تكملة الفصل (3).

3- تطبيقات نظرية كوشي الثانية:

3-1. تحليل الدالة الأسية:

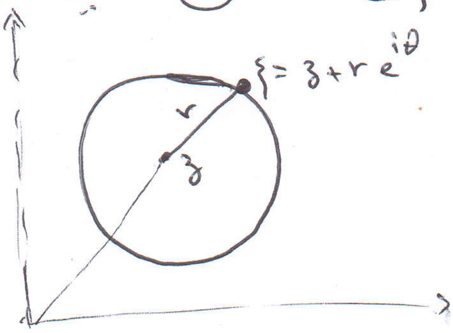
أول تطبيق لنظرية كوشي الثانية يتعلق بدالة تحليلية في كل المستوي المركب.

$$f(z) = \exp(z).$$

$$e^{z} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{e^{\xi}}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

• حيث (C): مسار مغلق كيفي في المستوي المركب يحوي النقطة z.

• إذا اعتبرنا (C) دائرة مركزها z. يمكن كتابة ξ على الشكل التالي:



$$\xi = z + r e^{i\theta}.$$

$$e^{z} = \frac{n!}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{z + r e^{i\theta}}}{r^{n+\cancel{1}} \exp(i(n+\cancel{1})\theta)} \cancel{i r e^{i\theta}} \, d\theta.$$

$$\cancel{e^{z}} = \frac{n!}{2\pi r^n} \cancel{e^{z}} \int_0^{2\pi} \exp\left(r \exp(i\theta) - i n\theta\right) d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r e^{i\theta} - i n\theta} \, d\theta, \qquad \left(e^{i\theta} = (\cos\theta + i \sin\theta) \right)$$

$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r(\cos\theta + i\sin\theta) - i n\theta} \, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta + i(r\sin\theta - n\theta)} \, d\theta.$$

$$\boxed{\frac{2\pi r^n}{n!} = \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cos(r\sin\theta - n\theta) \, d\theta}$$

3-2- الدوال المولدة من الشكل $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

التطبيق الثاني لنظرية كوشي الثانية يتعلق بحساب التكاملات للدوال المولدة من الشكل: $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ، $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ كثيري حدود.
- حيث درجة كثير الحدود $\psi(z)$ أكبر من درجة كثير الحدود $\varphi(z)$.
والذي من خلاله يتحقق الشرط: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \to 0$.

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)(t-z)}\,dt.$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)(t-z)}\,dt.$$

وهنا استعملنا امتداد نظرية كوشي في مجال لانهائي وهو كالتالي:

3-3 * امتداد نظرية كوشي الثانية في مجال لانهائي:

إذا كانت $f(z)$ دالة مولدة تحليلية في مجال B، المكون من المجال الخارجي لمسار مغلق (C)، وفيها $f(z)$ تؤول إلى الصفر عندما z يؤول إلى ما لا نهاية أي: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \to 0$.

في هذه الحالة نظرية كوشي الثانية تكون كالتالي:

$$f(z)=\oint_{(C)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$