حل السلسلة الثانية: الحساب التكاملي

تمرين 01:

تذكير: ليكن d التقسيم المنتظم من الرتبة n للمجال $[a,b]$ الذي خطوته $h=\frac{b-a}{n}$ و $x_k=a+kh=a+\frac{k(b-a)}{n}$

إذا كانت الدّالة f قابلة للمكاملة حسب ريمان فإنّ:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

I -

1- لحساب $I_1=\int_0^1 e^x dx$ لدينا $f(x)=e^x$ ، $a=0$ و $b=1$ وعليه:

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}.e^{\frac{1}{n}}.\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}}(1-e).\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}}(1-e)\lim_{m\to 0}\frac{m}{1-e^m}=(1-e)\times(-1)=e-1$$

2- بنفس الطريقة لحساب $I_3=\int_1^2(x+1)dx$ لدينا $f(x)=x+1$ $a=1$ و $b=2$ وبالتّالي:

$$\int_1^2(x+1)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(2+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}k\right)$$

$$=2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\dots\dots\dots\dots+n)=2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n}{2}(1+n)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

II – نحاول كتابة النهاية على الشّكل: $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ حيث f,a,b يُطلب تعيينها ثمّ نساويها بـ $\int_a^b f(x)dx$

1- لحساب $\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$ نضرب و نقسم في n^2 فينتج :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

نلاحظ أنّ: $b-a=1$, $x_k=\frac{k}{n}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ وعليه $a=0$, و بالتّالي:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=[\arctan(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

2- و لحساب $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}$ نقوم بمايلي:

$$\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=}^{k=n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2$$

تمرين 02: مستعملا متراجحة كوشي- شوارتز أثبت أنه من أجل $0<a<b$ فإنّ: $\int_a^b\frac{dx}{x}<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

تذكير : إذا كانت f و g دالتين تقبلان المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ فإنّ: $\int_a^b fg\,dx\le\sqrt{\int_a^b f^2dx}\,.\sqrt{\int_a^b g^2dx}$

من أجل $0<a<b$ نطبّق المتراجحة من أجل $f(x)=1$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ فينتج:

$$\int_a^b 1.\frac{1}{x}dx\le\sqrt{\int_a^b 1^2dx}\,.\sqrt{\int_a^b\frac{1}{x^2}dx}=\sqrt{b-a}\sqrt{\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b}=\sqrt{b-a}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\sqrt{b-a}\sqrt{\frac{b-a}{ab}}=\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

نلاحظ أنّ المساواة تكون محققة إذا كان العدد $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ هو القيمة المتوسطة للدّلة $\frac{1}{x}$ على المجال $[a,b]$ معناه أنّ المعادلة $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ تقبل حلاً في المجال $[a,b]$, وهذا غير محقق دوماً (خذ مثلاً $[a,b]=[0.1,0.2]$) و بالتّالي المتراجحة تامة.

تمرين 04: طريقة تبديل المتغيّر:

1 . نضع لحساب $I_1=\int\left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx$ $t=x^2+1$ أي أنّ : $dt=2xdx$ و بالتّالي:

$$I_1=\int\left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+c=\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+c$$

2 . نضع لحساب $I_2=\int(\sin x)^8(\cos x)^3dx$ $t=\sin x$ أي أنّ : $dt=\cos(x)dx$ و بالتّالي:

$$I_2=\int(\sin x)^8(\cos x)^3dx=\int(\sin x)^8(\cos x)^2\underbrace{\cos x\,dx}_{dt}=\int t^8(1-t^2)dt=\int(t^8-t^{10})dt$$

$$=\frac{1}{9}t^9+\frac{1}{11}t^{11}+c=\frac{1}{9}(\sin x)^9+\frac{1}{11}(\sin x)^{11}+c$$

3 . نضع لحساب $I_3=\int\frac{dx}{x\ln x}$ $t=\ln x$ أي أنّ : $dt=\frac{dx}{x}$ و بالتّالي:

$$I_3=\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c$$

4 . نضع لحساب $I_4=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ $x=\tan t$ أي أنّ $dx=\frac{1}{\cos^2t}dt=\left(1+\tan^2t\right)dt$

و لحساب الحدود الجديدة للتكامل يجب حساب t بدلالة x معناه أنّ $t(x)=arc\tan x$ و عليه

$$\begin{cases}t(0)=\arctan(0)=0\\ t(1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

و بالتّالي :

$$I_4=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\left(1+\tan^2 t\right)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)^2\, dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

5. و لحساب $I_5=\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ نضع $x=e^t$ أي أنّ: $dx=e^t dt$

و بمأنّ $x(t)=e^t$ فإنّ الحدود الجديدة للتكامل هي : $\begin{cases} x(0)=e^0=1 \\ x(1)=e^1=e \end{cases}$ و بالتّالي :

$$I_5=\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt=\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\left[2\sqrt{1+x}\right]_1^e=2\sqrt{1+e}-2\sqrt{2}$$

6. و لحساب $I_6=\int_1^4 \frac{4x}{\sqrt{2+4x}}dx$ نضع $t=\sqrt{2+4x}$ و بالتّالي

$$dt=\frac{4}{2\sqrt{2+4x}}dx \Rightarrow dt=\frac{2}{t}dx \Rightarrow dx=\frac{tdt}{2} \quad \text{و} \quad t^2=2+4x \Rightarrow 4x=t^2-2$$

و الحدود الجديدة هي : $\begin{cases} t(1)=\sqrt{2+4}=\sqrt{6} \\ t(4)=\sqrt{2+16}=\sqrt{18} \end{cases}$ ومنه:

$$I_6=\int_1^4 \frac{4x}{\sqrt{2+4x}}dx=\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} \frac{\left(t^2-2\right)}{t}\frac{tdt}{2}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} \left(t^2-2\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3-2t\right]_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}}=6\sqrt{2}$$

7. و لحساب $I_8=\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ نضع $t=\frac{3}{2}x$ أي أنّ: $dx=\frac{2}{3}dt$ و $4t^2=9x^2$ ينتج على هذا:

$$I_8=\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{4-4t^2}}=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin(t)+c=\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)+c$$

8. نضع لحساب $I_9=\int \tan^3 tdt$ $x=\cos t$ أيّ أنّ $dx=-(\sin t)dt$ و بالتّالي:

$$I_9=\int \tan^3 tdt=\int \frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^3}\sin tdt=\int \frac{1-(\cos t)^2}{(\cos t)^3}\sin tdt=\int \frac{x^2-1}{x^3}dx=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{dx}{x^3}=\ln|x|+\frac{1}{2x^2}+c=\ln|\cos t|+\frac{1}{2(\cos t)^2}$$

9. لحساب $I_{10}=\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ نستعين بالشكل النموذجي: $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ و نضع: $t=x+3$

وعليه: $I_{10}=\int \frac{dx}{(x+3)^2+1}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c=\arctan(x+3)+c$

تمرين05: المكاملة بالتجزئة

1. لحساب $I_1=\int x^2\ln x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u'=x^2 \Rightarrow u=\frac{1}{3}x^3 \\ v=\ln x \Rightarrow v'=\frac{1}{x} \end{cases}$ و بالتّالي:

$$I_1=\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3+c$$

2. لحساب $I_2=\int x\arctan x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u'=x \Rightarrow u=\frac{1}{2}x^2 \\ v=\arctan(x)\Rightarrow v'=\frac{1}{x^2+1} \end{cases}$ و بالتّالي:

$$I_2=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan(x)+c$$

3. $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u=x^2 \Rightarrow u'=2x \\ v'=\sin x \Rightarrow v=-\cos x \end{cases}$ و منه:

$$I_3=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(x)dx}_{J}$$

نضع مره ثانية $\begin{cases} u=x \Rightarrow u'=1 \\ v'=\cos x \Rightarrow v=\sin x \end{cases}$ و بالتّالي: $J=\left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx=\left[x\sin(x)+\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

بالتعويض عن J في عبارة I_3 نجد:

$$I_3=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\left[x\sin(x)+\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

4. لحساب $I_4=\int e^x\cos(x)dx$ نضع: $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow u'=e^x \\ v'=\cos x \Rightarrow v=\sin x \end{cases}$ و التّالي

$$I_4=\int e^x\cos(x)dx=e^x\sin(x)-\underbrace{\int e^x\sin(x)dx}_{I}$$

نضع مرّه ثانية لحساب $I=\int e^x\sin(x)dx$ $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow u'=e^x \\ v'=\sin(x)\Rightarrow v=-\cos(x) \end{cases}$ فينتج: $I=-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)dx$

بالتعويض عن I في عبارة I_4 نجد: $I_4=e^x\sin(x)-\left(-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)dx\right)$ أي أنّ:

$$I_4=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)-I_4$$ و منه

$$2I_4=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)$$

و أخيراً $$I_4=\frac{1}{2}e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c$$

5. لحساب $I_5=\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int x.\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ نضع: $\begin{cases} u=x\Rightarrow u'=1 \\ v'=\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{2(x^2+1)}\end{cases}$

وعليه:

$$I_5=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x)+c$$

تمرين07: حساب التكاملات باستخدام تحليل الدوال الناطقة إلى كسور ناطقة بسيطة

1. $I_1=\int_0^1\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}dx$ نلاحظ أنّ درجة البسط أكبر من درجة المقام و بالتّالي نجري القسمة الإقليدية للبسط على المقام :

x^3+2x	x^2+2x+1
$-x^3-2x^2-x$	$x-2$
$-2x^2+x$	
$2x^2+4x+2$	
$5x+2$	

و بالتّالي: $\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5x+2}{(x+1)^2}$

لنبحث على A,B حيث : $\frac{5x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\cdots\cdots(*)$

بضرب طرفي $(*)$ في $(x+1)^2$ وأخذ $x=-1$ نجد وأخذ $B=-3$

بأخذ $x=-2$ في $(*)$ نجد $-8=-A+B$ و منه $A=5$

و عليه: $\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}$

و أخيراً: $I_1=\int_0^1\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}dx=\int_0^1\left(x-2+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+5\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}\right]_0^1=5\ln(2)-3$$

2. لحساب $I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ نكتب الشكل النموذجي للمقام $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

و نضع : $t=x+\frac{1}{2}$ و $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و علية:

$$I_2=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{I}-\frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+x+1}}_{J}$$

$$I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)$$

لدينا:

$$J=\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

و بالتعويض عن I و J في عبارة I_2 نجد: $I_2=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

3. $I_3=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x+2)}$ لنبحث على A,B,C حيث : $\frac{(x-1)}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\cdots\cdots(**)$

بضرب طرفي $(**)$ في $(x+2)$ وأخذ $x=-2$ نجدقيمة $A=-\frac{3}{5}$

و بضرب طرفي $(**)$ في (x^2+1) نحصل على $\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{A}{x+2}(x^2+1)+Bx+C$ و أخذ $x=i$ (لأنه جذر لـ x^2+1)

نحصل على المساواة التالية: $\frac{(i-1)}{(i+2)}=Bi+C$ و بكتابة العدد المركب $\frac{(i-1)}{(i+2)}$ على شكله الجبري و نجد

$\frac{3i-1}{5}=Bi+C$ معناه أنّ : $B=\frac{3}{5}$ و $C=-\frac{1}{5}$ (يمكن استعمال توحيد المقام و المطابقة)

و بالتالي: $I_3=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{-3}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2+1}\right)dx$

$$=-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{3}{2\times5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{10}\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\arctan(x)+c$$

تمرين08:

تذكير: في الحالة العامة يمكن نعتمد تبديل المتغير: $t=\tan\frac{x}{2}$ ونجد $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

كحالة خاصة: قاعدة بيوش Bioche: بوضع $w(x)=R(\cos x,\sin x)$ و لحساب $\int R(\cos x,\sin x)dx=\int w(x)dx$

- ♦ إذا كان: $w(-x)=-w(x)$ نضع: $t=\cos x$ ♦ إذا كان: $w(\pi-x)=-w(x)$ نضع: $t=\sin x$
- ♦ إذا كان: $w(\pi+x)=w(x)$ نضع: $t=\tan x$

- بواسطة قواعد مكاملة دالة كسرية من الشكل $R(\cos x,\sin x)$ ، لنحسب التكاملات التالية:

1. $I_1=\int\frac{dx}{5-3\cos x}$ نضع $t=\tan\frac{x}{2}$ وبالتّالي: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ وعليه :

$$I_1=\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\arctan(2t)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)+c$$

2. لحساب $I_2=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$ نطبّق قاعدة بيوش فنضع $t=\sin x$ فيكون $dt=\cos(x)dx$ و بالتّالي:

$$I_2=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^5 x}\cos x dx=\int\frac{\left(1-t^2\right)}{t^5}dt=\int\frac{dt}{t^5}-\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2t^2}+c=-\frac{1}{4\left(\sin x\right)^4}+\frac{1}{2\left(\sin x\right)^2}+c$$

3. لحساب: $I_3=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$ نضع $t=\tan\frac{x}{2}$ فيكون $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

و عليه $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ و بالتّالي:

$$I_3=\int\frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{4t^2}{\left(1-t^2\right)^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{\left(t^2+t^6\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{t^2\left(1+t^4\right)}$$

فكّك الكسر و أكمل حساب التكامل .

4. $I_4=\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$ بنفس الوضع السابق نجد :

$$I_4=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

فكّك الكسر و أكمل حساب التكامل .

إرشاد: لاحظ أنّ: $\left(1+t^4\right)=\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)$

تمرين09: اعتمادا على قواعد مكاملة الدوال من الشكل $R(e^{px},e^{qx})$ ، $R(\text{ch}\,x,\text{sh}\,x)$ أو الدوال من الشكل $\cos^p x\sin^q$ حساب التكاملات التالية:

$$1)I_1=\int\frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}},t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$$
$$=\int\frac{(e^x)^2e^x dx}{1+(e^x)^2}=\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}=t-\arctan t+c=e^x-\arctan\left(e^x\right)+c$$

$$2)I_2=\int\frac{dx}{5\text{ch}x+3\text{sh}x+4},t=\text{th}\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\text{argth}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1-t^2},\text{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\text{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$
$$=\int\frac{1}{\frac{5(1+t^2)}{1-t^2}+\frac{6t}{1-t^2}+4}.\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{2dt}{t^2+6t+9}=\int\frac{2dt}{\left(t+3\right)^2}=-\frac{2}{t+3}+c=-\frac{2}{th\frac{x}{2}+3}+c$$

$$3)I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^3 x\,dx,t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx,x=0,x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1,t=0$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x^2(1-\cos x^2)(-\sin x)dx=-\int_1^0 t^2(1-t^2)dt=\int_0^1 t^2(1-t^2)dt=\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1-\frac{1}{5}\left[t^5\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

$$4)I_4=\int \mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{sh}^2 x dx=\frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,4x-1)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}(4x)-\frac{1}{2}x\right)+c=\frac{1}{32}sh(4x)-\frac{1}{16}x+c$$

تمرين10:

تذكير: حساب تكامل من الشكل $I=\int x^{\alpha}\left(ax^{\beta}+b\right)^{\gamma}dx$ حيث: α، β، γ أعداد ناطقة ، لحساب التكامل I نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان γ عددا صحيحا($\gamma\in\mathbb{Z}$) نضع: نضع $x=t^n$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامي لعددين β,α

الحالة الثانية: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}\in\mathbb{Z}$ نضع: $ax^{\beta}+b=t^{p}$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\in\mathbb{Z}$ نضع: $a+bx^{-\beta}=t^{p}$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

- بتطبيق قاعدة مكاملة دالة كسرية من الشكل،لن $\int x^{\alpha}\left(ax^{\beta}+b\right)^{\gamma}dx$ حساب التكامل

$I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)^{-1}dx$ لدينا $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{4}$, $\gamma=-1$ لدينا $\gamma=-1\in\mathbb{Z}$

نضع: $x=t^4$ فيكون $dx=4t^3dt$ ، $x^{\frac{1}{2}}=t^2$ و $x^{\frac{3}{4}}=t^3$ ومنه

$$I=4\int t^2(t^3+1)^{-1}t^3dt=4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}dt$$
$$=4\int t^2dt-\frac{4}{3}\int\frac{3t^2}{t^3+1}dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+c$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+1|+c$$

تمرين11:

تذكير: طريقة حساب تكامل من الشكل: $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ يتم بطريقة أولر حسب الحالات التالية:

الحالة1: إذا كان $a>0$: نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(t+x)$

الحالة3: إذا كان x_1 جذرا للمعادلة $ax^2+bx+c=0$: نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$

- مطبّقا قاعدة أولر لمكاملة دالة كسرية من الشكل $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ ، حساب التكاملين التالين:

.1 $I_1=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$ نضع: $\sqrt{x^2+x+2}=t+x$ فيكون $x=\frac{2-t^2}{2t-1}$ و $dx=-\frac{-2(t^2-t+2)}{(2t-1)^2}dt$

ومنه $\sqrt{x^2+x+2}=\frac{t^2-t+2}{2t-1}$

$$I_1=-2\int\frac{(2-t^2)}{(2t-1)}.\frac{(2t-1)}{(t^2-t+2)}.\frac{(t^2-t+2)}{(2t-1)^2}dt=\int\frac{2t^2-4}{(2t-1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{4t^2-4t+1}{(2t-1)^2}+\frac{4t-9}{(2t-1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{4t-9}{(2t-1)^2}dt$$

لدينا $\frac{4t-9}{(2t-1)^2}=\frac{2}{2t-1}-\frac{7}{(2t-1)^2}$ ومنه

$$I_1=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{2t-1}-\frac{7}{2}\int\frac{dt}{(2t-1)^2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|2t-1|+\frac{7}{4}\frac{1}{(2t-1)^2}+c$$

2. لحساب $I_2=\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x-2x^2}}$ نضع: $\sqrt{x-2x^2}=tx$ فيكون $x=\frac{1}{t^2+2}$ و $dx=\frac{-2tdt}{(t^2+2)^2}$

ومنه

$$I_2=\int\frac{\frac{t^2+3}{t^2+2}\cdot\frac{-2tdt}{\left(t^2+2\right)^2}}{\frac{t}{t^2+2}}=-2\int\frac{t^2+3}{(t^2+2)^2}dt=-2\int\frac{t^2+2+1}{(t^2+2)^2}dt=-2\int\frac{dt}{t^2+2}-2\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}-2\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+\frac{2}{(t^2+2)}+c$$

$$=-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-2x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+2x+c$$