التفاضليات من الرتب العليا

ملاحظة: ليكن E و F فضاءين على $\mathbb{R}$ و U مفتوح غير خالي من E و a عنصر من U.

1. التفاضليات الثانية:

تعريف: ليكن $f: U \to F$ تطبيق قابل للمفاضلة على U.

1. نقول أن f يقبل المفاضلة مرتين عند a اذا كان التطبيق $Df: U \to \mathcal{L}(E,F)$ قابل للمفاضلة عند a

نسمي تفاضلية Df عند a التفاضلية الثانية لـ f عند a ونرمز لها بالرمز $D^2f(a)$

2. نقول أن f قابلة للمفاضلة مرتين على U اذا كانت قابلة للمفاضلة مرتين عند كل عنصر a من U.

3. اذا كان التطبيق $D^2f: U \to \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ مستمر على U

$$x \longmapsto D^2f(x)$$

نقول أن f من الصنف C^2 على U ونكتب $f \in C^2(U)$

ملاحظات:

① بما أن $D^2f(a) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ لدينا

$$\forall h \in E \quad D^2f(a)(h) \in \mathcal{L}(E,F)$$

$$\forall (h,k) \in E^2 \quad D^2f(a)(h)(k) \in F \text{ et } D^2f(a)(k)(h) \in F$$

② الفضاء $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ متشاكل تقابليا مع فضاء $\mathcal{L}_2(E,F)$ والتوابع ثنائية الخطية، مستمرة أي:

$$\varphi: \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \longrightarrow \mathcal{L}_2(E,F)$$

$$u \longmapsto \varphi(u) = v(x,y) = u(x)(y) \in F$$

φ تشاكل ⇐ $\mathcal{L}_2(E,F) \equiv \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ مطابقة بين فضا

اذن نعتبر

$$D^2f(a): E \times E \longrightarrow F$$

$$(h,k) \longmapsto D^2f(a)(h,k)$$

ونكتب $\forall (h,k) \in E \times E$

$$D^2f(a)(h)(k) = D^2f(a)(h,k)$$

$$D^2f(a)(k)(h) = D^2f(a)(k,h)$$

تعميم $\mathcal{L}_n(E,F)$ هو فضاء التوابع n خطية المستمرة من E^n نحو F

تحويل: $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{n-1}(E,F)) \equiv \mathcal{L}_n(E,F)$

التفاضلية الثالثة عند a هي: تفاضلية التفا $D^2f: U \longrightarrow \mathcal{L}_2(E,F)$, $x \longmapsto D^2f(x)$

حسب (1,2) في المبرهنات لدينا $D^3f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_2(E,F))$

$\equiv \mathcal{L}_3(E,F)$

2- التفاضليات المتتابعة

التفاضليات من الرتبة n التفاضلية من الرتبة $n \in \mathbb{N}^*$.

نفرض أن التطبيقة $f: U \longrightarrow F$ قابلة للمفاضلة (n-1) مرة على U

و $D^{n-1}f(x)$. ولدينا: $D^{n-1}f(x) \in \mathcal{L}_{n-1}(E,F)$ $\forall x \in U$

تعاريف:

1- نقول أن f قابل للمفاضلة n مرة عند a من U اذا كان التطبيق $x \longmapsto D^{n-1}f(x)$ قابل للمفاضلة عند a من U، التفاضلية من الرتبة n لـ f عند a من U. تكتب $D^nf(a)$ وعليه

$$D^nf(a) = D(D^{n-1}f)(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{n-1}(E,F)) \equiv \mathcal{L}_n(E,F)$$

2- نقول أن f قابلة للمفاضلة n مرة على U اذا كان قابل للمفاضلة n مرة عند كل نقطة من U.

3- اذا كان التطبيقة $D^nf: U \longrightarrow \mathcal{L}_n(E,F)$, $x \longmapsto D^nf(x)$ مستمر على U

نقول أن f من الصنف C^n على U ونكتب $f \in C^n(U)$

4- اذا كان $f \in C^n(U)$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم، نقول أن f قابل للمفاضلة بدون حد (غير منتهي) على U ونكتب $f \in C^\infty(U)$

اصطلاحا $C(U) = C^0(U)$

مثال: $f: E \longrightarrow F$ خطي ومستمر (1) $Df(x) = f$ $\forall x \in E$

حساب $Df(x)$ $D^2f(x)$ موجودة نضع $Df = g$ (2)

$$g(a+h) - g(a) = Dg(a)(h) + o(h)$$

نعوض $Df(a+h) - Df(a) = D^2f(a)(h) + o(h)$

$$Df(a+h)(k) - Df(a)(k) = D^2f(a)(h)(k) + o(h)(k)$$

من العلاقة (1) نجد التفاضلية السابقة معدومة (2)

$\forall h \in E \quad D^2 f(a)(h) = 0 \qquad \forall a \in E$

$\forall a \in E \quad D^2 f(a) = 0 \Rightarrow D^2 f = 0$

تمرين ٣

f خطي ومستمر من E نحو F $\Leftarrow f \in \mathcal{C}^\infty(E)$ ولدينا

$\forall x \in E \quad Df(x) = f$ و $\forall a \in E \ \forall n \geq 2 \ D^n f(a) = 0$

ملاحظة

كل دالة تآلفية $\forall n \geq 2 \ D^n f = 0$.

مثال: ليكن f تطبيق ثنائي الخطية ومستمر $~~Df(a+h)~~ \ f : E_1 \times E_2 \to F$

$\forall a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2 \quad \forall h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$

$$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$$

$$Df(a+h)(k) - Df(a)(k) = D^2 f(a)(h)(k) + o(h)(k)$$

حساب التفاضل الأول

$$Df(a+h)(k) - Df(a)(k) = Df(a_1+h_1, a_2+h_2)(k_1, k_2) - Df(a_1, a_2)(k_1, k_2)$$

$$= f(a_1+h_1, k_2) + f(k_1, a_2+h_2) - f(a_1, k_2) - f(k_1, a_2)$$

$$= f(a_1, k_2) + f(h_1, k_2) + f(k_1, a_2) + f(k_1, h_2)$$
$$- f(a_1, k_2) - f(k_1, a_2)$$

$$= f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2) = \varphi(h, k)$$

نتأكد من أن φ ثنائي الخطية ومستمر

$$\varphi : (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) \to \mathcal{L}_2(E_1 \times E_2, F)$$

$\forall h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2 \quad \forall k = (k_1, k_2) \in E_1 \times E_2$

φ خطي بالنسبة للمتغير الأول ①

$\forall h, h' \in E_1 \times E_2$

$$\varphi(h+h', k) = f(h_1+h'_1, k_2) + f(k_1, h_2+h'_2)$$
$$= f(h_1, k_2) + f(h'_1, k_2) + f(k_1, h_2) + f(k_1, h'_2)$$
$$= \varphi(h, k) + \varphi(h', k)$$

$\forall \lambda \in K \ \forall h \in E_1 \times E_2 \ \forall k \in E_1 \times E_2$

$$\varphi(\lambda h, k) \stackrel{?}{=} \lambda \varphi(h, k) =$$
$$=$$

③

$$\varphi(\lambda h, k) = f(\lambda h_1, k_2) + f(k_1, \lambda h_2) = \lambda f(h_1, k_2) + \lambda f(k_1, h_2)$$
$$= \lambda\, \varphi(h, k)$$

اذن φ خطي بالنسبة للمركبة الأولى.

وبما أن φ تناظري ومنه φ ثنائية الخطية من $E_1 \times E_2$

<u>φ الاستمرار</u>

$$\|\varphi(h,k)\| \leq \|f(h_1, k_2)\| + \|f(k_1, h_2)\|$$
$$\leq C\,\|h_1\|\,\|k_2\| + C\,\|k_1\|\,\|h_2\|$$
$$\leq 2C\,\|h\|\,\|k\|$$

اذن φ استمرار

<u>الخلاصة</u> ؛ $\forall a = (a_1, a_2),\ h = (h_1, h_2),\ k = (k_1, k_2) \in E_1 \times E_2$

$$Df(a)(h) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$$
$$D^2 f(a)(h,k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2)$$

<u>ملاحظة</u> ، $D^2 f$ لا يتعلق بـ a أي $D^2 f(x) = D^2 f(a)$

اي هو ثابت ومنه $0 = D^3 f(a) = D(D^2 f(a))$

$\forall h \in E \times E \quad \forall x, y \in E \times E$

$$\begin{cases} Df(x+y)(h) = Df(x)(h) + Df(y)(h) \\ Df(x+y) = Df(x) + Df(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Df(\lambda x)(h) = \lambda Df(x)(h) \\ Df(\lambda x) = \lambda Df(x) \end{cases}$$

Df خطي ومستمر $\Leftarrow$

$$D^2 f(a)(h,k) = D(Df)(h,k)$$
$$= Df(h)(k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2)$$

نظرية شوارتز

$f: U \subset E \to F$ فإن $D^2 f$ موجودة عند نقطة $D^2 f(a)$ ثنائي

الخطية ومستمرة ومتناظرة $\forall h \in E\ \forall k \in E$

$$D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h)$$

الخواص:

1- مجموع التطبيقات القابلة للمفاضلة n مرة وهذا اذا كان $f: U \to F$ و $g: U \to F$ تطبيقات قابلات المفاضلة n مرة عند a

فإن: ① $f+g$ قابل للمفاضلة n مرة عند a و $D^n(f+g)(a) = D^n f(a) + D^n g(a)$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ التطبيق λf قابل للمفاضلة n مرة عند a و $D^n(\lambda f)(a) = \lambda D^n f(a)$

ملاحظة: الشيء نفسه بالنسبة لمجموع التطبيقات من الصنف C^n على U

2 التطبيق $f: U \to F$ قابل للمفاضلة n مرة $n \geq 2$ عند a اذا وفقط اذا تحقق ما يلي:

1) f قابل للمفاضلة $(n-1)$ مرة على U.

2) يوجد تطبيق n خطي ومستمر $D^n f(a)$ بحيث

$$D^{n-1} f(a+h) - D^{n-1} f(a) = D^n f(a)(h) + o(h)$$

3) المشتقات الجزئية من رتب عليا

نفرض ان $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ وان التطبيق $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ يقبل عند كل نقطة x من U مشتقات جزئية من الرتبة الأولى بالنسبة لكل مركبة i اي $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ موجودة.

3-1 المشتقات الجزئية الثانية

نقول ان f يقبل مشتقات جزئية ثانية بالنسبة للمركبتين i و j عند a اذا كان التطبيق $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ يقبل مشتق جزئي بالنسبة للمركبة j

نرمز للمشتقات الجزئية الثانية للتابع f بالنسبة للمركبتين i و j بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

وعليه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

لما $i=j$ نكتب

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = x \sin xy$ فإنه من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ لدينا:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$

ملاحظة: من المثال السابق لا يجب استنتاج المساواة $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ محققة دوما.

مثال: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq \\ 0 \end{cases}$

تمارين 1- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$

ملاحظة: اذا كان التابعين $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ مستمرين عند كل نقطة a فإنهما متساويان.

3-2 المشتقات الجزئية من الرتب العليا.

المشتقات الجزئية من رتب أعلى من 2 معرفة بالتراجع بالطريقة نفسها التي عرفت المشتقات الجزئية الثانية

اذا كان $i_1, \dots, i_p$ اعداد محصورة من 1 حتى n فإن العدد الحقيقي

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}\right)(a)$$

أي المشتق الجزئي عند a بالنسبة للمركبة x_{i_1} للتابع $\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}$

3-3 التوابع من الصف C^p

اذا كان $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ من الصف C^p فإن كل المشتقات الجزئية من الرتبة الى p موجودة ومستمرة

دراسة حالات خاصة في الاشتقاق الجزئي

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

• $Df(a)$ موجودة $\Leftarrow$ $Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

• معرفة بالنسبة لعناصر الأساس القانوني $h_i = e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$

اذا $Df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

• $D^2 f(a)$ موجودة $\Leftarrow$ $Df(a+h)(k) - Df(a)(k) = D^2 f(a)(h,k) + o(h)(k)$

• $k = e_2$, $h = te_1$, $t \in \mathbb{R}$

$$Df(a+te_1)(e_2) - Df(a)(e_2) = D^2 f(a)(te_1, e_2) + o(t)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+te_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}{t} = D^2 f(e_1, e_2) + \lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t}$$

تذكير

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a+te_i) - g(a)}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = D^2 f(a)(e_1, e_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = D^2 f(a)(e_1, e_2) = D^2 f(a)(e_2, e_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$$

نعمم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = D^2 f(a)(e_i\, e_j) = D^2 f(a)(e_j, e_i)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

$$D^p f(a)(e_{i_1}, \text{—}\, e_{i_p}) = \frac{\partial^p f(a)}{\partial x_{i_1} \text{—}\, \partial x_{i_p}}$$

مثال: