Cours 7 $\boxed{\text{Autre classes des opérateurs}}$

Opérateur positif

Déf : Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$, si A auto-adjoint et

$\forall x \in H$, on a $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

proposition : soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est positif. Alors A est un auto-adjoint.

preuve :

En effet, car l'opérateur A est auto-adjoint ssi $\forall x \in H$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

~~Corro~~ Corollaire :

$A \in \mathcal{L}(H)$ est positif ssi $\forall x \in H$; $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

Exemple :

Soit A l'opérateur défini par :

$$A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1], \quad Af(x) = x f(x)$$

On a A positif car, $\forall f \in L^2[0,1]$

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^1 x f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_0^1 x|f(x)|^2 dx \geq 0.$$

Déf : (Comparaison des opérateurs)

Soient A et B deux opérateurs $(A, B \in \mathcal{L}(H))$ on dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est un opérateur positif. Autrement dit, $\forall x \in H$, $\langle (A-B)x, x\rangle \geq 0$.

Racine carrée d'un opérateur positif :

Déf : soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est positif, on dit que l'opérateur S est racine carrée de l'opérateur A si $S^2 = A$ ou encore $S = A^{\frac{1}{2}}$ (ou $S = \sqrt{A}$)

Remarque : La racine carrée est unique.

Exemple : Dans le exemple précedente trouver la racine carrée de l'opérateur A.

solution :

On a A est positif, donc il existe S tel que $S^2 = A$

On remarque que $S : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$

$$Sf(x) = \sqrt{x}\, f(x).$$

Définitions élémentaires et exemples

Déf (opérateur unitaire) :

On dit l'opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est unitaire si

$$UU^* = U^*U = I$$

C'est-à-dire $U^{-1} = U^*$

Exemple :

Soit A l'opérateur défini sur $L^2[0,1]$ par :

$$Af(x) = f(1-x)$$

Montrer que A est unitaire.

solution :

On calcul l'adjoint de A. pour tout $f, g \in L^2[0,1]$. On a,

$$\langle Af(x), g(x) \rangle = \langle f(1-x), g(x) \rangle$$
$$= \int_0^1 f(1-x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

Déf (opérateur projection) :

Soit $P \in \mathcal{L}(H)$, On dit P projection si :

$$P^2 = P.$$

Déf (opérateur projection orthogonale) ;

Un opérateur linéaire P sur un espace de Hilbert H est dit projection orthogonale si

$$P^2 = P = P^*.$$

Exemple :

Soit l'opérateur T défini par :

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x, 0, z)$$

Montrer que T est un projection orthogonale.

Solution : On peut vérifier que

$$T^*(x, y, z) = (x, 0, z)$$

~~Alors~~, et

$$T^2(x,y,z) = T(T(x, y, z))$$
$$= T(x, 0, z) = (x, 0, z) = T(x,y,z)$$

Donc

$T^2 = T = T^*$ c'est-à-dire T est un projection orthogonale.

Déf (opérateur Anti-hermitien)

Un opérateur T sur un espace de Hilbert H est dit anti-hermitien si : $A^* = -A$.

Exemple : Soit $T = iI$, d'où $T^* = -iI$

Donc $T^* = -T$ i.e. T est anti-hermitien

Opérateurs normaux

Déf : on dit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint i.e.,

$$T^*T = TT^*.$$

Remarque :

On remarque que tous les classes des opérateurs que nous étudions précédent sont opérateurs normaux sauf l'opérateur isométrique.

Exemples :

1) Soit $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{K}$, d'où

$T^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$ on a $T^*T = TT^*$.

2) La multiplication T_φ par $\varphi \in C[0,1]$ est un opérateur normal, $T_\varphi : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$

$(T_\varphi f)(t) = \varphi(t) f(t)$

on a $\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle f, T_\varphi^* g \rangle$

$$\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle \varphi(t) f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 \varphi(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

$$= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{\overline{\varphi(t)} g(t)}\, dt$$

$$= \langle f(t), \bar{\varphi}(t) g(t) \rangle$$

Donc $T_\varphi^* g(t) = \bar{\varphi}(t) g(t)$. i.e. $T_\varphi^* f(t) = \bar{\varphi}(t) f(t)$

on a $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$ c'est-à-dire T_φ est normal.

* L'opérateur T_φ est auto-adjoint si la fonction φ est réelle.

proposition :

soit $T \in \mathcal{L}(H)$. les assertions suivantes sont équivalentes

a) T est normal.

b) $\|Tx\| = \|T^* x\|$, pour tout $x \in H$.

c) Dans le cas complexe, les parties réelles et imaginaires de T commutent.

preuve :

* pour tout $x \in H$, On a

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \Leftrightarrow \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \Leftrightarrow \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle$$
$$\Leftrightarrow T^*T = TT^*, \text{ pour tout } x \in H$$

* On pose $T = A + iB$, tel que $\mathrm{Re}\,T = A$ et $\mathrm{Im}\,T = B$.

On a $T^* = A - iB$

$$T^*T = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2 + iBA - iAB$$

et $$TT^* = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + iAB - iBA$$

Alors, $$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB)$$

Donc, $TT^* = T^*T$ ssi $AB = BA$.

Corollaire : si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a $\ker(T) = \ker(T^*)$.

proposition : Soit T est normal, on a

1) L'opérateur aT est aussi normal, pour tout $a \in \mathbb{C}$

2 - L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

preuve : 1) Nous avons $(aT)(aT)^* = a\bar{a}TT^*$

$= a\bar{a}T^*T$

$= (aT)^*(aT)$.

2) T est normal d'où $TT^* = T^*T \Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$

$\Rightarrow T^n(T^*)^n = (T^*)^n T^n \Rightarrow T^n(T^n)^* = (T^n)^* T^n$

C-à-d, T^n est normal.

corollaire : Soit P est polynôme et T est normal, Alors $P(T)$ est aussi normal.

Remarque : T^n normal $\not\Rightarrow$ T normal, $n \geq 2$.

En effet, soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ on a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais T n'est pas normal.

proposition : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a

$$\operatorname{Ker}(T) \oplus \overline{\operatorname{Im} T} = H$$

preuve : On sait que $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ d'où

$$(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = ((\operatorname{Im} T)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$$

Donc $H = \operatorname{Ker} T^* \oplus (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$

$= \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$.

proposition : (Inverse d'un opérateur normal)

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal et inversible d'inverse T^{-1}.

Alors T^{-1} est normal.

preuve : on a $(T^{-1})^* T^{-1} = (T^*)^{-1} T^{-1}$

$$= (T T^*)^{-1} = (T^* T)^{-1} \text{ (car } T \text{ normal)}$$

$$= T^{-1} (T^*)^{-1} = T^{-1} (T^{-1})^*$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal.

proposition : pour tout U est unitaire.

L'opérateur $U^* T U$ est normal ssi T est normal

pr : On a $(U^* T U)^* (U^* T U) = U^* T^* T U$

et $(U^* T U)(U^* T U)^* = U^* T T^* U$.

On remarque que $T^* T = T T^*$ ssi $U^* T U$ est normal.

proposition ; Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, les assertions suivantes sont équivalentes.

1) T est normal.

2) $T^{-1} T^*$ (ou $T^* T^{-1}$) est unitaire.

3) Il existe un opérateur unitaire U tel que : $T^* = UT$.

preuve : Montrons que

* 1) $\Rightarrow$ 2)

On $(T^{-1} T^*)^* (T^{-1} T^*) = T \underline{(T^{-1})^* T^{-1}} T^*$

$$= T T^{-1} (T^*)^{-1} T^* = I \cdot I = I.$$

2) $\Rightarrow$ 3) on pose $U = T^{-1}T^*$, d'où $UT = T^*$.

3) $\Rightarrow$ 1), pour tout $x \in H$, on a

$$\|T^*x\|^2 = \|UTx\|^2$$
$$= \langle UTx, UTx\rangle$$
$$= \langle Tx, U^*UTx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Donc, T est normal.

Théorie spectrale des opérateurs normaux

proposition; soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal. Alors

1) Si $Tx = \lambda x$ tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors, $T^*x = \bar{\lambda} x$

2) Deux espaces propres de T associés à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

preuve;

1) on a $Tx = \lambda x$, $(T - \lambda I)x = 0$ i.e $x \in \ker(T - \lambda I)$ donc $x \in \ker(T^* - \bar{\lambda} I)$ d'où $T^*x = \bar{\lambda} x$.

2) soit λ' autre valeur propre de T et y vecteur propre associé on a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda}' y\rangle$

$$\Rightarrow \lambda\langle x, y\rangle = \lambda'\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0, \ x \perp y$$

proposition; Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie, $r(T) = \|T\|$.

preuve; On suppose d'abord que T est auto-adjoint. On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n, l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, il vient $r(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|$.

On revient au cas normal, l'opérateur TT^* est auto-adjoint et s'ensuit que l'on a,

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \sqrt{r(TT^*)}$$

$$= \sqrt{\|TT^*\|} = \|T\|$$

Exercice :

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on pose $T = A + iB$. Montrer que T est inversible si et seulement si $A^2 + B^2$ est inversible. On justifiera l'égalité :

$$T^{-1} = T^*(A^2 + B^2)^{-1}$$

Solution : On a $TT^* = T^*T = A^2 + B^2$.

Si T est inversible d'où T^* est aussi inversible donc TT^* est inversible c-à-d $A^2 + B^2$ inversible.

* $A^2 + B^2$ est inversible donc

$$\{(A^2+B^2)^{-1}T^*\}T = I \quad \text{et}$$

$$T\{T^*(A^2+B^2)^{-1}\} = I$$

D'où $T^{-1} = T^*(A^2+B^2)^{-1}$

<u>propn</u> : si $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, il possède les deux propriétés suivantes :
1) $\exists\, c > 0$, $\|Tx\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in H$.
2) $\overline{T(H)} = H$.

proposition : Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Théorème : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes,

i) $\lambda \in \sigma_c(T)$

ii) $\lambda \in \sigma(T) / \sigma_p(T)$

iii) $T - \lambda I$ est injectif et l'image de $(T-\lambda I)(H)$ n'a pas fermée.

preuve :

<u>ii) $\Rightarrow$ i)</u> on a $\lambda \in \sigma(T) / \sigma_p(T)$, d'où $T - \lambda I$ est injectif mais ne pas surjectif.

Supposons que l'image $(T-\lambda I)(H)$ n'est pas dense dans H, alors il existe $z \in (T-\lambda I)(H)^{\perp}$, par conséquent nous avons, $z \in (T-\lambda I)(H)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I) = \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ d'où contradiction, donc nous conclurons que $\lambda \in \sigma_c(T)$.

<u>i) $\Rightarrow$ iii)</u> est évidente à partir de la définition du spectre continu.

<u>iii) $\Rightarrow$ ii)</u> On a $(T-\lambda I)$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$, supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$ alors il existe un opérateur (inversible) $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S(T-\lambda I)x = x$, $\forall x \in H$.
En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|}\|x\| \leq \|(T-\lambda I)x\|, \quad \forall x \in H.$$

d'où $(T-\lambda I)(H)$ est complet et fermée dans H, qui est une contradiction. Nous conclurons que $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$

Cours

Les opérateurs compacts

E, F deux espaces normés.

Déf (compacité) :

Soit U un ensemble d'un espace normé E, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,

$\forall V_j$, $j \in J$ (ouverts), $U \subset \bigcup_{j\in J} V_j$, $\exists V_{j(k)}$, $j(k) = 1, 2, \dots n$ tel que $U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$.

Déf :

un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Déf (opérateur compact)

soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.

Déf : On dit T est un opérateur compact s'il transforme la boule unité B_E de E en une partie relativement compacte de F.

On en déduit le résultat suivant :

Déf (critère de compacité)

L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet une sous suite convergente dans F.

Exemple :

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E ou F est dimension finie. Alors, T est un opérateur compact. car,

- si $\dim E = n$, alors $\dim T(E) \leq n$. Soit B_E la boule unité de E, alors $T(B_E)$ est borné de $T(E)$ donc relativement compact dans $T(E)$.

- si $\dim F = n$, alors $T(B_E)$ est borné de F, il s'en suit que $T(B_E)$ est compact dans F.

Théorème : Un opérateur compact est un opérateur borné, et la réciproque est fausse.

preuve : En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in E, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Alors, $T(B(0,1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\| \leq C, \ \forall x \in B(0,1).$$ Alors T est borné.

- Réciproquement, l'opérateur identique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car,

$$I(B(0,1)) = B(0,1)$$ n'est pas relativement compact sauf si $\dim E < \infty$.

* Dans le cas particulier où $F = C([a,b])$ le théorème suit d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T.

Théorème d'Arzela-Ascoli : G ensemble, $G \subset C(I)$ est relativement compact ssi

1) Uniformément bornée i.e. s'il existe une constante $M > 0$, telle que

$$|\varphi(x)| \leq M, \ \forall x \in I, \ \forall \varphi \in G.$$

2) équicontinu i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, telle que, $\forall \varphi \in G$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in I$ et $|x-y| < \delta$.

Exemple : Considérons l'opérateur de Volterra,

$$V : L^2([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$

$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ $\quad \cancel{f(t)} \longmapsto \int_0^x \cancel{f(t)}dt$.

Montrer que V est un opérateur compact.

Solution :

Soit $\bar{B}(0,1) = \{ f \in L^2([0,1]), \|f\| \leq 1 \}$.

on va montrer que $V\bar{B}(0,1)$ est relativement compact dans $C([0,1])$.

on utilise le thé d'Azela - Ascoli.

i) $V\bar{B}(0,1)$ est uniforment boné car,

$$\|Vf\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x f(t)dt \right|,$$

puisque $\left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \int_0^1 f(t)dt = \|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$

D'où $\|Vf\|_\infty \leq 1$.

ii) $V\bar{B}(0,1)$ est équicontinu, car $\forall x, y \in [0,1]$ on a

$$Vf(y) - Vf(x) = \int_0^y f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt$$

$$|Vf(y) - Vf(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt$$

$$\leq \left(\int_x^y |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_x^y dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |y-x|^{\frac{1}{2}}$$

Donc, l'ensemble $V\bar{B}(0,1)$ est relativement compact, d'où V est compact.

propriétés des opérateurs compacts

proposition 1 :

Soient $A, B \in \mathcal{L}(E,F)$ deux opérateurs compacts, et $\lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Alors $A+B$, λA sont des opérateurs compacts.

preuve : Soit B_E la boule unité de E et soit $(A+B)(B_E)$ l'image de B_E par $A+B$.

soit $(x_n)_n$ une suite de B_E alors $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = a \in F$ (puisque A est compact),

et comme B est un opérateur compact on peut extraire de la suite $(x_{n_k})_k$ une suite $(y_{n_{k'}})_{k'}$ telle que $\lim_{k'\to\infty} y_{n_{k'}} = b$, alors $\lim_{k'\to\infty} (A+B)\, y_{n_{k'}} = a+b$

ce qui implique que $A+B$ est compact.

D'autre part A compact $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \subset (x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (\lambda A) x_{n_k} = \lambda a$

$\Rightarrow \lambda A$ est compact.

proposition 2 :

Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

A borné, B compact $\Rightarrow$ AB et BA opérateurs compacts.

preuve :

soit B_E la boule unité de E, alors $B(B_E)$ est relativement compact dans E, et comme A est borné ce implique $A(B(B_E))$ est relativement compact

$\Rightarrow$ AB est compact.

$A(B_E)$ est une partie bornée de E car A est borné et $B(A(B_E))$ est relativement compact car B est compact ce qui implique BA est compact.

proposition 3 : Le ensemble des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème : Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F.

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Thè : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, alors l'image par T de toute suite de E faiblement convergente est une suite fortement convergente.

Corollaire : Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact, alors
$$\lim_{k\to\infty} \|Te_k\| = 0 .$$

preuve : $\forall x \in E$ la série $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente et son terme général $\langle x, e_k\rangle \longrightarrow 0$ $(k \to \infty)$ cela traduit le fait que $e_k \xrightarrow{W} 0$, le thé précédent permet de conclure.

proposition : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact ssi T^* est compact.

Thé : L'opérateur identique $I \in \mathcal{L}(E)$ est compact ssi $\dim E < \infty$.

Thé : L'inverse A^{-1} d'~~un~~ opérateur compact n'est pas borné si l'espace E est de dimension infinie.

pre : si A^{-1} est borné alors AA^{-1} est compact (le produit d'un opérateur compact et un borné), et puisque $AA^{-1} = I$ cela veut dire que I est compact dans un espace de dimension infinie, d'où contradiction.