المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية و بمعاملات ثابتة

ولتكن معادلة من الشكل $y'' + ay' + by = h(x) \quad \ldots (E)$

معادلتها المتجانسة المرفقة $y'' + ay' + by = 0 \quad \ldots (EH)$

ومعادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0 \quad \ldots (EC)$

- الحل العام للمعادلة (E) يكتب على الشكل:

$$y = y_H + y_p$$

y_H: هو حل المعادلة المتجانسة (EH)، ولإيجاده نحل المعادلة المميزة (EC) جبريا. نميز ثلاث حالات:

أ- إذا كان مميز (EC) هو Δ حيث $\Delta > 0$ فإن (EC) تقبل الحلين المختلفين r_1، r_2 و حل (EH) كمايلي:

$$y_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ب- إذا كان $\Delta = 0$ فالمعادلة (EC) تقبل الحل المضاعف r_0 وحل (EH) كمايلي:

$$y_H = (c_1 + c_2 x) e^{r_0 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ج- إذا كان $\Delta < 0$ فالمعادلة (EC) تقبل حلين مركبين مترافقين من الشكل $r_1 = \alpha + i\beta$ ؛ $r_2 = \alpha - i\beta$ وحل (EH) كمايلي:

$$y_H = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

أمثلة: 1) حل المعادلة المتجانسة $y''-y'-2y=0$:

المميز: لها $r^2-r-2=0$ تقبل حلين مختلفين $r_1=-1$ ، $r_2=2$

فحل المتجانسة $y_H=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ ، $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

2) حل المعادلة المتجانسة $y''-2y'+y=0$:

المميز: لها $r^2-2r+1=0$ تقبل حلا مضاعفا $r_0=1$

فحل المتجانسة $y_H=(c_1+c_2x)e^{x}$ ، $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

3) حل المعادلة المتجانسة $y''+y'+y=0$:

المميز: لها $r^2+r+1=0$ تقبل الحلين $r_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $r_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

فحل المتجانسة $y_H=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ ، $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

حل المعادلة غير المتجانسة (E) :

حلها العام يكتب في الشكل $y=y_H+y_p$

حيث y_H هو حل المعادلة المتجانسة (EH) المرافقة للمعادلة (E) .

و y_p هو حلها الخاص ، ولايجاده هناك طريقتين :

- الأولى ، شكل y_p يشبه شكل $h(x)$ ومعاملات مجهولة وفي الصفحة الموالية حصرنا أربع أشكال لـ $h(x)$ وفي كل مرة نعين y_p (أنظر الصفحة الموالية).

- الثانية ، وهي طريقة تعيين y_p بتغيير الثوابت للحل y_H (وهي مفصلة لاحقا).

الحل الخاص y_p للمعادلة (E) (بالاعتماد على شكل $h(x)$)

شكله يشبه $h(x)$ وبمعاملات مجهولة يتم تعيينها بالمطابقة إذا لم يكن $h(x)$ حلا للمعادلة المتجانسة.
أما إذا كان $h(x)$ ليس حلا للمعادلة المتجانسة فإن شكل y_p هو نفس شكل $h(x)$ وبمعاملات مجهولة مضروبا في x.

هناك أربع حالات أساسية كمايلي:

1) إذا كان $h(x)$ كثير حدود فإن:

$$y_p = \begin{cases} Q(x), & b \neq 0 \\ xQ(x), & b = 0 \wedge a \neq 0 \\ x^2 Q(x), & b = 0 \wedge a = 0 \end{cases}$$

حيث $Q(x)$ كثير حدود درجته هي نفس درجة $h(x)$

2) إذا كان $h(x) = K(x)e^{\alpha x}$ حيث $K(x)$ كثير حدود فإن:

$$y_p = \begin{cases} Q(x)e^{\alpha x}, & \alpha \text{ ليس حلا للمعادلة المميزة} \\ xQ(x)e^{\alpha x}, & \alpha \text{ حلا بسيطا للمعادلة المميزة} \\ x^2 Q(x)e^{\alpha x}, & \alpha \text{ حلا مضاعفا للمعادلة المميزة} \end{cases}$$

مع $Q(x)$ كثير حدود درجته هي نفس درجة $K(x)$

3) إذا كان $h(x) = \alpha \cos\lambda x + \beta \sin\lambda x$ فإن

$$y_p = \begin{cases} c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x, & i\lambda \text{ ليس حلا للمعادلة المميزة} \\ x(c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x), & i\lambda \text{ حلا للمعادلة المميزة} \end{cases}$$

4) إذا كان: $h(x) = K(x)(\cos\lambda x + \sin\lambda x)$ حيث $K(x)$ كثير حدود فإن

$$y_p = \begin{cases} Q_1(x) \cos\lambda x + Q_2(x) \sin\lambda x, & i\lambda \text{ ليس حلا للمعادلة المميزة} \\ x(Q_1(x) \cos\lambda x + Q_2(x) \sin\lambda x), & i\lambda \text{ حلا للمعادلة المميزة} \end{cases}$$

مع $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ كثيري حدود بنفس درجة $K(x)$.

الطريقة الثانية لتعيين الحل الخاص y_p بتغيير الثوابت.

إذا كان: $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$

فنضع $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

مع $C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$

لنجد
$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = h(x) \end{cases}$$

التفسير:

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$
$$y_p' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + \underbrace{(C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2)}_{0}$$
$$y_p'' = C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2''$$

ولدينا:
$$y_p'' + a y_p' + b y_p = C_1(x)\underbrace{(y_1'' + a y_1' + b y_1)}_{0} + C_2(x)\underbrace{(y_2'' + a y_2' + b y_2)}_{0} + C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = h(x)$$

ثم نعين $C_1'(x)$ ، $C_2'(x)$ ، ومنها $C_1(x)$ و $C_2(x)$.

الحل العام للمعادلة (E):

$$y = y_H + y_p$$

تطبيقات :

1) $y'' - 3y' + 2y = 5 \quad \dots (1)$ لدينا $y = y_H + y_p$

المتجانسة : $y'' - 3y' + 2y = 0$

المميز : $r^2 - 3r + 2 = 0$

ومنه تقبل حلين متمايزين $r_1 = 1 \,,\, r_2 = 2$

حل المتجانسة : $y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

إيجاد y_p (الحل الخاص) :

ط①: (شكل y_p) : لدينا $b = 2 \neq 0$ ثابتاً

نضع $y_p = \lambda$ لنجد $y_p' = 0$ و $y_p'' = 0$

وبالتعويض في (1) نجد $2\lambda = 5$ أي $\lambda = \frac{5}{2}$ ومنه $y_p = \frac{5}{2}$

حل (1) هو : $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{5}{2}}$$

ط②: (بتغيير الثوابت) : $y_p = c_1(x) e^{x} + c_2(x) e^{2x}$ حيث

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{x} + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) e^{x} + c_2'(x)\, 2e^{2x} = 5 \end{cases}$$

بالطرح : ومنه

$$\begin{cases} c_1'(x) = -5e^{-x} \\ c_2'(x) = 5e^{-2x} \end{cases}$$

نجد

$$\begin{cases} c_1(x) = 5e^{-x} \\ c_2(x) = -\frac{5}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

إذن

$$y_p = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

②

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \ldots (EH)$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \ldots (EC)$

$$y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

تعيين y_p: نضع $y_p = \lambda e^{3x}$ (لأن 3 ليس حل لـ (EC))

$y_p'' = 9\lambda e^{3x}$ ؛ $y_p' = 3\lambda e^{3x}$

بالتعويض في: $\cancel{9\lambda e^{3x}} - \cancel{9\lambda e^{3x}} + 2\lambda e^{3x} = e^{3x}$

$$\Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}}$$

ط② (بتغيير الثوابت):

نضع $y_p = c_1(x) e^{x} + c_2(x) e^{2x}$

لحل ؛

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{x} + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) e^{x} + c_2'(x)\, 2e^{2x} = e^{3x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -e^{2x} \\ c_2'(x) = e^{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} \\ c_2(x) = e^{x} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{2} e^{3x} + e^{3x} = \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

$y'' - 3y' + 2y = e^x$ ---(2) $\boxed{3}$

لدينا :

$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

تعيين y_p :

ط ① : (y_p ثابت)

$y_p = \lambda x e^x$

لدينا :

$y_p' = \lambda e^x + \lambda x e^x$

$y_p'' = \lambda e^x + \lambda e^x + \lambda x e^x = 2\lambda e^x + \lambda x e^x$

وبالتعويض في (2) نجد :

$2\lambda e^x + \cancel{\lambda x e^x} - 3\lambda e^x - 3\cancel{\lambda x e^x} + \cancel{2\lambda x e^x} = e^x$

$-\lambda e^x = e^x \Longrightarrow \lambda = -1$

إذن $y_p = -x e^x$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x = (c_1 - x) e^x + c_2 e^{2x}$

ط ②

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) e^x + c_2'(x)\, 2e^{2x} = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -1 \\ c_2'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = -x \\ c_2(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$y_p = -x e^x - e^x$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x - e^x$

$= \alpha e^x + c_2 e^{2x} - x e^x, \quad \alpha = c_1 - 1$

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

جذر مضاعف $r = 1$

$$y_H = (c_1 + c_2 x)e^x$$

شكل y_p : $y_p = x^2 \lambda e^x$ (لأن $\alpha = 1$ جذر مضاعف)

$$y_p' = 2x\lambda e^x + x^2 \lambda e^x$$

$$y_p'' = 2\lambda e^x + 2x\lambda e^x + 2x\lambda e^x + x^2 \lambda e^x$$

$$= 2\lambda e^x + 4x\lambda e^x + x^2 \lambda e^x$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x$$

$$2\lambda e^x + \cancel{4x\lambda e^x} + \cancel{x^2\lambda e^x} - \cancel{4x\lambda e^x} - \cancel{2x^2\lambda e^x} + \cancel{x^2\lambda e^x} = e^x$$

$$2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$$

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x$$

ط٢ للبحث عن y_p (تغيير الثوابت)

$$y_p = (c_1(x) + x c_2(x)) e^x$$

$$= c_1(x) e^x + c_2(x)\, x e^x$$

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x)\, x e^x = 0 \\ c_1'(x) e^x + c_2'(x)(e^x + x e^x) = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -x \\ c_2'(x) e^x = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -x \\ c_2'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = -\frac{x^2}{2} \\ c_2(x) = x \end{cases}$$

$$y_p = \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\right) e^x = \frac{x^2}{2} e^x$$

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y''+5y'+4y=-2x+3$$ (5)

$$y''+5y'+4y=0$$

$$r^2+5r+4=0$$

$r_2=-1$ ، $r_1=-4$ ؛ $D=9$

$$y_H=c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}$$

طرق البحث عن y_p:

بما أن $b=4\neq 0$ نضع $y_p=ax+b$

لدينا $y_p''=0$ و $y_p'=a$

بالتعويض نجد: $0+5a+4ax+4b=-2x+3$

$$4ax+5a+4b=-2x+3$$

وبالمطابقة $\begin{cases}4a=-2\\5a+4b=3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{11}{8}\end{cases}$

$$y_p=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$$

$$y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$$

طريقة تغيير الثوابت: نضع $y_p=c_1(x)e^{-4x}+c_2(x)e^{-x}$

$$\begin{cases}c_1'(x)e^{-4x}+c_2'(x)e^{-x}=0\\c_1'(x)(-4)e^{-4x}+c_2'(x)(-1)e^{-x}=-2x+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1'(x)=-\frac{1}{3}(-2x+3)e^{4x}=+\frac{2}{3}xe^{4x}-e^{4x}\\c_2'(x)=\frac{1}{3}(-2x+3)e^{x}=-\frac{2}{3}xe^{x}+e^{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1(x)=\frac{1}{6}xe^{4x}-\frac{7}{24}e^{4x}\\c_2(x)=-\frac{2}{3}xe^{x}+\frac{5}{3}e^{x}\end{cases}$$

$$y_p=\frac{1}{6}x-\frac{7}{24}-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

$$\boxed{y_p=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}}$$

6

$$y''+9y=x\cos x$$

$$y''+9y=0$$

$$r^2+9=0$$

$$r=\pm 3i$$

$$y_H=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$$

وبما أن $i\lambda=i$ ليس حلا للمميزة (EC)

فإن $\bullet\ y_p=(ax+b)\cos x+(\alpha x+\beta)\sin x$

إذن: $y_p'=a\cos x-(ax+b)\sin x+\alpha\sin x+(\alpha x+\beta)\cos x$

$$=(\alpha x+\beta+a)\cos x+(-ax-b+\alpha)\sin x$$

$$y_p''=\alpha\cos x-(\alpha x+\beta+a)\sin x-a\sin x+(-ax-b+\alpha)\cos x$$

$$=(-ax+2\alpha-b)\cos x+(-\alpha x-2a-\beta)\sin x$$

$$y_p''+9y_p=x\cos x\iff(8ax+2\alpha+8b)\cos x+(8\alpha x-2a+8\beta)\sin x=x\cos x$$

بالمطابقة

ومنه $\begin{cases}8ax+2\alpha+8b=x\\8\alpha x-2a+8\beta=0\end{cases}$

$\begin{cases}a=\frac{1}{8}\\\alpha=0\\2\alpha+8b=0\\-2a+8\beta=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{1}{8}\\\alpha=0\\b=0\\\beta=\frac{1}{32}\end{cases}$

ومنه $y_p=\frac{1}{8}x\cos x+\frac{1}{32}\sin x$

$$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{8}x\cos x+\frac{1}{32}\sin x$$

10/10