infty} \sup_{-1\leq x\leq 1} |f_n - f_m| = 0$.Alors (f_n) est de Cauchy.
   Il est clair que $\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{x^2} = |x|$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|| = |\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \to 0.$$

   Donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{-1\leq x\leq 1} |f_n - f| = 0$.
   Ce qui implique que (f_n) est convergente dans $C([-1,1])$, mais elle est divergente dans $C^1([-1,1])$, car $f \notin C^1([-1,1])$.

2. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|f_n - f_m\|_\infty + \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon,$$

   ce qui implique, (f_n) et (f_m) sont de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$, c'est à dire dans $C([-1,1]), \|.\|_\infty$, qui est complet. Puisque (f_n) converge uniformément vers f et (f'_n) converge unifomément vers g, alors d'après le théorème de limites de fonctions dérivables $g = f'$, donc $f \in E$, c'est à dire (f_n) est convergente dans $(E, \|.\|)$.

Exercice 8

1.

$$\|Tx_n\|^2_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \sup_{n\geq 1} |\alpha_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|^2 \|x_n\|_{\ell^2}.$$

   Donc $T \in \ell^{\in}$.

2. Soit $x_1 = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$, alors $\dfrac{\|Tx_1\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} = \alpha_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$, on a aussi $x_2 = (0, 1, ..., 0, ...)$ et $\dfrac{\|Tx_2\|}{\|x\|_{\ell^2}} = \alpha_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$.

   Donc Pour $x_n = (0, 0, ...0, 1, 0, ...)$, on a $\dfrac{\|Tx_n\|}{\|x\|_{\ell^2}} = \alpha_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$.

   Par conséquent, $\sup |\alpha_n| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$, ce qui implique $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup\limits_{n\geq} |\alpha_n|$.

   Autre méthode : soit $x_n = (\underbrace{0, 0, ...0}_{n-1}, 1, 0, 0, ...)$, alors $\|Tx_n\| = |\alpha_n|$ et $\|x_n\| = 1$. Donc

$$\sup_{n\geq 1} \|Tx_n\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$$

   et on a

$$\sup_{n\geq 1} |\alpha_n| = \sup_{n\geq 1} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

Exercice 9

1.

$$\|Tf(x)\| = |Tf(x)| \leq 3|f(x)| + 2|f(x+4)| \leq 5\|f\|_\infty$$

   Donc $\|T\| \leq 5$. Si on prend une fonction de $C_b(\mathbb{R})$ de norme 1, par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$|Tf(0)| = 5 \Rightarrow \|Tf\|_\infty = 5,$$

   alors

$$5 = \frac{\|Tf(0)\|_\infty}{\|f(0)\|_\infty} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\|Tf(x)\|}{\|x\|} = \|T\|$$

   Donc $\|T\| = 5$.

2. Puisque $|x_n| \leq \sup |x_n| = \|x_n\|_\infty$, on a $|F(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n\|}{2^n} \leq \|x_n\|_\infty$. Donc F est continue et $\|F\| \leq 1$.

   Définissons une suite comme suit

$$y_n = \begin{cases} 1, & n \leq n_0 \\ 0, & n > n_0 \end{cases}$$

   Il est clair que $\|y_n\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |y_n| = 1$, donc $F(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \Rightarrow \frac{|F(y_n)|}{\|y_n\|_\infty} = 1 \leq \sup_{x_n \in \mathcal{C}_0} \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|_\infty} = \|F\|_{\mathcal{L}}$. Par conséquent, $\|F\|_{\mathcal{L}} = 1$.

Solutions de la série 2

Exercice 1

1. $(a_i) \in \ell^2$, alors
$$\|T_n x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{n} |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i xi|$$
$$\leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ d'après l'inégalité de Holder}$$
$$\leq M\|x\|_{\ell^2}$$
Donc T_n‘ $\in (\ell^2)^*$.

   Soit
$$z_i = \begin{cases} a_i, & i \leq n \\ 0, & i > 0 \end{cases}$$
$\|T_n z_i\| = |\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$, et donc
$$\frac{\|T_n z_i\|}{\|z_i\|} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \|T_n\|_{\mathcal{L}}.$$

2. $\|T_x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{\infty} |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i xi|$.
$$\leq (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ d'après l'inégalité de Holder}$$
$$\leq M'\|x\|_{\ell^2}$$
Donc T‘ $\in (\ell^2)^*$.

   De ême argument, on peut arriver à $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
$$|T_n x - Tx| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i| = R_n \to 0.$$

Exercice 2

1. $\|T_x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{n} |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i xi| < \infty$, donc

$$\sup_n \|Tx\|_{\mathbb{C}} < \infty.$$

2. On a $\|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, et d'après Banach Steinhaus, on a

$$\sup_{n\geq 1} \|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Exercice 3

1. $T_n x = (x_n, x_{n+1}, 0, ...)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\ell^1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|$$

$$= \lim_{n\to\infty} R_{n-1} = 0.$$

Donc T_n converge ponctuelement (simplement) vers 0.

2. $\|T_n\|_{\ell^1} = 1$, ce qui implique qu'elle n'est pas convergente uniformément.

Exercice 4

Puisque f^n est continue et $Kerf^n = (f^n)^{-1}(\{0\})$, alors $Kerf^n$ est fermé.

Autre méthode :

Soit (x_n) dans $Kerf^n$ telle que $x_n \to x$, puisque f^n est continue, alors $0 = f^n x_n \to f^n x$. Donc $f^n x = 0$, ce qui implique $x \in Kerf^n$.

Exercice 5

1. Pour tout $x \in E$, $y = Tx \in F$, on a

$$\|x\|_E = \|T^{-1}y\|_F \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)}\|Tx\|_F.$$

Donc $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(F,E)}\|x\|_E$.

2. Soit $(y_n) = (Tx_n)$ une suite convergente vers y. On va démontrer que $y \in R(T)$, en effet la suite (Tx_n) est convergente, alors est de Cauchy, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, \|T(x_n - x_m)\|_F = \|Tx_n - Tx_m\|_F \leq \varepsilon.$$

Utilisant la question précédente, on obtient

$$\|x_n - x_m\|_E \leq \|T^{-1}\|\|T(x_n - x_m)\|_F \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que (x_n) est de Cauchy dans E qui est complet, donc elle est convergente vers x, puisque T est continue, alors $y_n = Tx_n \to y = Tx \in R(T)$.

Exercice 6

1. I est linéaire et bijective(clair), pour la continuité, on a

$$\|x\|_1 = \|Ix\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |x| \int_0^1 dt = \|x\|_\infty$$

Donc $\|I\|_{\mathcal{L}} \leq 1$.

Soit x(t)=1$, alors on a \frac{\|Ix\|_1}{\|x\|_\infty} = 1 \leq \|I\|_{\mathcal{L}}$.

2. Pour $x_n = t^n$, alors $\|x\|_\infty = 1$ et $\|x\|_1 = \frac{1}{n+1}$. Si I^{-1} est continue alors il existe $C > 0$,tel que $\|x\|_\infty\|I^{-1}x\|_\infty =\leq \frac{C}{n+1}$, ce qui implique l'existence de C, tel que $C > n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ça impossible.

3. Puisque X est de Banach, si Y est de Banach aussi, alors on peut appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach. Donc Y n'est pas complet.