الدرس الثاني في الجزء الرابع

المحدد من الرتبة 2 1. Déterminants d'ordre

مقدمة يا تي قبل الدرس

تعريف المحدد اعتمد عالى درس المصفوفات تطبيق من $E \times E$ نحو K

يرفق مصفوفة التطبيق قيمة عددية لا اشعة الاعمدة (°او اشعة الصفوف .Soit A ∈ M2(K)( )

On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs lignes (ou colonnes) .de A

Exemple : soit la matrice A suivanteA=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Det (A) = det(f(e_1.) ,f(e_2)) =

Dét A=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$= A محدد المصفوفة

Det (A) = det ($f(e_.)$, $f(e_2)$)) = = $a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$

قيمة المحدد =حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي—– حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي (
بالسبة للمصفوفات من الرتبة 2,)

Exemple :

soit la matrice A suivante Exemple : A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ =$3 \times 5 - 2 \times 4 \times = 7$

Théorème :

Soit B,A ∈ M_2 (K)

det(A×B) = det(A) ×det(B) = det(B) ×det(A) .

المحدد من االرنبة 3 . Déterminant d'ordre

Définitions.2.2

Soit E un K-ev de dimension 3 et f : E → K

trilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur x_i
f est antisymétrique ou alternée si elle est nulle lorsque ،(i∈{ 1;2;3)
.2 vecteurs sont égaux

Det ( )A = det)($f(e_1)$, $f(e_2), f(e_3)$) = 0 dès que xi = xj

$i \in \{1,2,3\}$

هناك خواص اخرى توجد في الدرس .

كيفية حساب قيمة المحدد لمصفوفة من الرتبة 3

1) حساب قيمة المحدد فك المحدد وفق صف (او - عمود)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\,.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2) الطريقة المباشرة نضيف عمودين امام المحدد ثم نتبع طريقة الضرب التالية

$$\searrow \quad \searrow \quad \searrow \qquad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$$

$$|A| = Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{12}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

هناك طرق اخرى لحساب المحددات تابع الد رس الفرنسية.

1. Déterminants d'ordre 2

1.1. Définitions

Soit E un K-ev de dimension 2

- On dit que f est une forme bilinéaire de ExE dans K si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$:

$$\begin{cases} f(\lambda x_1 + \mu x'_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(x'_1, x_2) \\ f(x_1, \lambda x_2 + \mu x'_2) = \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(x_1, x'_2) \end{cases}$$

- On dit que f est antisymétrique si $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_2, x_1) = -f(x_1, x_2)$
- On dit que f est alternée si $\forall x \in E$, $f(x, x) = 0$

Exemple : le produit scalaire x . y

1) le produit scalaire est une forme bilinéaire : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in R^3 \times R^3$, $x . y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

2) il est symétrique : $x . y = y . x$

3) il n'est pas alterné : $\vec{x} . \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \| \vec{x} \|^2$

Théorème :

Toute forme bilinéaire antisymétrique est alternée et, réciproquement, toute forme bilinéaire alternée est antisymétrique.

Démonstration (D_1)

Théorème :

Soit f une forme bilinéaire antisymétrique

Soit $B = \{e_1, e_2\}$ une base de E

$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \exists (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in R^4$ tq $\begin{cases} x_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ x_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{cases}$

Alors $f(x_1, x_2) = \det_B(x_1, x_2) \times f(e_1, e_2)$

Avec $\det_B(x_1, x_2) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$

On note $\det_B(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Démonstration (D_2)

Théorèmes :

- L'espace A_2 des formes bilinéaires alternées sur E est un K-ev de dimension 1
- Soit $B=\{e_1,e_2\}$ et $B'=\{e'_1,e'_2\}$ deux bases de E

  $\det_{B'}(x_1, x_2) = \det_{B'}(e_1,e_2) \times \det_B(x_1, x_2)$
- La famille $\{x_1,x_2\}$ est libre ssi $\det_B(x_1,x_2) \neq 0$

Démonstration du 3ème théorème (D_3)

1.2. Déterminants et matrices

Soit A $\in$ $M_2(K)$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs lignes (ou colonnes) de A.

Exemple : soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$\det(A) = \det_B(f(e_1), f(e_2)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Théorème :

Soit (A, B) $\in$ $(M_2(K))^2$

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = \det(B) \times \det(A)$$

2. **Déterminant d'ordre 3**

2.2.Définitions

Soit E un K-ev de dimension 3 et f : $E^3 \to K$

- f est trilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur x_i ($i\in\{1,2,3\}$)
- f est antisymétrique ou alternée si elle est nulle lorsque 2 vecteurs sont égaux.

  $f(x_1,x_2,x_3)=0$ dès que $x_i = x_j$ pour 1 couple (i,j)

Théorèmes :

- A_3 est l'ensemble des formes trilinéaires alternées et est un K-ev de dimension 1
- Soit f une forme trilinéaire et $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ une base de E :

  $f(x_1, x_2, x_3) = \det_B(x_1, x_2, x_3) \times f(e_1,e_2,e_3)$
- Si B et B' sont deux bases de E :

  $\det_{B'}(x_1, x_2, x_3) = \det_{B'}(e_1,e_2,e_3) \times \det_B(x_1, x_2, x_3)$

- La famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ est libre ssi $\det_B(x_1, x_2, x_3) \neq 0$
- Soit A et B $\in$ $M_3(K)$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- Soit A $\in$ $M_3(K)$, $\det({}^tA) = \det(A)$

2.2. Calcul pratique

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Notations :

- On note A_{ij} la matrice déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j
- On note $\tilde{a}_{ij}$ le cofacteur de l'élément a_{ij} : $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$

  $\det(A_{ij})$ s'appelle déterminant mineur

En pratique, on développe le déterminant de A au moyen des cofacteurs relatifs à la 1ère ligne (ou la 1ère colonne).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \times \tilde{a}_{11} + a_{12} \times \tilde{a}_{12} + a_{13} \times \tilde{a}_{13}$$

$$= a_{11} \times \det(A_{11}) - a_{12} \times \det(A_{12}) + a_{13} \times \det(A_{13})$$

$$= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \times (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \times (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

3. Déterminant d'ordre n

3.1. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

On a les résultats et les règles de calcul suivants :

- detA = 0 si deux colonnes sont égales ou proportionnelles ou si une colonne est nulle
- detA change de signe si on permute deux colonnes
- detA ne change pas de valeur si on substitue à la colonne i la colonne i+kj (j étant une autre colonne)
- detA est multiplié par λ si on remplace la colonne j par λj

Remarque : ces propriétés sont aussi valables pour les lignes

Propriétés :

$\det(AB) = \det A \times \det B$

$\det({}^t A) = \det A$

Exercice 1 :

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det T = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \dots \times a_{nn}$$

Le déterminant d’une <u>matrice triangulaire</u> est égal au produit des coefficients de la diagonale.

<u>3.2.</u> <u>Comatrice</u>

Définition :

Soit $M \in M_n(K)$. On appelle <u>comatrice</u> de M, notée **M***, la matrice des cofacteurs.

Exercice 3 :

Trouver la comatrice de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème :

$\forall M \in M_n(K),\ M\times {}^t M^* = {}^t M^* \times M = \det M \times I_n$

Exercice 4 :

Reprendre l'exemple précédent et montrer que $M\times{}^{t}M^{*} = \det M\times I_3$

3.3. Matrices inversibles

Théorème :

Soit $M \in M_n(K)$, M est <u>inversible</u> ssi $\det M \neq 0$

On a alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\times{}^{t}M^{*}$

Propriétés :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$
- ${}^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1}$

Démonstrations (D_4)

4. Déterminant d'un endomorphisme de E

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle <u>déterminant de f</u> et on note det(f) le déterminant de sa matrice associée dans une base quelconque.

Remarque :

det(f) ne dépend pas de la base considérée

Démonstration (D_5)

5. Applications

5.1. Rang d'une matrice (rectangle ou carrée)

Rappels :

$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}f = \dim(\mathrm{Im}f)$

rgA = rang du système composé par les vecteurs colonnes de la matrice

rgA = rang du système composé par les vecteurs lignes de la matrice

rgA = taille de la plus grande matrice carrée extraite de A et de $\det \neq 0$

<u>5.2. Système linéaire de n équations à n inconnues</u>

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ donc on peut écrire le système AX = B

Si det $\neq 0$, A est inversible et on peut calculer $X = A^{-1}B$

Définition :

(S) est dit <u>système de Cramer</u> si det $\neq 0$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow$ (S) possède une unique solution

$\Leftrightarrow$ f est une bijection sur E

Calcul de la solution unique (x_1, x_2, …, x_n)

Lorsque l'on a une solution unique (x_1, x_2,…, x_n), on utilise les <u>formules de Cramer</u> : $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$

$\Delta = \det(A)$

Δ_j : déterminant déduit de Δ en remplaçant la colonne a_j par la colonne b

Exercice 5 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

Proposition : critères d'existence de solutions

Soit l'application linéaire $f : K^p \to K^n$ dont la matrice dans les bases B_p et B_n est A.

Soit x et b les vecteurs de K^p et de K^n dont les coordonnées dans les bases B_p et B_n sont X et B.

Soit le système linéaire (S) défini par : AX = B

Alors (S) admet au moins une solution ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1) $b \in \mathrm{Im} f$

2) $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) \in K^p$ tq $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i$ avec $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ la i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A

Démonstration (D_6)

btenue