1- Tenseurs

Tenseur de second ordre: On appelle tenseur de second ordre l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^3$.

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \qquad (2.1)$$

En particulier si (e_i) désignent la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $(i = 1,2,3)$.

Le tenseur T est parfaitement défini par les trois vecteurs

$$T(e_j) = T_{ij}(e_i) \qquad j = 1, 2, 3 \qquad (2.2)$$

c'est-à-dire par les nombres T_{ij} qui constituent la matrice des composantes du tenseur T dans la base canonique. On peut donc identifier un tenseur T avec par sa matrice (T_{ij}) dans la base canonique. Dans la suite nous ferons toujours cette identification, pour des simplicité, mais il faut noter que la plupart de notions liées aux tenseurs (symétrie, antisymétrie, déterminant, norme, produit scalaire, trace, etc.…) définies à l'aide de la matrice correspondante.

En conclusion, on va noter M_3 l'espace des matrices carrées 3×3 et on va identifier tout tenseur $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par sa matrice $T = (T_{ij}) \in M_3$. Suite à cette identification, les opérations avec les tenseurs (addition, multiplication, multiplication par les scalaires) se réduisent aux opérations correspondantes pour les matrices. Pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ le vecteur $y = Tx \in \mathbb{R}^3$ sera défini par

$$y = Tx \qquad (y_i = T_{ij} x_j) \qquad (2.3)$$

ou x et y sont des matrices unicolonnes et Tx représente le produit matriciel entre la matrice T et la matrice x.

D'après (2.2) on peut démontrer que: $T_{ij} = e_i . T e_j$

Don on a la matrice T donnée par: $[T] = T_{ij} = (T e_1, T e_2, T_3)$

Exemple: On détermine la représentation matricielle, dans le base canonique du tenseur de second ordre suivant: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$$

Le tenseur T est associé à la matrice

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tenseur zéro, tenseur unité: On appelle tenseur zéro le tenseur de second ordre 0_3 correspondant à la matrice 0_{M_3} ; de même, on appelle tenseur unité le tenseur de second ordre I_3 correspondant à la matrice $(\delta_{ij}) \in M_3$, ou δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini comme suit

$$\delta_{ij} = e_i . e_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad (2.4)$$

En utilisant (2.2) on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$$0_{M_3} x = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad (2.5)$$

$$I_3 x = x \qquad (2.6)$$

Tenseur adjoint (transposé): Soit $T \in M_3$, on appelle l'adjoint (transposé) du tenseur $T=(T_{ij})$ le tenseur T^T défini par

$$T^T = (T_{ji}) \qquad (2.7)$$

c'est-à-dire le tenseur défini par la matrice transposée du tenseur T.
En utilisant (2.1) on a

$$T^T(e_j) = T_{ji}(e_i) \qquad (2.8)$$

d'où, pour tout vecteur $x, y \in \mathbb{R}^3$ il vient

$$Tx.y = T_{ij}x_j y_i = T_{ji}x_i y_j = x.T^T y \qquad (2.9)$$

De plus pour tout tenseur $T, U \in M_3$ on a

$$(TU)^T = U^T T^T, (T^T)^T = T \qquad (2.10)$$

Ou TU représente le produit des tenseurs T et U.

Tenseur défini positif . Le tenseur $T \in M_3$ est dit défini positif s'il satisfait

$$x.Tx > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad (2.19)$$

Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique: Un tenseur $T \in M_3$ s'appelle symétrique (auto-adjoint) si $T=T^T$ c'est-à-dire $T_{ij}=T_{ji} \ \forall i,j=1,2,3$. Un tenseur $T \in M_3$ s'appelle antisymétrique si $T=-T^T$ c'est-à-dire $T_{ij}=-T_{ji} \ \forall i,j=1,2,3$.

On appelle partie symétrique de T (ou partie paire de T) le tenseur $T^s \in M_3$ défini par

$$T^s = \frac{1}{2}(T+T^T) \qquad (T_{ij}^s = \frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji}) \qquad (2.11)$$

De même, On appelle partie antisymétrique de T (ou partie impaire de T) le tenseur $T^a \in M_3$ défini par

$$T^a = \frac{1}{2}(T-T^T) \qquad (T_{ij}^a = \frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \qquad (2.12)$$

En utilisant (2.11) et (2.12) on obtient que T^s est un tenseur symétrique, T^a est un tenseur antisymétrique et

$$T = T^s + T^a \qquad (2.13)$$

Résultat:

Soit maintenant $L=(L_{ij})$ un tenseur antisymétrique. Alors il existe un unique vecteur $\omega=(\omega_i) \in \mathbb{R}^3$ appelé le vecteur axial associé à L, tel que

$$\omega \wedge v = Lv, \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

Dans n'importe quel cadre, nous avons

$$\omega_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}L_{ik} \qquad (2.14)$$

Ou ε_{ijk} est le symbole de Recci défini comme suit

$$\varepsilon_{ijk} = (e_i \times e_j).e_k = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1, & \text{si } (i,j,k)=(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1) \\ 0, & \text{si moins deux indices sont égaux} \end{cases} = \det\left([e_i],[e_j],[e_k]\right)$$

c'est-à-dire: $\omega_1 = L_{32}$, $\omega_2 = L_{13}$, $\omega_3 = L_{21}$.

Réciproquement, on considère un vecteur $\omega = (\omega_i) \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe un unique tenseur antisymétrique $L = (L_{ij})$ appelé le tenseur axial associé à ω, défini par

$$L_{ik} = \varepsilon_{ijk}\omega_j \qquad (2.15)$$

c'est-à-dire $L_{12} = -L_{21} = -\omega_3$, $L_{13} = -L_{31} = -\omega_2$, $L_{23} = -L_{32} = -\omega_1$.

On obtient ainsi que:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La trace d'un tenseur: La trace d'un tenseur $T \in M_3$ est définie par

$$trT = T_{ii} \qquad (2.16)$$

On vérifie que $tr : M_3 \to \mathbb{R}$ est une application linéaire qui en plus a les propriétés suivantes :

$$tr(TU) = tr(UT), \quad trT^T = trT, \quad trT^s = trT, \quad trT^a = 0 \qquad (2.17)$$

Remarque : Pour un tenseur $T \in M_3$, il est toujours possible de le décomposer sous forme d'une somme de deux tenseurs de tel sorte que l'un soit sphérique S ait une trace nulle et que l'autre un tenseur déviateur D. Les formules sont les suivantes :

$$T = S + D, \qquad S = \frac{tr(T)}{3} I_3, \qquad D = T - S$$

Le déterminant d'un tenseur, tenseur singulier: Le déterminant d'un tenseur $T \in M_3$ est par définition Le déterminant de la matrice de ses composantes

$$\det T = \det(T_{ij}) \qquad (2.18)$$

On vérifie sans peine que

$$\det T^T = \det T, \ \det(TU) = \det T \det U, \ \text{Pour tout } T, U \in M_3.$$

Un tenseur T s'appelle singulier si $\det T = 0$ et non-singulier si $\det T \neq 0$

L'inverse d'un tenseur. Le tenseur $T \in M_3$ est dite inversible s'il existe un tenseur $T^{-1} \in M_3$ tel que

$$T^{-1}.T = T.T^{-1} = I \qquad (2.19)$$

On peut prouver que dans ce cas le tenseur T^{-1} est le seul tenseur qui satisfait (2.19) ; il s'appelle le tenseur inverse de T. De plus, on peut montrer que T est inversible si et seulement T est non-singulier.

Soit $N_3 \subset M_3$ l'ensemble des tenseurs inversibles. En utilisant (2.19) et (2.10) on obtient

$$(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T, (T^{-1})^{-1} = T, \ (TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1} \qquad (2.20)$$

Pour tout tenseurs T et U non-singuliers.

Vecteurs et valeurs propres: Soit $T \in M_3$, on appelle vecteur propre de T tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel qu'il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$Tx = \lambda x \qquad (2.21)$$

on appelle valeur propre de T tout élément $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ vérifiant (2.25).

On peut prouver que λ est un valeur propre de T si et seulement si

$$\det(T - \lambda I_3) = 0 \qquad (2.22)$$

On peut démontrer que l'équation (2.22) est développée comme suit

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}(T_{im} - \lambda\delta_{im})(T_{jn} - \lambda\delta_{jn})(T_{kp} - \lambda\delta_{kp}) = 0$$

ou encore

$$d_3 - d_2\lambda + d_1\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Les trois coefficients d_1, d_2, d_3 sont nommés invariants principaux de T et sont des constantes quelle que soit la base :

$$\begin{cases} d_3 = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}T_{im}T_{jn}T_{kp} = \varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3} = \det(T) \\ d_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \frac{1}{2}\left((tr(T))^2 - tr(T^2)\right) \\ d_1 = T_{ii} = tr(T) \end{cases}$$

D'après (2.21), chaque valeur propre λ_i permet de définir un vecteur propre x_i tel que $Tx_i = \lambda_i x_i$

Remarques:

- Les trois vecteurs propres x_i forme une base dite **base principale** du tenseur, et notée $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)$. Dans cette base, la matrice de est diagonale et s'exprime par

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)}$$

- Si T est un tenseur symétrique, les valeurs propres λ_i sont réelles (distinctes ou confondues et la base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2)$ est toujours orthonormée.

Tenseurs d'ordre trois. On appelle tenseur d'ordre trois toute opérateur linéaire L de M_3 dans $\mathbb{R}^3$
On peut vérifier facilement qu'un tenseur d'ordre trois L est défini par $3^3 = 27$ composantes scalaires L_{ijk} telles que

$$y = L(T) \Leftrightarrow (y_i = L_{ijk}T_{jk}) \quad \forall i = 1,2,3, \ \forall T \in M_3, \ \forall y \in \mathbb{R}^3$$

Tenseurs d'ordre quatre: On appelle tenseur d'ordre quatre toute opérateur linéaire $\mathbb{E}$ de M_3 dans M_3. On peut vérifier le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{E}$ est défini par $3^4 = 81$ composantes scalaires $\mathbb{E}_{ijkh}$ telles que

$$b = \mathbb{E}a \Leftrightarrow b_{ij} = \mathbb{E}_{ijkh}a_{kh} \quad \forall i,j = 1,2,3, \text{ ou } a,b \in M_3$$

Produit contracté: Soient $T, U \in M_3$, on définit le produit contracté des tenseurs T et U est un tenseur $L \in M_3$ défini par :

$$L = T.U \ , \quad L_{ij} = T_{ik}U_{kj} \qquad (2.23)$$

Le produit doublement contracté (scalaire) de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$S = T : U = T_{ij}U_{ij} = T_{ij}U^T_{ji} = tr(T.U^T) \qquad (2.24)$$

Le produit contracté d'un tenseur $T \in M_3$ et d'un vecteur u est un vecteur, on peut pré-multiplié pa un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que T ne soit symétrique :

$$T.u = v, T_{ij}u_j = v_i, \quad u.T = w, u_iT_{ij} = w_j \qquad (2.25)$$

Le produit contracté (appelé plus couramment produit scalaire) de deux vecteurs est un scalaire :

$$s = u.v, \quad s = u_iv_i \qquad (2.26)$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m=1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, . .). Le résultat d'un produi simplement contracté est un tenseur d'ordre $n+m-2$ et le résultat d'un produit doublemen contracté est un tenseur d'ordre $n+m-4$.

Par exemple, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 est ur tenseur d'ordre 2 :

$$L = T : U, \quad L_{ij} = T_{ijkh}U_{kh} \qquad (2.27)$$

Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre deux antisymétrique et un tenseur d'ordre deux symétrique donne toujours le tenseur nul.

Produit tensoriel: Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 :

$$L = u \otimes v, \quad L_{ij} = u_iv_j \qquad (2.28)$$

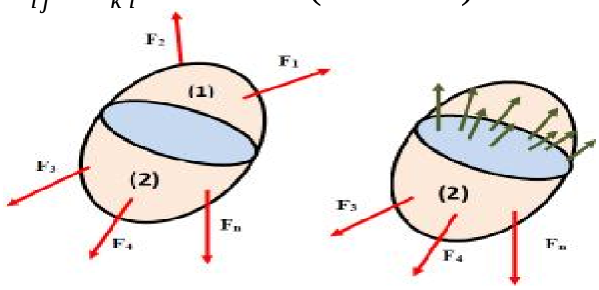
Le résultat d'un produit tensoriel est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m=1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, . . .). Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n+m$.

Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 4 :

$$L = T \otimes U, \quad L_{ijkl} = T_{ij}U_{kl} \qquad (2.29)$$

2. Tenseur des contraintes de Cauchy

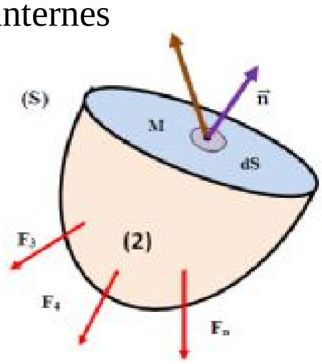
Notion de contrainte:



Un solide est en état de contrainte s'il est soumis à l'action de forces extérieures.

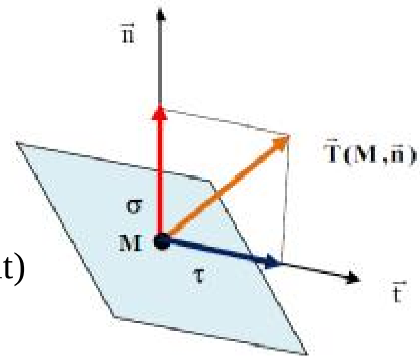
Considérons un domaine (D) délimitant un solide (Ω) qui est en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures . Sous l'action de ses forces, le solide est en équilibre. On voit la naissance de contraintes à l'intérieur de (Ω). Soit (π) un plan virtuel qui partage (Ω) en deux parties (voir la figure).

Isolant virtuellement la partie (2) et faisant apparaitre les contraintes internes



Appelons $\vec{dF}$ la résultante des efforts exercés par la partie (1) sur la partie (2) de (Ω), à travers l'élément de surface (dS), soit le rapport , en passant à la limite quand $dS \to 0$, on obtient la contrainte sur la section au point M : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim\limits_{dS \to 0} \dfrac{\vec{dF}}{ds}$.

Le vecteur de contrainte $\vec{T}$ peut être décomposé en deux composantes selon deux directions.



La première normale à la surface (dS), dont la normale unitaire est $\vec{n}$. La seconde est tangentielle à (dS) est $\vec{t}$

Projetons le vecteur $\vec{T}$ sur la normale $\vec{n}$ et sur le plan perpendiculaire à cette normale $\vec{t}$, soit alors : $\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t$

$\vec{T}_n$: Contrainte normale et $\vec{T}_t$: Contrainte tangentielle (cisaillement)

pour une Notation universelle, on note σ_n :contrainte normale et $\vec{\tau}_t$: contrainte tangentielle (cisaillement) et on écrit: $\vec{T} = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_t$ où $\sigma_n = \vec{T}.\vec{n}$ et $\vec{\tau}_t = \sigma_n \vec{n} - \vec{T}$

2.2. Tenseur des contraintes de Cauchy

Pour connaître l'état de contrainte en un point donné, il faut connaître les vecteurs contraintes associés à toutes les facettes, c'est-à-dire à tout vecteur unitaire $\vec{n}$. Il existe donc une application linéaire, le tenseur des contraintes, faisant passer de $\vec{n}$ à $\vec{T}$

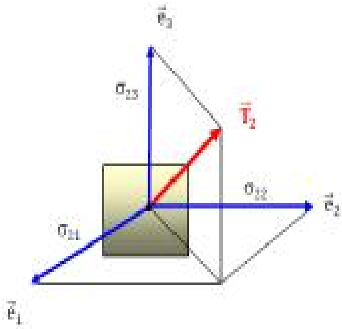
$$\vec{T} = \sigma(\vec{n}) \qquad (2.30)$$

Le tenseur des contraintes est donc une application linéaire de l'espace vectoriel à trois dimensions M_3 dans lui-même. Si l'on choisit une base orthonormée $\vec{e}_i$, cette application linéaire est représentée par une matrice d'éléments σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ et la relation (2.30) donne la relation matricielle $T_i = \sigma_{ij} n_j$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Les neufs composantes des trois vecteurs de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



Effectuons le produit scalaire: $\vec{T}_2 . \vec{e}_1 = |\vec{T}_2| \, |\vec{e}_1| \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1)$

Sachant que: $\cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1) = \dfrac{\sigma_{21}}{T_2}$, $\quad (T_2 = |\vec{T}_2|)$

et comme $|\vec{e}_1| = 1$ donc on a: $\sigma_{21} = |\vec{T}_2| \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_1) = \vec{T}_2 . \vec{e}_1$

De même:

$$\sigma_{22} = |\vec{T}_2| \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_2) = \vec{T}_2 . \vec{e}_2, \qquad \sigma_{23} = |\vec{T}_2| \cos(\vec{T}_2, \vec{e}_3) = \vec{T}_2 . \vec{e}_3$$
$$\sigma_{11} = |\vec{T}_1| \cos(\vec{T}_1, \vec{e}_1) = \vec{T}_1 . \vec{e}_1, \qquad \sigma_{12} = |\vec{T}_1| \cos(\vec{T}_1, \vec{e}_2) = \vec{T}_1 . \vec{e}_2$$
$$\sigma_{13} = |\vec{T}_1| \cos(\vec{T}_1, \vec{e}_3) = \vec{T}_1 . \vec{e}_3, \qquad \sigma_{31} = |\vec{T}_3| \cos(\vec{T}_3, \vec{e}_1) = \vec{T}_3 . \vec{e}_1$$
$$\sigma_{32} = |\vec{T}_3| \cos(\vec{T}_3, \vec{e}_2) = \vec{T}_3 . \vec{e}_2, \qquad \sigma_{33} = |\vec{T}_3| \cos(\vec{T}_3, \vec{e}_3) = \vec{T}_3 . \vec{e}_3$$

On en déduit la relation suivante: $\sigma_{ij} = \vec{T}_i . \vec{e}_j$

i : l'indice de la normale à la facette, et j : l'indice de la projection de la contrainte.

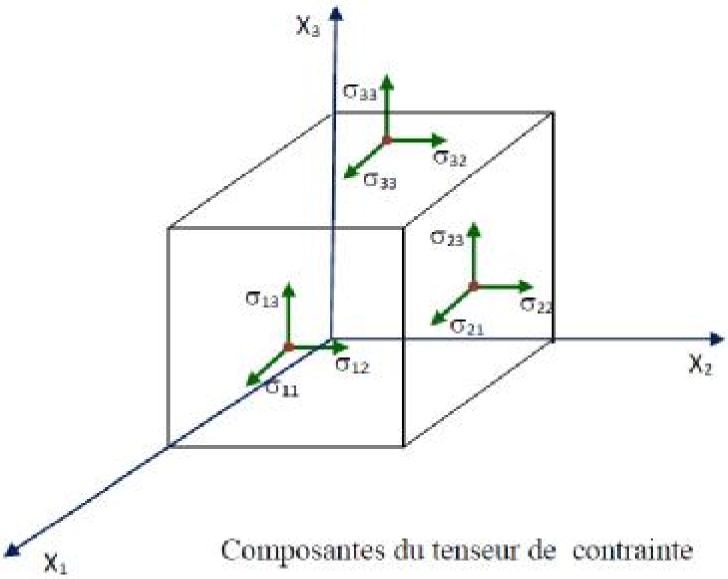
2.2. Propriétés du tenseur des contraintes

- Les composantes σ_{ij} sont des fonctions linéaires et $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ ce qui conduit à que σ un tenseur symétrique

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} = \sigma_{21} & \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

- Les composantes de même indices: σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} sont les contraintes normales σ_{ij} .
- Les composantes des indices différents: σ_{12} , σ_{23} et σ_{13} sont les contraintes normales tandis que les composantes non diagonales σ_{12} , σ_{23} et σ_{13} sont les contraintes tangentielles.

Ces différentes composantes peuvent être représentées de la manière suivante:



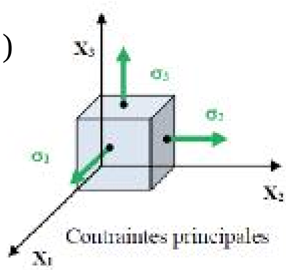
Composantes du tenseur de contrainte

2.3. Contraintes principales et invariants

La symétrie du tenseur de contraintes entraîne qu'il possède trois vecteurs propres σ_1 , σ_2 et σ_3 réels, appelés contraintes principales. En prenant ces trois vecteurs (directions principales) comme repère (repère principal), le tenseur des contraintes devient diagonal.

- **Repère quelconque** $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$
- **Repère principal** $(O, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \qquad \left[\sigma_{ij}\right] = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$



Contraintes principales

Les contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique (2.4) à partir du repère initial quelconque $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

- **Equation caractéristique :** $\det[\sigma_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}] = 0$ (2.31)

Soit $$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

On peut démontrer que: $d_3 - d_2\lambda + d_1\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

où les invariants fondamentaux d_1, d_2, d_3 du tenseur des contraintes σ

$$\begin{cases} d_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det(\sigma_{ij}) \\ d_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = \frac{1}{2}\left((tr(\sigma_{ij}))^2 - tr(\sigma_{ij}^2)\right) \\ d_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = tr(\sigma_{ij}) \end{cases}$$

2.4 Représentation géométrique de contrainte (tricercle de Mohr)

Le tricercle de Mohr est une représentation géométrique de l'état de contrainte dans le plan $(\vec{\tau}, \vec{n})$ Les axes de cordonnées choisis sont les axes principaux dont les contraintes principales sont des valeurs distinctes prises par convention dans l'ordre $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Soit un point M d'un milieu continu en état de contrainte la composante σ_n du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ est donnée par la relation : $\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}).\vec{n}$

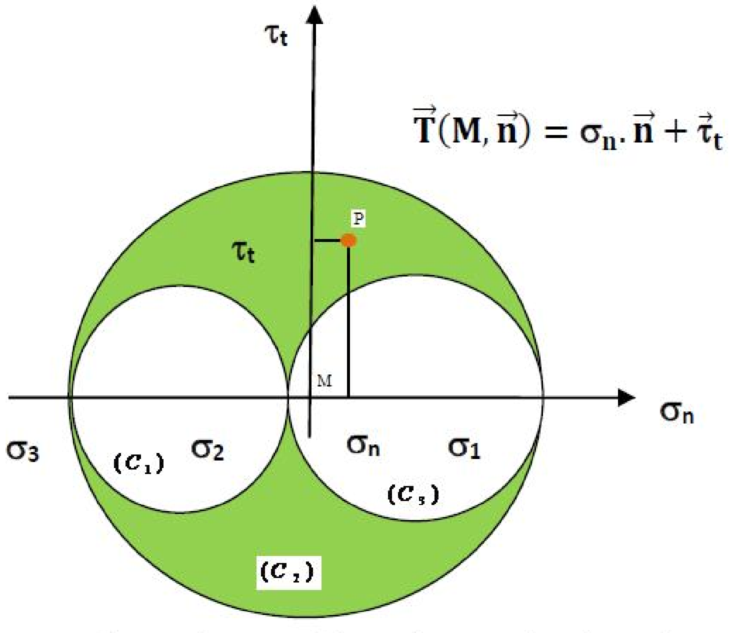
Pour chaque facette de normale unitaire $\vec{n}$ on obtient un point P, extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. On se propose de chercher le lieu géométrique de ce point P. Si on fait varier cette facette dans le plan de Mohr $M(\vec{\tau}, \vec{n})$.

Discussions des cas: Le point P la pointe de vecteur de contraintes $\vec{T}(M, \vec{n})$ vari dans la zone hachurée.

1) Si $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$ cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C_1) de centre: $w_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ et rayon : $R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.

2) Si $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$ cela signifie qu'on est à l'intérieur du cercle (C_2) de centre: $w_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ et rayon : $R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

2) Si $(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$ cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C_3) de centre: $w_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et rayon : $R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.



Représentation graphique des cercles de Mohr

Remarques:

- Si $\sigma_2 = \sigma_3$ le tricercle de Mohr se réduit à un seul cercle, et le lieu géométrique du point P est le périmètre de ce cercle.

- Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ le tricercle de Mohr ainsi que le lieu géométrique du point P se réduit à un point.

La valeur maximale de $\vec{\tau}$ est égale au rayon du grand cercle de Mohr. Cette valeur est appelée contrainte de cisaillement maximale, et vaut : $\tau_{\max}\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Département des mathématiques	Université d'Eloued	Module : Modélisation
1ère Master fondamental	Faculté des sciences exactes	2019/2020

Série des exercices 01

Exercice1:

Évaluez les expressions suivantes

1) δ_{ii} 2) $\delta_{ij}\delta_{ij}$ 3) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$ 4) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ 5) $\delta_{ij}A_{ik}$ 6) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}$ 7) $\varepsilon_{ijk}a_j a_k$

Exercice2:

1. Montrer que: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

2. Si A est un tenseur antisymétrique pour lequel le vecteur axial $b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk}$.

Montrer que: $A_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$

Exercice3:

Soit S un tenseur symétrique et A un tenseur antisymétrique montrer que l'on a toujours $S:A=0$

Exercice 4:

Soit S un tenseur symétrique et T un tenseur quelconque montrer que l'on a toujours $S:T=S:T^S$, T^S où est la partie symétrique de T .

Exercice5:

1. Montrer que si $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ et $W_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ on a alors $W_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}$ et $\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}W_k$

Exercice6:

1. Montrer que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k = a.(b \wedge c)$$

Ceci définit le produit mixte des vecteurs a, b et c.

2. Montrer que: $\det(T_{ij}) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn}$

Exercice7:

Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base d'un espace vectoriel E_2 et soient deux vecteurs de E_2

$$X = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \ ; \ Y = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

1. On note $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2$ les vecteurs de base d'un espace $E_4 = E_2 \otimes E_2$. Déterminer l'expression du produit tensoriel $X \otimes Y$.

2. Le tenseur suivant : $U = 11\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + 8\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + 20\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$ est-il le produit tensoriel de deux vecteurs de E_2 ?.

3. Montrer que le tenseur U est la somme du produit tensoriel $X \otimes Y$ et d'un autre tenseur W que l'on déterminera. Ce dernier est-il un produit tensoriel et lequel.

Exercice8:

Dans un système d'axes $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les trois vecteurs suivants :

$\vec{U}^T = (0,1,1)^T$, $\vec{V}^T = (-1,0,1)^T$, $\vec{W}^T = (0,-1,1)^T$

1. Déterminer un tenseur T de façon que l'on ait : $T.\vec{U} = \vec{A}$, $T.\vec{V} = \vec{B}$ et $T.\vec{W} = \vec{C}$

où $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont les vecteurs de composantes:

$\vec{A}^T = (2b, a+b-c, a+b+c)^T$, $\vec{B}^T = (b+c-a, -2c, c+a-b)^T$, $\vec{C}^T = (2c, b-c-a, a-b-c)^T$

2. Déterminer le tenseur symétrique D et le tenseur antisymétrique G composants du tenseur T obtenu.

3. Comment faut-il choisir les données a, b, c

a) Pour que T soit symétrique.

b) Pour que l'invariant d_1 soit nul. $(d_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33})$

<u>Exercice</u>9:

Déterminer les directions principales et les valeurs principales du tenseur de second ordre T dont la représentation matricielle est

$$[T_{ij}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u>10:

Les valeurs du tenseur des contraintes en un point P sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer le vecteur des contraintes sur le plan à P dont la normale unitaire est $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$

<u>Exercice</u>11:

Soit l'état de σ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} -5a & -4a & 0 \\ -4a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Déterminer analytiquement les contraintes principales et les directions principales de contraintes.

<u>Exercice</u>12:

Soit l'état de σ définit par le tenseur des contraintes suivant:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs principales de tenseur déviateur D pour le tenseur σ .

<u>Exercice</u>13:

Les valeurs du tenseur des contraintes σ sont données par la matrice:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une constante arbitraire,

1. Montrer que l' équation d'équilibre est satisfaite si les forces volumiques sont nulles.
2. Au point $P(4,-4,7)$, calculer le vecteur des contrainte sur le plan: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$, et sur la sphère: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$.
3. Déterminer les contraintes principales, les contraintes de cisaillement maximales et les contraintes principales de déviation en P .
4. Tracer les cercles de Mohr pour l'état de contrainte en P .