الأشكال الثنائية الخطية
والأشكال التربيعية

1- تعاريف وخواص أولية:

ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي و E ف.ش على $\mathbb{K}$ ذي بعد كيفي.

تعريف (1): (*) نسمي شكل ثنائي خطية على E كل تطبيق:

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق:

(1) من أجل كل $x \in E$، التطبيق:

$$b_x : E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad y \longmapsto b(x,y)$$

فهو شكل خطي على E

(2) وكذلك: من أجل كل $y \in E$ التطبيق:

$$b_y : E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \longmapsto b(x,y)$$

فهو شكل خطي على E.

(*) وكذلك نقول عن الشكل ثنائي الخطية b بأنه متناظر إذا حقق:

$$\forall x, y \in E : \quad b(x,y) = b(y,x).$$

(**) ونقول بأن الشكل ثنائي الخطية b بأنه ضد متناظر إذا حقق:

$$\forall x, y \in E : \quad b(x,y) = -b(y,x).$$

تعريف (2): ليكن b شكل ثنائي خطية على E.

نعرّف الشكل التربيعي لـ b التطبيق:

$$q : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

بحيث:

$$\forall x \in E : \quad q(x) = b(x,x).$$

ملاحظات: إذا كان ~~q~~ شكل تربيعي لـ b. فإن:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E : \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

2. $\forall x, y \in E : \quad q(x+y) = q(x) + q(y) + b(x,y) + b(y,x).$

3. $\forall x, y \in E : \quad 2b(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$

$$4b(x,y) = q(x+y) - q(x-y)$$ .14

(*) من أجل كل شكل تربيعي q على E يمكن ايجاد شكل ثنائي خطية وحيد b ومتناظر بحيث يكون q شكل تربيعي له. b يسمى الشكل القطبي لـ q.

أمثلة:

.1) $E = \mathbb{K}$: $q: E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^2$ شكل تربيعي

والشكل القطبي له هو: $b: E \times E \to \mathbb{K}$ / $b(x,y) = xy$

.2) $E = C([0,1];\mathbb{R})$ و: $q: E \to \mathbb{K}$: $q(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$

q هو شكل تربيعي على $\mathbb{R}$ و شكله القطبي هو:

$$b: E \times E \to \mathbb{R}: \quad b(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

تعريف (03): ليكن b شكل ثنائي خطية متناظر.
نعرّف نواة الشكل ثنائي الخطية المتناظر b (أو نواة الشكل التربيعي المرفق) هي: $\mathrm{Ker}\, b = \{x \in E / \forall y \in E: b(x,y) = 0\}$.

ملاحظة: نعرّف التطبيق
$$\phi_b: E \to E^*$$
$$x \mapsto (\phi_b(x): y \mapsto b(x,y))$$

فإنّ: (1). نواة b هو نواة ϕ_b بمعنى: $\mathrm{Ker}\, b = \mathrm{Ker}\, \phi_b = \{x \in E / \phi_b(x) = 0\}$

(2). اذا كان E ذي بعد منته فإنّ ϕ_b ايزومورفيزم.

2. مصفوفة شكل تربيعي على فراغ شعاعي ذي بعد منته:

ليكن E ف. شه ذي بعد منته n على $\mathbb{K}$. وليكن q شكل تربيعي وقطبه b.
وليكن $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس لـ E. نرمز بـ: a_{ij} قيمة $b(e_i, e_j)$ من أجل $1 \leq i, j \leq n$. من أجل القيم x و y لـ E، والاحداثيات $(x_1, \dots, x_n)$ و $(y_1, \dots, y_n)$ بالنسبة للاساس $\mathcal{B}$.

فإن :

$$b(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i,\sum_j y_j e_j)=\sum_{1\le i,j\le n} x_i y_j b(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

على التوالي :

$$q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j .$$

ولتكن A المصفوفة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ذي المركبات a_{ij} .

A تسمى مصفوفة b (أو q) بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

ومنه فإن ،

$b(x,y)={}^{t}XAY$
$q(x)={}^{t}XAX$

<u>تمرين</u>: اذا كان $\dim E=n$ ، برهن بأن فراغ الأشكال التربيعية على E فهو فراغ شعاعي على $\mathbb{K}$ ذي البعد $\frac{n(n+1)}{2}$.

(*) <u>تغيير الأساس</u>: ليكن $\mathcal{B}'=(e_1',\dots,e_n')$ أساس آخر لـ E. نرمز بـ X' ، Y' و A' مصفوفات x ، y و b بالنسبة للأساس $\mathcal{B}'$.

ولتكن P مصفوفة الإنتقال من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

علماً أن : $X=PX'$ و $Y=PY'$

اذن ، $\boxed{A'={}^{t}PAP}$

3/ <u>تخفيض غوص</u>:

ليكن E ف . ش ذي بعد منته على $\mathbb{K}$ ، وليكن b شكل ثنائي خطية متناظر.

<u>تعاريف (1)</u>:

- نقول عن الشعاعات x ، y من E انهما b-orthogonaux أي b-متعامدة. اذا كان $b(x,y)=0$.
- الأسرة $\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ من E فهي b-متعامدة اذا تحققت :

$$\forall i,j=\overline{1,m}:\ i\neq j \Rightarrow b(v_i,v_j)=0$$

• الأسرة $\{v_1, \dots, v_m\}$ من E نقول بأنها b-متعامدة ومتجانسة

إذا حققت :

$$\forall i,j = 1..m : \quad b(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & si \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$$

• $A \subset E$: نعرّف b-متعامد لـ A المجموعة :

$$A^{\perp} = \{ y \in E \ / \ b(x,y) = 0 \ ; \ \forall x \in E \}$$

خصائص :

1/ $A^{\perp}$ ف.ش.ج من E ، وكذلك $A^{\perp} = (Vec(A))^{\perp}$.

حيث $Vec(A)$ الفراغ الشعاعي الجزئي المولد بـ A .

2/ $\{0\}^{\perp} = E$; $E^{\perp} = Ker\, b$; $\forall A \subset E : Ker(b) \subset A^{\perp}$

تعريف (2): ليكن b شكل ثنائي خطية متناظر على E.

نعرّف المخروط السيابي لـ b المجموعة

$$I(b) = \{ x \in E \ / \ b(x,x) = 0 \}.$$

نلاحظ : $I(b) \subset Ker\, b$.

مثال: b معرّف :

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

إذن :

$$I(b) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 = \pm x_2 \}.$$

نظرية (التخفيض) : ليكن E ف.ش على $\mathbb{K}$ ذي بعد منته حيث $E \neq \{0\}$.

وليكن b شكل ثنائي خطية متناظر على E. يوجد أساس b-متعامد $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ لـ E بحيث مصفوفة b بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ من الشكل

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & a_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad a_i \neq 0$$

و $r = rg(b)$

والأشعة $e_{r+1}, \dots, e_n$ (إن وجدت) تشكل أساسا لـ $\ker b$.

<u>نتيجة:</u>

إذا كان q شكل تربيعي على E، ذي الرتبة r. فإنه يوجد أساسه q-متعامد $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ لـ E وقيم سلمية $q_1, \dots, q_r$ و $\mathbb{K}$ حيث $q_i \neq 0$ وإذا كان $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ فإن

$$q(x) = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_r x_r^2 .$$

<u>طريقة غوص</u> (تخفيض غوص).

ليكن $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ اساس كيفي لـ E .

وليكن q الشكل التربيعي على E مكتوب بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ بالشكل:

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \quad \dots\dots \quad (*)$$

طريقة غوص فهي خوارزمية لإنشاء أشكال خطية مستقلة خطيا $\ell_1, \dots, \ell_n$ و E^* بحيث:

$$\boxed{q(x) = a_1 (\ell_1(x))^2 + \dots + a_n (\ell_n(x))^2} \quad \dots\dots \quad (**)$$

وهي تعتمد على نمطين من الطرق، وتعتمد على المتطابقات:

$$(\mathrm{I}): \quad a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$$

$$(\mathrm{II}): \quad a \cdot b = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)$$

• نستعمل النمط 1: حالة وجود حد من $q(x)$ يكتب بالشكل αx_i^2 .

ونستعمل النمط 2: حالة جميع الحدود تكتب بالشكل $\alpha x_i x_j$ حيث $i \neq j$.

والأمثلة التالية توضحان الطريقة.

مثال (01): ليكن: $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

نستعمل النمط 1: (x_i^2):

$$q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3)} - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2} - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2\underbrace{(x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2)}_{q_1(x_2,x_3)}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 - 2x_3)}_{\ell_1(x)}^2 - 2\left[\underbrace{(x_2 + x_3)}_{\ell_2}^2 - 2\underbrace{(x_3)}_{\ell_3}^2\right]$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 4x_3^2$$

$$= (\ell_1(x))^2 - 2(\ell_2(x))^2 + 4(\ell_3(x))^2$$

مثال (02): ليكن: $E = \mathbb{R}^3$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

نستعمل طريقة النمط 2 (الحدود x_ix_j: $i \neq j$):

لدينا: الحد $5x_1x_2$ اذن:

نكتب q بالشكل

$$q(x) = (x_1 + \dots x_3)(5x_2 + \dots x_3) + \dots$$

$$= \left(x_1 + \frac{3}{5}x_3\right)(5x_2 + 6x_3) - \frac{18}{5}x_3^2$$

نستعمل (II):

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\left(x_1 + 5x_2 + \frac{33}{5}x_3\right)}_{\ell_1(x)}^2 - \frac{1}{4}\underbrace{\left(x_1 - 5x_2 - \frac{27}{5}x_3\right)}_{\ell_2(x)}^2 - \frac{18}{5}\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)}^2.$$

عموما:

ليكن

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{i,j}\, x_i x_j$$

شكل تربيعي غير خال.

الحالة (1): اذا وجد i حيث $a_{i,i} \neq 0$؛ نضع $i=1$ أي $a_{1,1} \neq 0$.

اذن

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1}x_1^2 + x_1 \times \sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j + \sum_{2 \le i \le j} a_{i,j}x_ix_j$$

أي :

$$q(x_1,\dots,x_n) = a_{1,1}\left[\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2-\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2\right]+\underbrace{\sum_{2\le i\le j\le n}a_{i,j}x_ix_j}$$

$$= a_{1,1}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2 - a_{1,1}\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2+\sum_{2\le i\le j}a_{i,j}x_ix_j$$

$$= a_{1,1}\left(x_1+\sum\frac{a_{1,j}}{2a_{1,1}}x_j\right)^2+q_2(x_2,\dots,x_n)$$

$$= a_{1,1}\left(\ell_1(x_1,\dots,x_n)\right)^2+q_2(x_2,\dots,x_n)$$

ثمّ نستعمل نفس الطريقة (حالة (1) او حالة (2)) للشكل التربيعي ذي $(n-1)$ متغير q_2 .

حالة (2) : $\forall i\ ;\ a_{i,i}=0$: نضع $a_{12}\neq 0$ و $n\geq 3$.

(لما $n=2$ مباشرة نستعمل المطابقة (II)).

$$q(x_1,\dots,x_n)=a_{1,2}x_1x_2+\sum_{j=3}^{n}a_{1,j}x_1x_j+\sum_{j=3}^{n}a_{2,j}x_2x_j+\sum_{3\le i\le j}a_{i,j}x_ix_j$$

$$= a_{1,2}\left(x_1+\sum_{j\ge3}\frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right)\left(x_2+\sum_{j\ge3}\frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right)-\frac{1}{a_{1,2}}\left(\sum_{j\ge3}a_{2,j}x_j\right)\left(\sum_{j\ge3}a_{1,j}x_j\right)$$

$$+\sum_{3\le i\le j}a_{i,j}x_ix_j$$

$$= \underbrace{a_{1,2}\left(x_1+\sum_{j\ge3}\frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right)\left(x_2+\sum_{j\ge3}\frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right)}_{(III)}-q_3(x_3,\dots,x_n)$$

نستعمل المطابقة (II) بالنسبة لـ (III)، و نجد الشكل

$$q_1(x_1,\dots,x_n)=\frac{a_{1,2}}{4}\left(x_1+x_2+\sum_{j\ge3}\frac{a_{1,j}+a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right)^2+\frac{a_{1,2}}{4}\left(x_1-x_2+\sum_{j\ge3}\frac{a_{2,j}-a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right)^2$$

$$+q_3(x_3,\dots,x_n)$$

$$=\frac{a_{1,2}}{4}\left(\ell_1(x_1,\dots,x_n)\right)^2+\frac{a_{1,2}}{4}\left(\ell_2(x_1,\dots,x_n)\right)^2+q_3(x_3,\dots,x_n)$$

نستعمل نفس الطريقة بالنسبة لـ q_3 ذي $n-2$ متغير.

<u>تعريف (3):</u> ليكن q يكتب بشكل غوص:

$$q(x) = a_1(\ell_1(x))^2 + \dots + a_r(\ell_r(x))^2$$

حيث $\ell_1, \dots, \ell_r$ أشكال خطية مستقلة خطيا و $a_1, \dots, a_r$ من $\mathbb{R}^*$.

نسمي اشارة q (signature de q) الثنائية $sig(q) = (p, s)$ حيث:

p: عدد المعاملات a_i الموجبة تماما.

و s: عدد المعاملات a_i السالبة تماما.

ومنه فإن $rang(q) = p + s = r$.

مثال (03): في المثال (01) فإن اشارة q هو: $sig(q) = (2, 1)$

في المثال (02) فإن اشارة q هو: $sig(q) = (1, 2)$

<u>نظرية سولفاستر (sylvester):</u>

ليكن E ف.ش ع $\mathbb{R}$ ذي بعد n، و q شكل تربيعي ذي الرتبة r.

وذي الشكل القطبي b. اذن يوجد اساسا $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

b-متعامد بحيث اذا كان $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ فإن:

$$\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2 .}$$

ومن أجل أية اساس آخر $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ بحيث: $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i$

$$q(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{i=m+1}^{r} y_i^2$$

فإن $m = p$.

<u>ملاحظة:</u> ومنه الإشارة ثابتة من أجل أي أساس.