الأنظمة الغير مقررة ستاتيكيا
Systèmes hyperstatiques

1 - درجة عدم تقرير الستاتيكي :

1 -1 عدد المجاهيل:

عدد المجاهيل يعطى بالعلاقة التالية: (r+3b)

حيث:

r : يمثل عدد ردود الأفعال (nombre des réactions d'appui)

b : عدد القضبان (nombre des barres)

1 -2 عدد المعادلات:

عدد المعادلات يعطى بالعلاقة التالية: (3n+k)

حيث:

n : عدد العقد (nombre des nœuds)

k : عدد الشروط الاضافية (nombre des conditions supplémentaires)

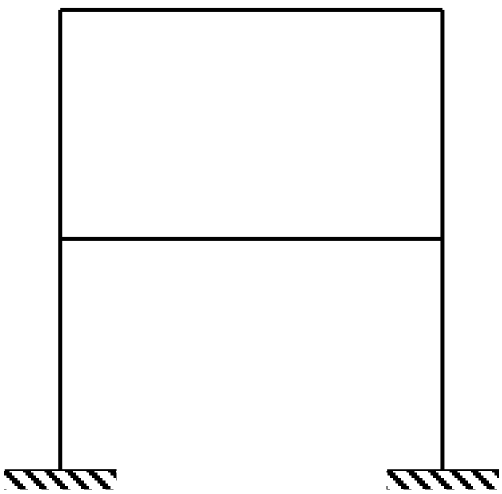
وبالتالي انطلاقا من عدد المجاهيل وعدد المعادلات لدينا ثلاث حالات للنظام

أ- الحالة الاولى : لما عدد المجاهيل يساوي لعدد المعادلات أي $(r+3b) = (3n+k)$
ومنه نقول أن الهيكل مقرر ستاتيكيا (structure isostatique)

ب- الحالة الثانية : لما عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات أي $(r+3b) \prec (3n+k)$
ومنه نقول أن الهيكل غير مستقر (structure instable)

ج- الحالة الثانية : لما عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات أي $(r+3b) \succ (3n+k)$
ومنه نقول أن الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة h حيث : $h = (r+3b)-(3n+k)$
(structure hyperstatique)

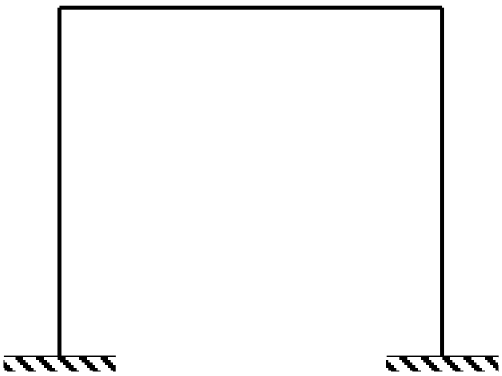
مثال01:



$$r = 6 \ ; \ b = 6 \ ; \ n = 6 \ ; \ k = 0$$
$$h = (r+3b)-(3n+k)$$
$$h = (6+3.6)-(3.6+0)$$
$$h = 6$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة السادسة

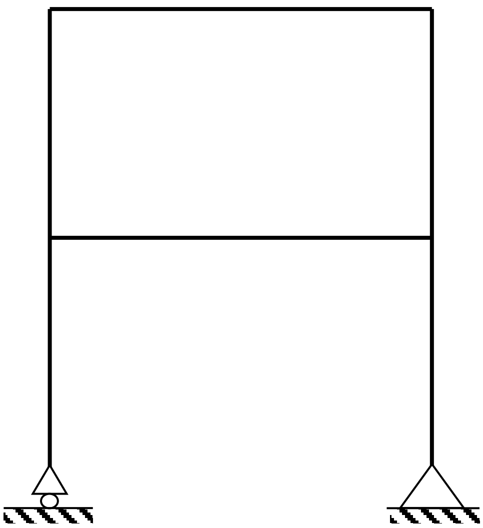
مثال02:



$$r=6\ ;\ b=3\ ;\ n=4\ ;\ k=0$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(6+3.3)-(3.4+0)$$
$$h=3$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الثالثة

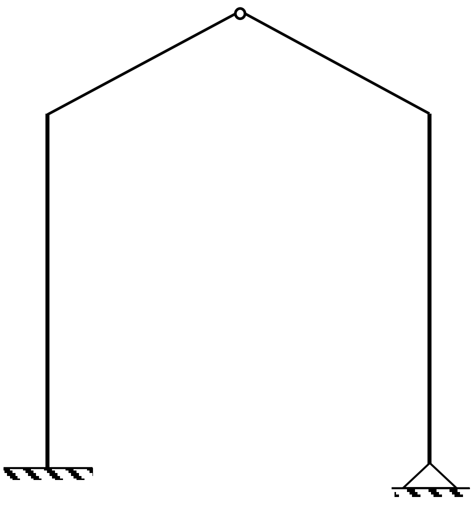
مثال03:



$$r=3\ ;\ b=6\ ;\ n=6\ ;\ k=0$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(3+3.6)-(3.6+0)$$
$$h=3$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الثالثة

مثال04:



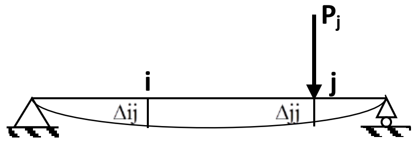
$$r=5\ ;\ b=4\ ;\ n=5\ ;\ k=1$$
$$h=(r+3b)-(3n+k)$$
$$h=(5+3.4)-(3.5+1)$$
$$h=1$$

ومنه الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الأولى

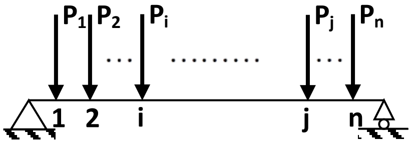
2 - طريقة القوى: (Méthode des forces)

حيث أن هذه الطريقة تعتبر المجاهيل كقوى وهي تعادل في العدد درجة عدم التقرير الستاتيكي حيث يفترض في هذه الطريقة أن التشوهات والإنتقالات صغيرة جدا حتى نتمكن من الإستفادة من مبدأ التراكب وكما نذكر كذلك أن تأثير قوى القص على التشوهات مهمل في هذه الطريقة.

2 -1- مبدأ التراكب: (Principe de superposition)



الشكل -a-



الشكل -b-

في الشكل -a- القوة P_j يترتب عنها إنتقال Δ_{ij} في النقطة i ونظرا للعلاقة الخطية الموجودة بين القوة و الإنتقال نجد :

$$\Delta_{ij} = P_j \delta_{ij}$$

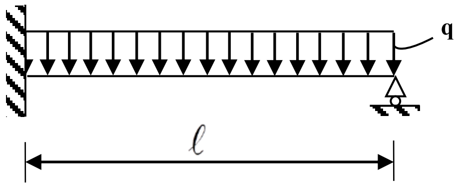
δ_{ij} هي الإنتقال الحاصل عند i تحت تأثير قوة الوحدة مطبقة عند j أي $P_j = 1$

في حاله الشكل -b- نرى مجموعة من القوى تؤثر في الرافدة و الإنتقال المترتب عنها في النقطة i يعادل مجموع الإنتقالات أي يمكن كتابة:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3} + \cdots\cdots + \Delta_{ii} + \cdots\cdots + \Delta_{in}$$
$$\Delta_i = \delta_{i1}P_1 + \delta_{i2}P_2 + \delta_{i3}P_3 + \cdots\cdots + \delta_{ii}P_i + \cdots\cdots + \delta_{in}P_n$$
$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} P_j$$

مثال:

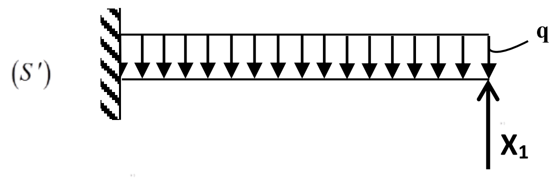
حالة درجة عدم التقرير الستاتيكي من الدرجة الاولى



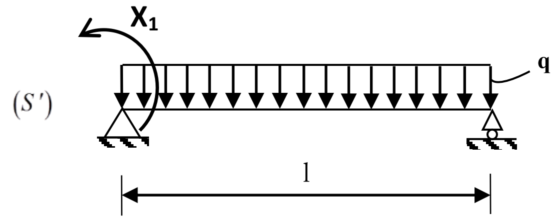
مراحل الحل هي:

1- تعيين درجة عدم التقرير الستاتيكي.
2- التعبير عن الجملة الحقيقية (S) بجملة مرافقة نسميها (S').

حيث :



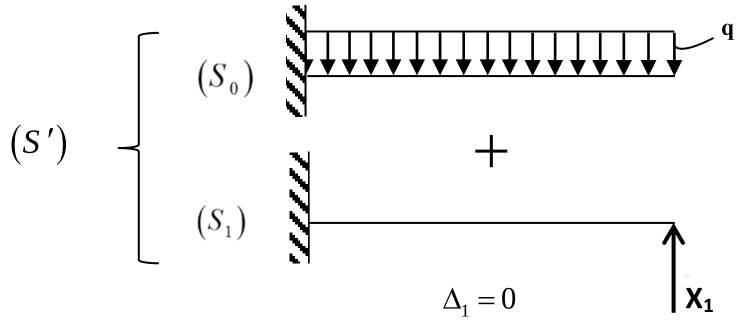
أو



ملاحظة :

حتى تكون الجملة المرافقة معبرة عن الجملة الحقيقية لابد من إضافة شرط الإنسجام (condition de compatibilité)

إنطلاقا من مبدأ التراكب نجد :



ومنه يمكن التعبير عن الجملة الحقيقية (S) بـ (S_1+S_0) مع إضافة شرط الإنسجام $(\Delta_1=0)$:

$$\begin{cases} S = S' = S_0 + S_1 \\ \Delta_1 = 0 \end{cases}$$

و من مبدأ التراكب نجد أن:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$$

أي:

$$\begin{cases} S = S' = S_0 + S_1 \\ \Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{11} = X_1 \delta_{11}$$

$$\Delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

ولدينا:

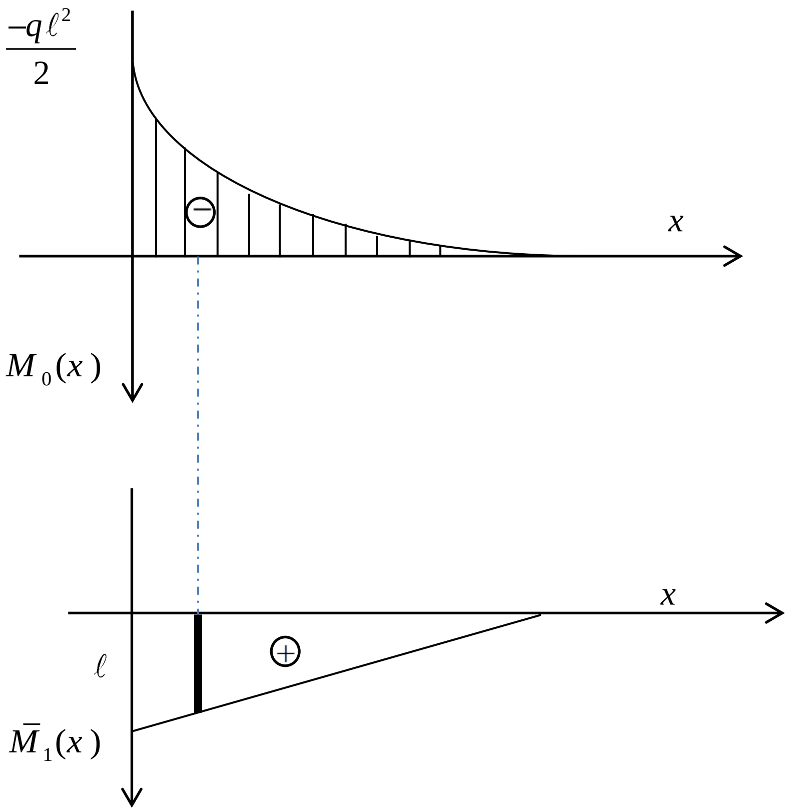
$$\Delta_{10} = \int \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx$$

ونقوم بحساب الانتقالات بواسطة طريقة Verechaguine حيث :

M_0 : عزم الإنحناء الناتج عن حمولة موزعة بانتظام q في حالة (S_0)

$\bar{M}_1$: عزم الانحناء من أجل $X_1 = 1$ في حالة (S_1)



$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{-q\ell^2}{2}\right).\ell.\frac{3}{4}\ell\right] = \frac{-q\ell^4}{8EI}$$

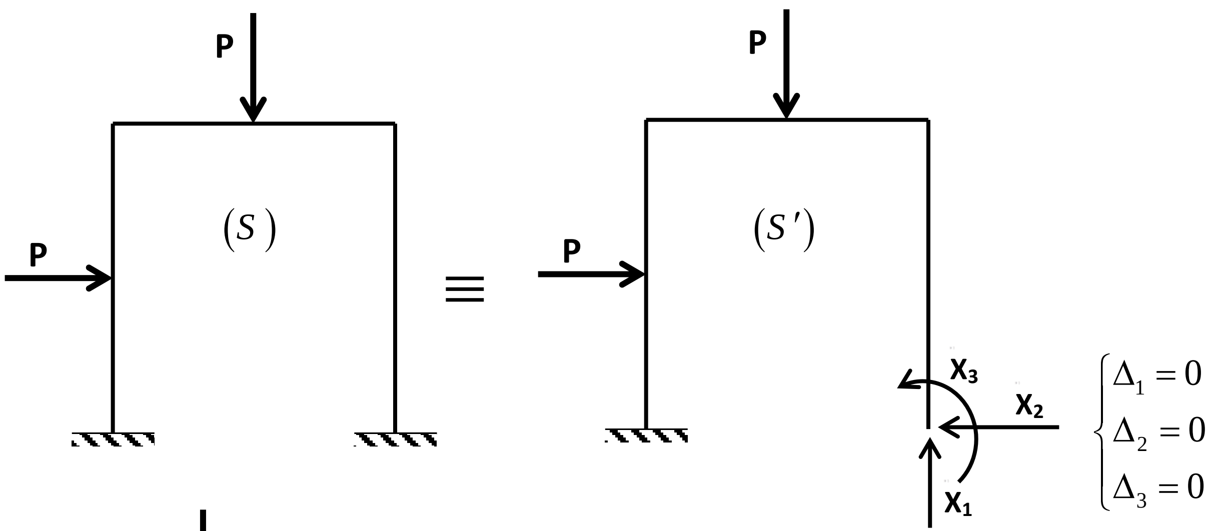
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\ell.\ell.\frac{2}{3}\ell\right] = \frac{\ell^3}{3EI}$$

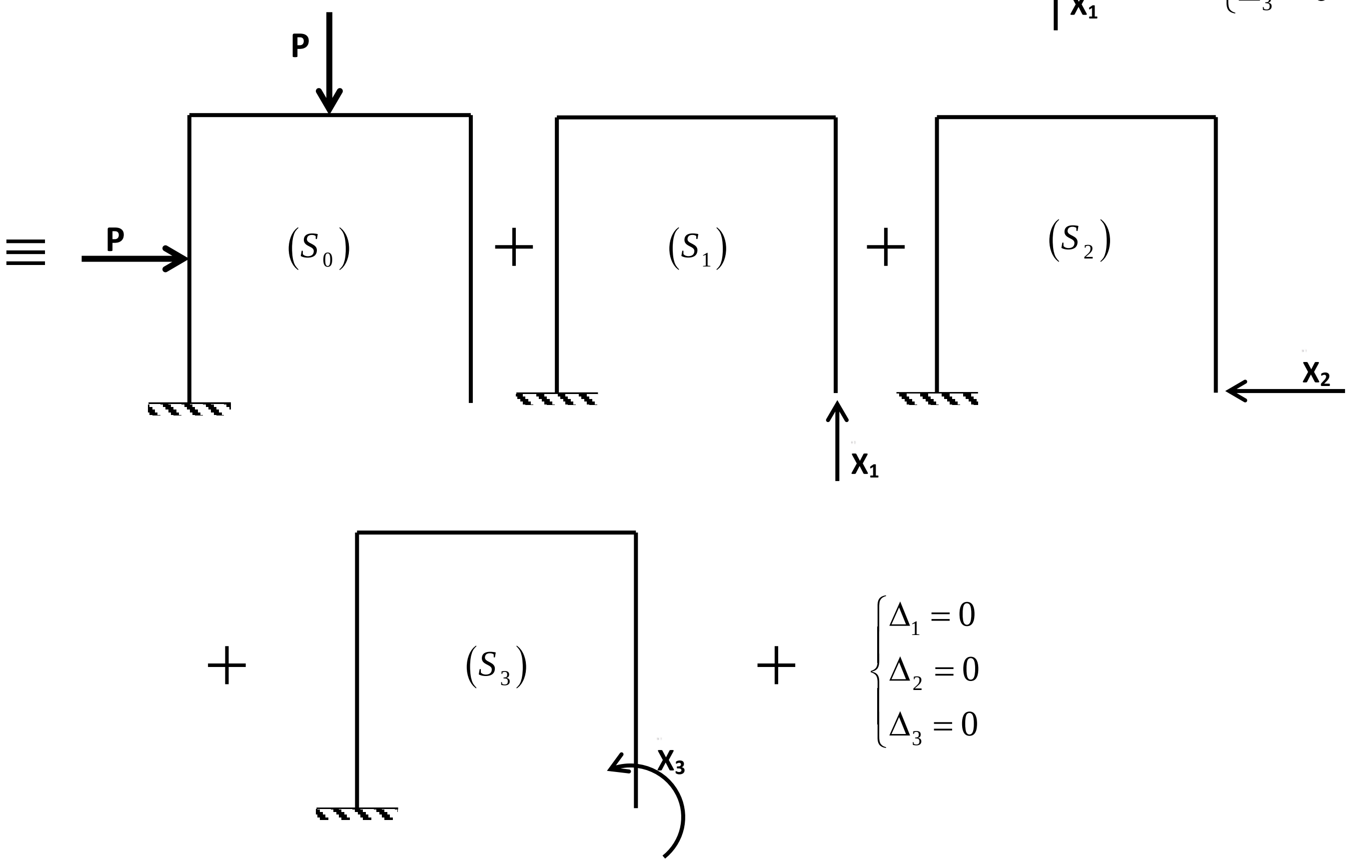
وبالتالي :

$$X_1 = \frac{\dfrac{q\ell^4}{8EI}}{\dfrac{\ell^3}{3EI}} = 3\frac{q\ell}{8}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0(x) + M_1(x) \\ &= M_0(x) + X_1.\overline{M_1}(x) \\ T(x) &= T_0(x) + T_1(x) \\ &= T_0(x) + X_1.\overline{T_1}(x) \end{aligned}$$

تعميم من أجل هيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة أكثر من واحد:





وبالتالي نجد:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} = 0 \\ \Delta_3 = \Delta_{30} + \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{11} = X_1.\delta_{11} \\ \Delta_{12} = X_2.\delta_{12} \\ \Delta_{13} = X_3.\delta_{13} \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = -\Delta_{10} \\ \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = -\Delta_{20} \\ \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = -\Delta_{30} \end{cases}$$

حيث :

$$\Delta_{i0} = \int \frac{M_0.\overline{M_i}}{EI}\, dx$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{\overline{M_i}.\overline{M_j}}{EI}\, dx$$

ملاحظة :

كما نستطيع كذلك الوصول الى هذه الجملة الأخيرة عن طريق آخر والمتمثل في تكامل مور « MOHR»

حيث :

$$\Delta_1 = \int \frac{M.\overline{M_1}}{EI}\, dx \; ; \; \Delta_2 = \int \frac{M.\overline{M_2}}{EI}\, dx \; ; \; \Delta_3 = \int \frac{M.\overline{M_3}}{EI}\, dx$$

وذلك إنطلاقا من شرط التراكب وشرط الإنسجام كما يلي :

1- شرط التراكب :

$$M = M_0 + X_1.\overline{M_1} + X_2.\overline{M_2} + X_3.\overline{M_3}$$

2- شرط الإنسجام :

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي يصبح لدينا :

$$\Delta_1 = \int \frac{(M_0 + X_1.\overline{M_1} + X_2.\overline{M_2} + X_3.\overline{M_3}).\overline{M_1}}{EI}\, dx$$

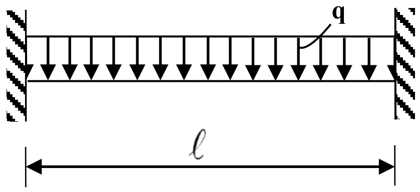
$$= \int \frac{M_0.\overline{M_1}}{EI}\, dx + X_1 \int \frac{\overline{M_1}.\overline{M_1}}{EI}\, dx + X_2 \int \frac{\overline{M_2}.\overline{M_1}}{EI}\, dx + X_3 \int \frac{\overline{M_3}.\overline{M_1}}{EI}\, dx$$

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1.\delta_{11} + X_2.\delta_{12} + X_3.\delta_{13} = 0$$

ومنه :

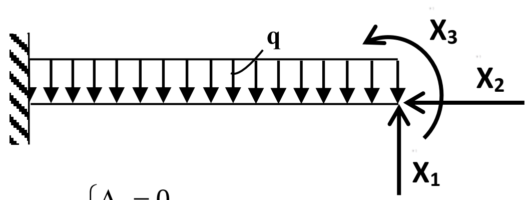
$$\begin{cases} \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = -\Delta_{10} \\ \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = -\Delta_{20} \\ \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = -\Delta_{30} \end{cases}$$

مثال:



الرافدة أو الهيكل غير مقرر ستاتيكيا من الدرجة الثالثة (h=3) وبالتالي نعبر عن الهيكل بالجملة المرافقة (S') بالإضافة الى شرط الإنسجام كما يلي :

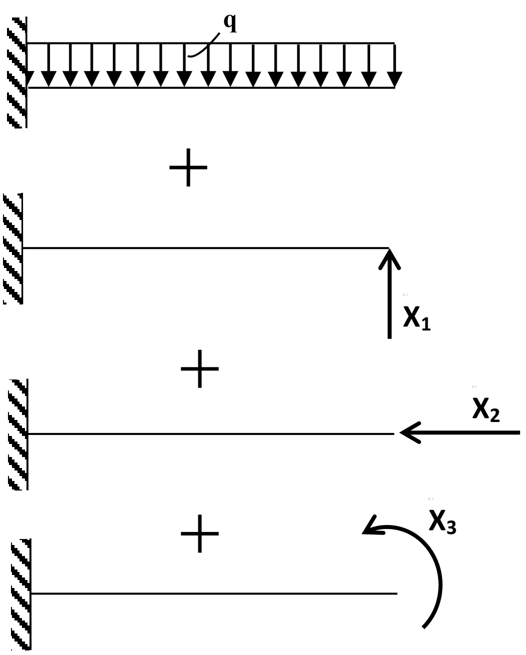
(S')



$$+ \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي :

$(S) \equiv (S') \equiv (S_0)$ + (S_1) + (S_2) + (S_3)



$$+ \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \delta_{11}.X_1 + \delta_{12}.X_2 + \delta_{13}.X_3 = -\Delta_{10} \\ \delta_{21}.X_1 + \delta_{22}.X_2 + \delta_{23}.X_3 = -\Delta_{20} \\ \delta_{31}.X_1 + \delta_{32}.X_2 + \delta_{33}.X_3 = -\Delta_{30} \end{cases}$$

لدينا:

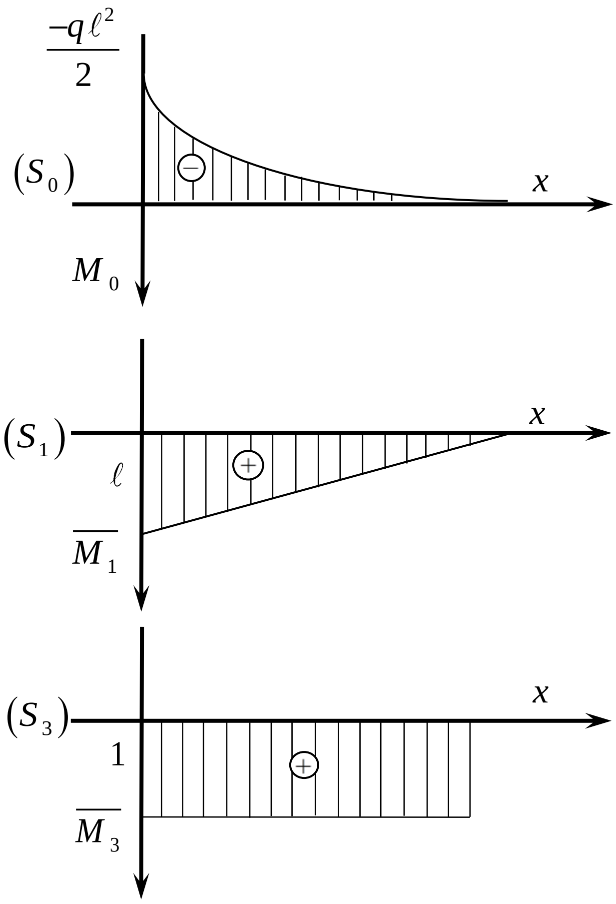
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{22} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$$

وبالتالي تصبح الجملة السابقة كما يلي :

$$\begin{cases} \delta_{11}.X_1 + \delta_{13}.X_3 = -\Delta_{10} \\ \delta_{31}.X_1 + \delta_{33}.X_3 = -\Delta_{30} \end{cases}$$

ولدينا:

$$M = M_0 + X_1\overline{M_1} + X_3\overline{M_3}$$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\ell^2.\frac{2}{3}\ell\right] = \frac{\ell^3}{3EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI}[\ell.1] = \frac{\ell}{EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\ell^2.1\right] = \frac{\ell^2}{2EI}$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(\frac{-q\ell^2}{2}).\ell.\frac{3}{4}\ell\right] = \frac{-q\ell^4}{8EI}$$

$$\Delta_{30} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(\frac{-q\ell^2}{2}).\ell.1\right] = \frac{-q\ell^3}{6EI}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\ell^3}{3EI}\right).X_1+\left(\dfrac{\ell^2}{2EI}\right).X_3=\dfrac{q\ell^4}{8EI}\\ \left(\dfrac{\ell^2}{2EI}\right).X_1+\left(\dfrac{\ell}{EI}\right).X_3=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\ell}{3}\right).X_1+\left(\dfrac{1}{2}\right).X_3=\dfrac{q\ell^2}{8}\\ \left(\dfrac{\ell}{2}\right).X_1+X_3=\dfrac{q\ell^2}{6}\end{cases}$$

$$X_1=\frac{q\ell}{2} \quad ; \quad X_3=\frac{-q\ell^2}{12}$$

$$M_0(x)=\frac{-q(\ell-x)^2}{2} \quad ; \quad \overline{M_1}(x)=(\ell-x) \quad ; \quad \overline{M_3}=1.$$

$$M(x)=M_0(x)+X_1.\overline{M_1}(x)+X_3.\overline{M_3}(x)$$

$$M(x)=-\frac{q(\ell-x)^2}{2}+\left(\frac{q\ell}{2}\right).(\ell-x)-\frac{q\ell^2}{12}$$

$$M(x)=\frac{qx}{2}.(\ell-x)-\frac{q\ell^2}{12}$$

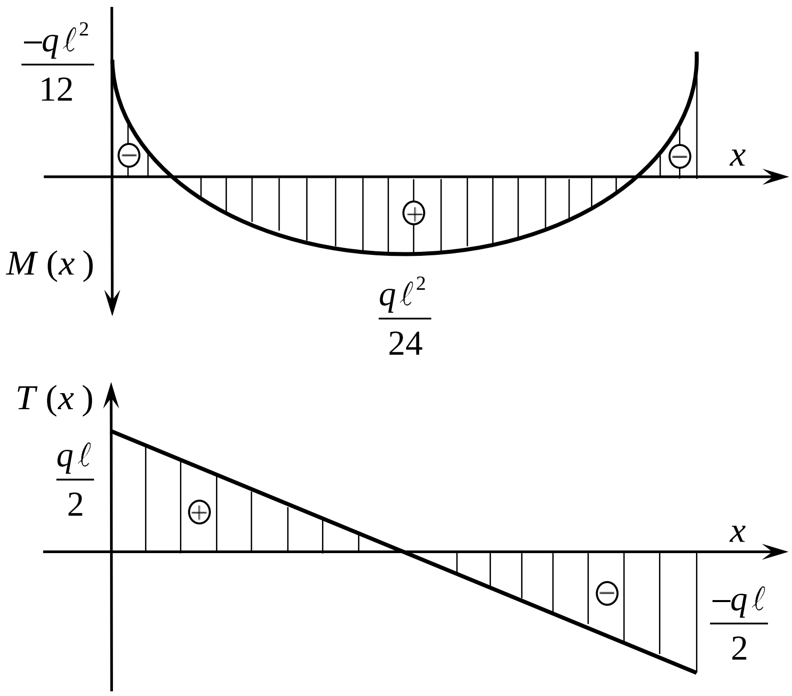
بنفس الطريقة بالنسبة لقوى القص :

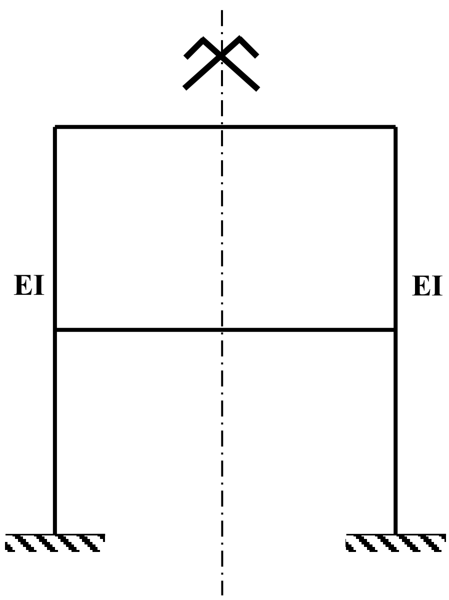
$$T(x)=T_0(x)+X_1\overline{T_1}(x)+X_3\overline{T_3}(x)$$

$$T_0(x)=q(\ell-x) \quad ; \quad \overline{T_1}(x)=-1 \quad ; \quad \overline{T_3}=0.$$

$$T(x)=q(\ell-x)-\left(\frac{q\ell}{2}\right)$$

$$T(x)=\frac{q}{2}.(\ell-2x)\begin{cases}x=0\rightarrow T(0)=\dfrac{q\ell}{2}\\ x=\ell\rightarrow T(\ell)=-\dfrac{q\ell}{2}\end{cases}$$





3 - إستعمال التناظر في حساب الهياكل:

3-1- تعريف التناظر: نقول عن الهيكل أنه متناظر بالنسبة لمحور إذا حقق ثلاثة شروط

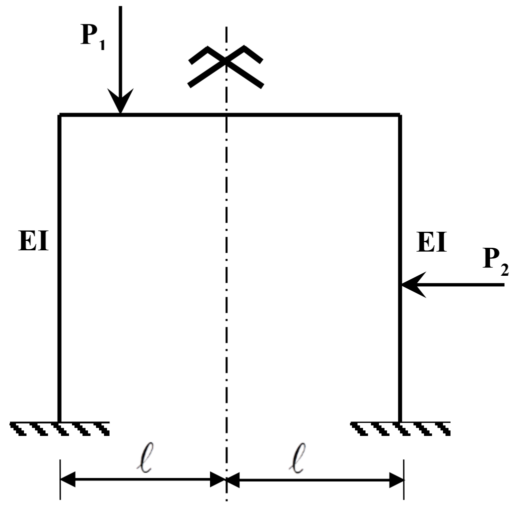
1. متناظر من حيث الشكل الهندسي
2. متناظر من حيث المساند
3. متناظر من حيث المادة المكونة للهيكل

3-2- القوى المؤثرة في الانشاءات:

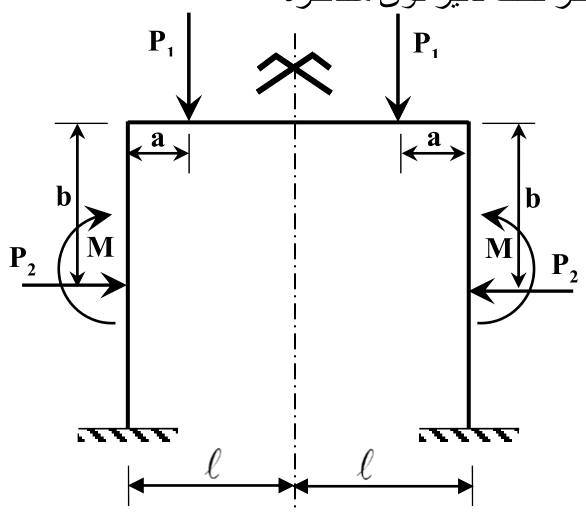
القوى المؤثرة في الهياكل المتناظرة يمكن أن تكون إحدى ثلا ث قوى :

1. قوى عامة (charges générales)
2. قوى متناظرة (charges symétriques)
3. قوى عكس تناظرية (charges antisymétriques)

النوع الاول : هيكل متناظر تحت تأثير قوى عامة

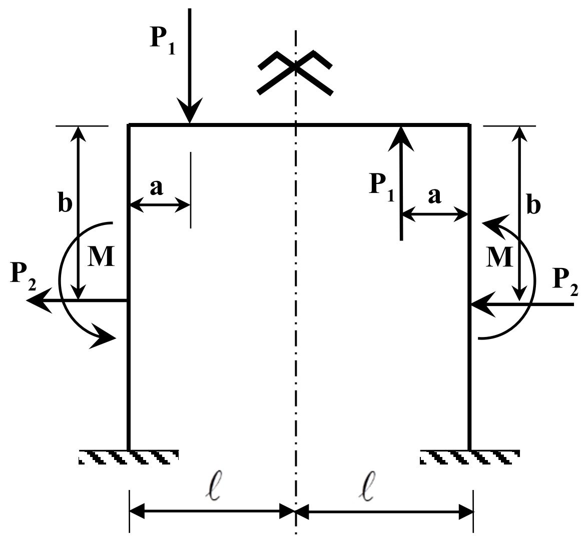


النوع الثاني : هيكل متناظر تحت تأثير قوى متناظرة



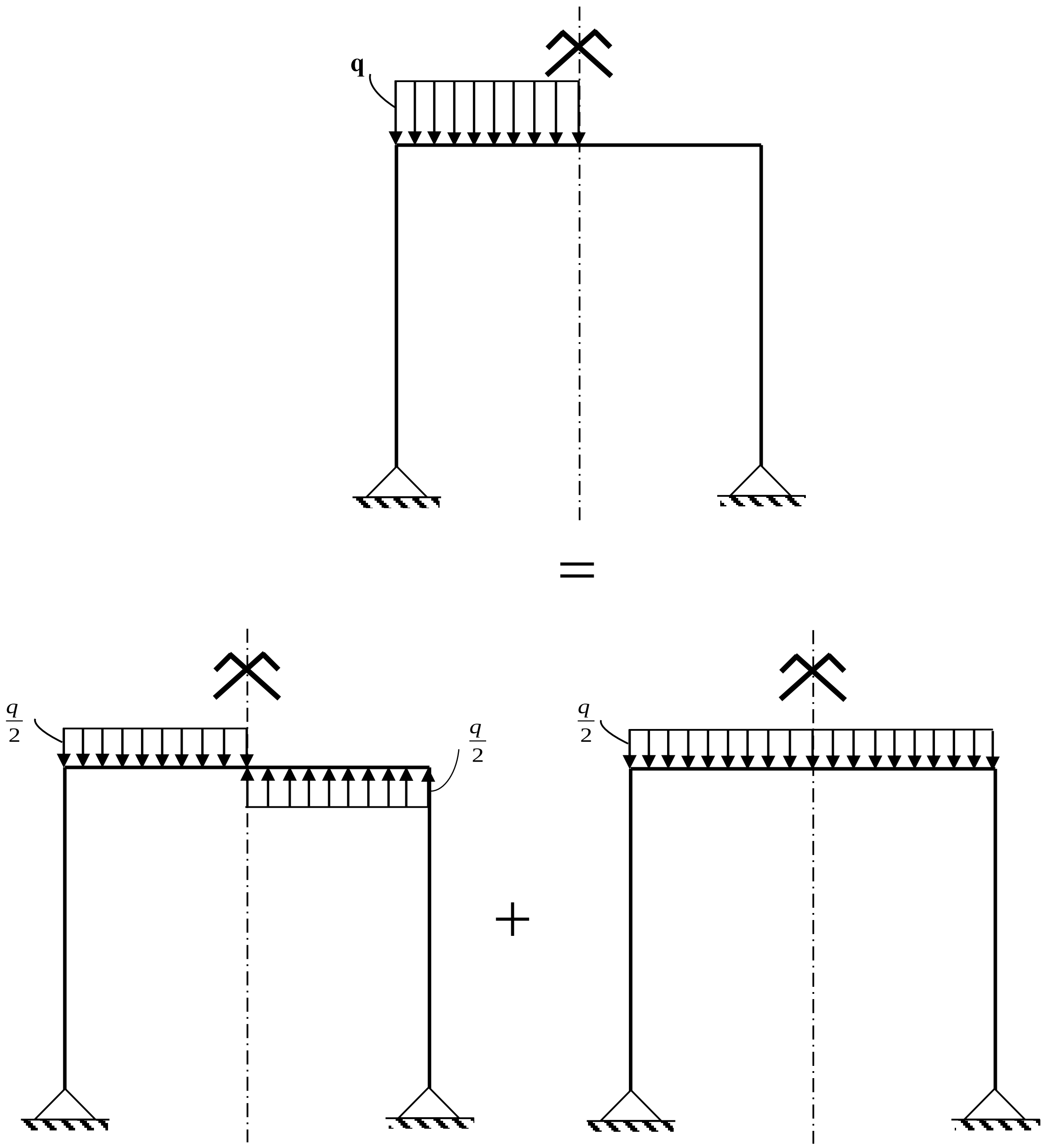
نقول عن قوى أو حمولة متناظرة إذا كانت كل الحمولات الخارجية المطبقة في الجزء الأيمن للهيكل متناظرة مع الجزء الأيسر للهيكل بالنسبة لمحور التناظر.

النوع الثالث : هيكل متناظر تحت تأثير قوى عكس تناظرية



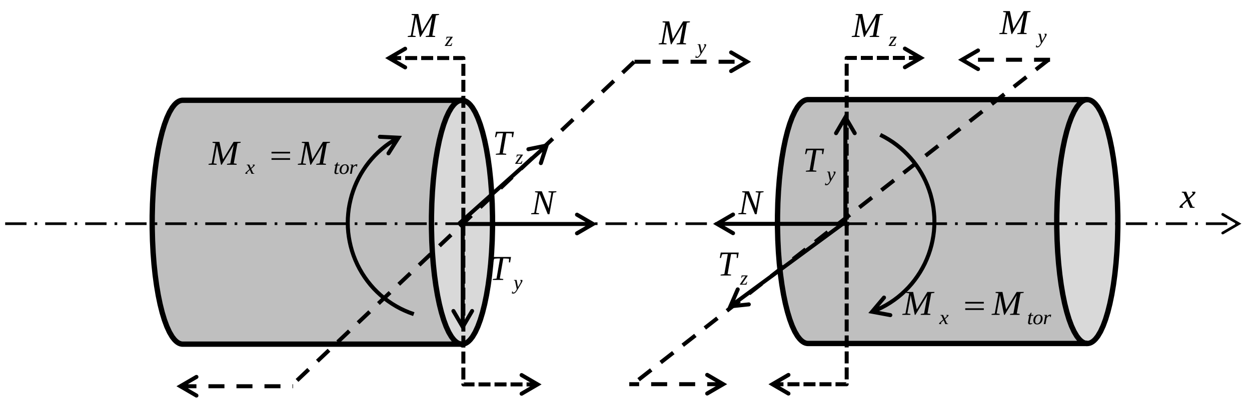
نقول عن حمولة أنها عكس تناظرية إذا كانت كل الحمولات الخارجية المطبقة في الجزء الأيمن للهيكل متناظرة مع الجزء الأيسر للهيكل مع إشارة معكوسة.

مثال : تحليل الحمولة العامة الى حمولتين من النوع الثاني والنوع الثالث.



charge antisymétrique　　　　charge symétrique

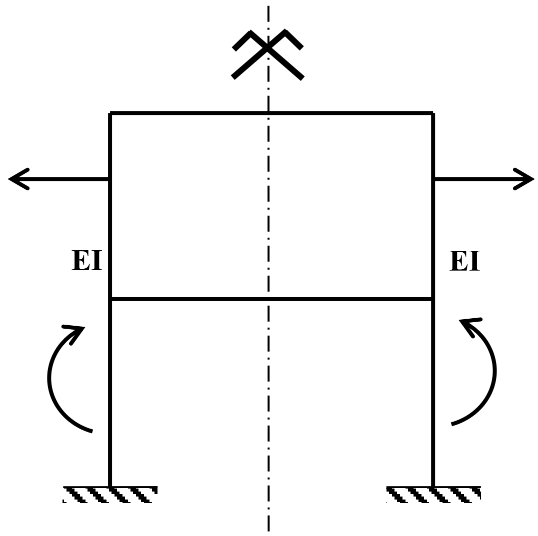
على مستوى مقطع من هيكل نستطيع تمثيل القوى الداخلية كما يلي :



وبالتالي لدينا 6 قوى داخلية :

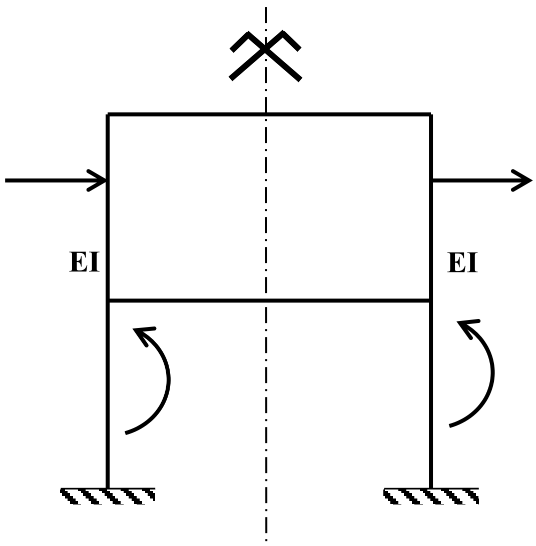
1. ثلاث قوى داخلية متناظرة (N , M_y , M_z)
2. ثلاث قوى داخلية عكس تناظرية (T_y , T_z , M_{tor})

3-3- هيكل متناظر وحمولة متناظرة:



في هيكل متناظر وحمولة متناظرة نجد أن القوى الداخلية العكس التناظرية (T_y , T_z , M_{tor}) تكون معدومة على مستوى التناظر.

4-3- هيكل متناظر وحمولة عكس تناظرية :



في هيكل متناظر و حمولة عكس تناظرية فإن القوى الداخلية التناظرية (N , M_y , M_z) تكون معدومة على مستوى التناظر.