I . تكامل ريمان على مجال مغلق ومحدود:

1 . تعريف التقسيم: ليكن $a<b$ عددين حقيقيين. المجموعة المنتهية و المرتبة: $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ حيث : $a=x_0<x_1<...<x_n=b$

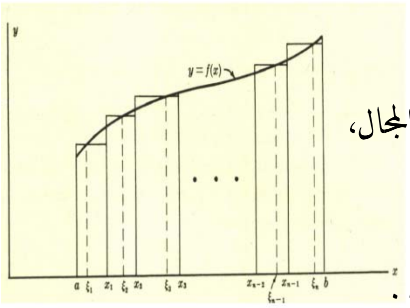
تسمّى تقسيما من الرتبة n للمجال $[a,b]$ و العدد الموجب تماما $\delta(d)=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ هو خطوة التقسيم d .

المجموعة $d=\left\{x_0=a,a+\frac{b-a}{n},...,x_k=a+k\frac{b-a}{n}...,x_n=b\right\}$ تسمّى تقسيما منتظما من الرتبة n خطوته $h=\frac{b-a}{n}$.

مثال: المجموعة $d_1=\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ تقسيم من الرتبة الخامسة للمجال $[0,1]$ خطوته $\delta(d_1)=\max\limits_{1\le k\le 5}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{2}$.

المجموعة $d_1=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$ تقسيم منتظم من الرتبة الرابعة للمجال $[0,1]$ خطوته $h=\frac{1}{4}$

2 . قابلية المكاملة لدالة حسب ريمان:



لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,b]$ ، $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ تقسيم من الرتبة n لهذا المجال،
z_k عدد كيفي من $[x_{k-1},x_k]$ و $1\le k\le n$ ونرمز بـ: S_n لمجموع مساحة المستطيلات
التي طول كل واحد منها $f(z_k)$ وعرضه (x_k-x_{k-1}) أي $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(z_k)(x_k-x_{k-1})$.

تعريف: نقول أن الدالة f تقبل المكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ إذا كان للمجموع S_n نهاية منتهية عندما يؤول n إلى $+\infty$ ، نرمز لهذه النهاية بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ ونكتب: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(z_k)(x_k-x_{k-1})$ أي:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\exists\alpha(\varepsilon)>0:\delta(d)=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})<\alpha\Rightarrow\left|S_n-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

ملاحظة: إذا كانت f قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على المجال $[a,b]$ فإنّ **قيمة التكامل لا تتعلّق بالتقسيم المختار** و بالتالي سنستعمل دوماً
التقسيمات المنتظمة.

حالة خاصة: إذا كان d تقسيما منتظما للمجال $[a,b]$ خطوته $h=\frac{b-a}{n}$ و $z_k=x_k$ فإن: $S_n=\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n})$

يسمّى مجموع ريمان ويكون لدينا $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n})$

فمثلا في الحالة: $a=0$ ، $b=1$ فإن: $h=\frac{1}{n}$ و $d=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{k}{n}.,\frac{n-1}{n},1\right\}$ و يكون $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$

مثال: لتكن $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=x$ ، لنحسب $\int_0^1 f(x)dx$

لدينا $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$

ومنه يكون: $\int_0^1 x\,dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sum\limits_{k=1}^{k=n}k=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}.\frac{n(1+n)}{2}=\frac{1}{2}$

نظرية: إذا كانت f دالة عددية مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فإن f تقبل المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$

أي أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$ موجودة.

البرهان: بما أن f دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فهي محدودة وتدرك حديها الأعلى والأسفل أي:

$$\exists m,M\in\mathbb{R},\ \forall x\in[a,b]: m\le f(x)\le M \quad \text{حيث} \quad m=\inf_{a\le x\le b} f(x),\ M=\sup_{a\le x\le b} f(x)$$

ليكن $d=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ تقسيم من الرتبة n للمجال $[a,b]$ ، z_k عدد كيفي من $[x_{k-1},x_k]$ و $1\le k\le n$

لدينا $m\le f(z_k)\le M$ ومنه $m(x_k-x_{k-1})\le f(z_k)(x_k-x_{k-1})\le M(x_k-x_{k-1})$ بالجمع نجد:

$$m\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{k=n}f(z_k)(x_k-x_{k-1})\le M\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-x_{k-1})\Rightarrow m(b-a)\le S_n\le M(b-a)\Rightarrow m\le\frac{S_n}{b-a}\le M$$

و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه: $\exists c\in[a,b]: f(c)=\dfrac{S_n}{b-a}$ و منه $S_n=f(c)(b-a)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}S_n=f(c)(b-a)$

النهاية موجودة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$ موجودة أي الدالة f تقبل المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

ملاحظة: تعمّم النظريّة السّابقة إلى الدوال المستمرة بالتقطّع و الدوال الرتيبة على المجال $[a,b]$.

II. خواص التّكامل:

قضيّة: إذا كانت f و g دالتان تقبلان المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ فإنّ الدوال: $f+g$ ، λf ، $|f|$ قابلة للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$. و لدينا:

1) $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$ خطّية التّكامل

3) $\int_a^a f(x)dx=0$

4) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,\ \forall c\in[a,b]$ علاقة شال

6) $f\ge0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge0$

7) $f\le g\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ التّرتيب و التّكامل

8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

البرهان: من التعريف $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ يمكن استنتاج كل براهين الخواص السابقة.

نظرية:(نظرية المتوسط): إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على $[a,b]$ حيث: $\exists m,M\in\mathbb{R},\ \forall x\in[a,b]: m\le f(x)\le M$

و g لا تغير إشارتها على المجال $[a,b]$ فإنه يوجد $c\in[a,b]$ يحقق المساواة: $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$

البرهان: 1) إذا كان $g(x)=0$ فإن المساواة محققة.

2) إذا كان $g(x)\ne0$ و هذا يعني: $\forall x\in[a,b],\ g(x)>0$ أو $\forall x\in[a,b],\ g(x)<0$

نأخذ الحالة $g(x)>0$ (و نناقش الحالة $g(x)<0$ بنفس الطريقة)

f دالة مستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ فهي محدودة و تدرك حديها الأعلى والأسفل وبالتالي:

$\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)=m \le f(x)\le M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ ومنه $m\,g(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ بالمكاملة نجد:

$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$ ومنه: $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$ و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه: و

$\exists c\in[a,b]: f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ بالتالي: $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$

حالة خاصة: إذا كانت $g=1$ و على $[a,b]$ فإنّ $f(c)$ **تسمى القيمة المتوسطة** للدّالة f على المجال $[a,b]$.

نظرية3: (متباينات كوشي شوارتز– أولدر– مينكاوسكي):

إذا كانت f و g دالتين تقبلان المكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ فإنّ: 1) $\left(\int_a^b fgdx=\right)^2\le\int_a^b f^2dx\int_a^b g^2dx$ (متباينة كوشي شوارتز)

2) من أجل كل $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ حيث: $p,q>1$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ لدينا: $\int_a^b|fg|dx\le\left(\int_a^b|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}$ (متباينة هولدر)

3) من أجل كل عدد حقيقي $p\ge1$ لدينا: $\left[\int_a^b\left(|f|^p+|g|^p\right)dx\right]^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|fg|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$ (متباينة مينكاوسكي)

II. حساب التكامل:

1 . الدالة الأصلية لدالة:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,b]$ نقول أن $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$ إذا كانت F تقبل الاشتقاق على $[a,b]$ وتحقق: $\forall x\in[a,b]\quad F'(x)=f(x)$

ملاحظة: إيجاد الدالة الأصلية يعني العملية العكسية لحساب الدالة المشتقة.

أمثلة:

1– لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الدالة المعرفة كما يلي $f(x)=x^2$ إذن الدالة $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ هي دالة أصلية للدالة f .

كذلك الدالة المعرفة بـ: $G(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ هي دالة أصلية للدالة f .

2– لتكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ الدالة المعرفة كما يلي $f(x)=\sqrt{x}$ إذن الدالة $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ هي دالة أصلية للدالة f . من أجل كل $c\in\mathbb{R}$. الدالة $F+c$ هي كذلك دالة أصلية للدالة f .

نتيجة: إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على $[a,b]$ فإن كل دالة أصلية لـ: f تكتب على الشكل $G(x)=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت. (أي أنه إذا قبلت f دالة أصلية على $[a,b]$ فهي تقبل عدد غير منته من الدوال الأصلية على $[a,b]$) .

نرمز لمجموعة كل الدوال الأصلية للدالة f بالرمز $\int f(x)dx$ أي أن $\int f(x)dx=F(x)+c$

ونسمي $\int f(x)dx$ التكامل غير المحدد أو الدوال الأصلية لـ f .

ملاحظة: يجب التفريق بين التكامل غير المحدد للدّالة f $\int f(x)dx$ الذي يمثل **الدّوال العددية للدّالة** f على مجال بينما التكامل المحدد أو تكامل ريمان للدّالة f على $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ **هو عدد حقيقي**.

خواص الخطيّة للدّوال الأصليّة: لتكن الدالتين f, g تقبلان دوالا أصلية على مجال I, و ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$, عندئذ $f+g$ و λf تقبلان دوالا أصلية على I و لدينا:

1. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
2. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

البرهان: بسيط باستعمال خطيّة الاشتقاق.

2 . نظريـة: لتكن $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و x_0 عدد حقيقي ثابت من $[a,b]$.

1 . الدالة $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي: $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ هي دالة أصلية للدالة f أي F تقبل الاشتقاق على $[a,b]$ وتحقق:

$\forall x \in [a,b] \;\; F'(x) = f(x)$

2 . نستنتج أنه من أجل كل F دالة أصلية كيفية للدالة f فإن: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ونكتب: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

البرهان: 1 . يكفي أن نبرهن حسب التعريف أنّ: F تقبل الاشتقاق على $[a,b]$ وتحقق: $\forall x \in [a,b] \;\; F'(x) = f(x)$

لدينا: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ وبالتالي محدودة على هذا المجال كذلك الدالة $g: t \mapsto 1$ مستمرة و g لا تغير اشارتها على المجال $[a,b]$ حسب نظرية المتوسط يوجد $c \in [x, x+h]$ بحيث: $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h} f(c)\int_x^{x+h} 1.dt = \frac{1}{h} f(c).h = f(c)$ إذا لما $h \to 0$

فإن $c \to x$ و منه: $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$ لأنّ f مستمرة و منه $F'(x) = f(x)$

2 . لتكن $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة f معرفة كما يلي: $G(x) = \int_a^x f(t)dt$

إذن $F(x) + c = G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F(a) + c = G(a) = 0$ ومنه $c = -F(x)$ إذن:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

3 . الدالة الأصلية لبعض الدّوال المألوفة

$(a \in \mathbb{R}) \quad \int a dx = ax + c$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
$(a \neq 0) \quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$	$(m \neq -1) \int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$(a \neq 0) \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$
$\int (1+\tan^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + c$
$\int shx dx = chx + c$	$\int chx dx = shx + c$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+h}\right\rvert + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
$\int \frac{u'(x)dx}{u^n(x)} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + c \quad n \neq 1$	$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln\lvert u(x)\rvert + c$
$\int \frac{u'(x)dx}{\sqrt{u(x)}} = 2\sqrt{u(x)} + c$	$\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + c$
$\int \ln x dx = -x + x\ln x + c$	$\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + c$

ملاحظة: يجب مراعاه مجالات وجود الدوال الأصلية في الجدول السابق.

4. طرق حساب التكامل:

عند حساب $\int_a^b f(x)dx$ أو $\int f(x)dx$ فإننا نفكر أولا في استعمال الجدول السابق

فإذا استطعنا إيجاد دالة F أصلية **بشكل مباشر** لـ f فعندئذ يكون لدينا: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ أو $\int f(x)dx = F(x)+c$

أمّا إذا لم نستطع فعل ذلك فإننا نلجأ إلى حساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ أو $\int f(x)dx$ بإحدى الطرق **الغير مباشره** التالية:

أ. تبديل المتغير:

نظرية: إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ دالة من الصنف C^1 على المجال $[\alpha,\beta]$:

عندئذ الدالة $t\mapsto f(g(t))g'(t)$ قابلة للمكاملة على $[\alpha,\beta]$ و لدينا: $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$

بالنسبة للتكامل غير المحدد لدينا: $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

أي أننا وضعنا $x = g(t)$ **و بالتالي** $dx = g'(t)dt$.

البرهان: بما أن الدالة $(f\circ g)g'$ مستمرة فإن تقبل المكاملة و لتكن F دالة أصلية للدالة f إذا: $(F\circ g)' = (F'\circ g).g' = (f\circ g).g'$

أي $F\circ g$ دالة أصلية للدالة $(f\circ g)g'$ إذا: $\int_\alpha^\beta (f\circ g)g'dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(b)} f(x)dx$

مثال: لنحسب $I = \int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x\,dx$ نعتبر $t=\ln x$ إذا $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ وبالتالي: $dt = \frac{dx}{x}$

كذلك: $x=1 \Rightarrow t=\ln 1=0$ و $x=e \Rightarrow t=\ln e=1$ ومنه $I = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

ملاحظة هامّة: زيادة على شروط النظريّة السابقة إذا كانت الدالة g تقابلية على $[\alpha,\beta]$ فيمكن وضع $t = g^{-1}(x)$ و بالتّالي يمكن الانتقال من الطّرف الثاني إلى الأوّل.

مثال: لحساب $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ نضع $x = \sin t$ فإنّ $dx = \cos t$ و $t = \arcsin x$ و بالتالي :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-(\sin t)^2}\,\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

ب.التكامل بالتجزئة:

نظرية: إذا كانت f و g دالتين من الصنف C^1 على $[a,b]$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[fg(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

حيث: $[fg(x)]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$

و بالنسبة للتكامل غير المحدّد لدينا: $\int f(x)g'(x)dx=fg(x)-\int f'(x)g(x)dx$

البرهان: fg دالة أصلية للدالة $(fg)'$ حيث: $(fg)'=f'g+fg'$ إذا:

$$\int_a^b (fg)'(x)dx=[fg(x)]_a^b=\int_a^b \left(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right)dx=\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

أي أنّ: $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[fg(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

مثال: لنحسب $I=\int_0^1 \arcsin x dx$ نضع: $f(x)=\arcsin x\,,\ g'(x)=1$ وبالتالي $g(x)=x\,,\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$I=\int_0^1 \arcsin x dx=[x\arcsin x]_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}+\int_0^1\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{4}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-1$$

تطبيق: (دستور تايلورباقي تكاملي)

نظرية: إذا كانت f دالة عددية من الصنف C^{n+1} على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 فإنّه من أجل كل عدد x من I يكون:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\int_{x_0}^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.....(1)$$

البرهان: لنبرهن بالتراجع، تتحقق من أجل $n=0$. لدينا f دالة من الصنف C^1 لنثبت أنّ: $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)dt$

واضح لأنّ f هي دالة أصلية للدالة المشتقة f' أي: $\int_{x_0}^x f'(t)dt=[f(x)]_{x_0}^x=f(x)-f(x_0)$

نفرض أنّ العلاقة (1) صحيحة من أجل n كيفي ونثبت صحتها من أجل $n+1$

لنثبت أنّ: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\int_{x_0}^x\dfrac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt$

لنحسب التكامل: $\int_{x_0}^x\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ نضع: $\begin{cases}u(t)=f^{(n+1)}(t)\\ v'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(t)=f^{(n+2)}(t)\\ v(t)=-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\end{cases}$ ومنه يكون:

$$\int_{x_0}^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt=\left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^x+\int_{x_0}^x\frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}+\int_{x_0}^x\frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

ج. حساب تكامل من الشكل: $I=\int\cos^p x\,,\sin^q dx$ حيث: $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ حساب التكامل I يتم حسب الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان p فرديا $(p-1=2n)$ نضع: $t=\sin x$ نجد: $I=\int\cos^{p-1}x\,,\sin^q x\cos x dx=\int t^q(1-t^2)^n dt$

وبهذا نكون قد حوّلنا التكامل I إلى مكاملة دالة كثير حدود للمتغير t .

الحالة الثانية: إذا كان q فرديا $(q-1=2m)$ نضع: $t=\cos x$ نجد: $I=-\int \cos^{p} x\,,\sin^{q-1} x\,(-\sin x)dx=-\int t^{p}(1-t^{2})^{m}dt$

وبهذا نكون قد حوّلنا التكامل I إلى مكاملة دالة كثير حدود للمتغير t .

الحالة الثالثة: إذا كان p,q زوجيين فإنّنا نستخدم عبارتي Euler : $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ، $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ و دستور ثنائي الحدّ لتتحوّل العبارة المُراد حساب تكاملها إلى عبارة خطيّة و بالتالي هي مجموع تكاملات مباشرة (من الشكل $\cos ax$ أو $\sin ax$).

مثال:

لحساب $I=\int \cos^{2} x\sin^{4} xdx$ نستخدم العبارات التالية: $\cos^{2} x=\dfrac{1}{4}(e^{ix}+e^{-ix})^{2}=\dfrac{1}{4}(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)$

$\sin^{4} x=\dfrac{1}{16}(e^{ix}-e^{-ix})^{4}=\dfrac{1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6)$ بعد الحساب نجد:

$$\cos^{2} x\sin^{4} x=\frac{1}{64}\left[(e^{6ix}+e^{-6ix})-2(e^{4ix}+e^{-4ix})-(e^{2ix}-e^{-2ix})+4\right]=\frac{1}{32}(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2)$$

و بالتالي: $I=\int \dfrac{1}{32}(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2)dx=\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{1}{6}\sin 6x-\dfrac{1}{2}\sin 4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+2x\right)+c$

د- **دراسة التكامل من الشكل:** $\int \mathrm{ch}^{p} x\,,\mathrm{sh}^{q} dx$ تتم بنفس طريقة التكامل $\int \cos^{p} x\,,\sin^{q} xdx$ حيث $(p,q)\in\mathbb{N}^{2}$ فنضع:

$t=\mathrm{sh}\, x$ أو $t=\mathrm{ch}\, x$ إذا كان أحد العددين p أو q فردي.

و في حالة p,q زوجيان و موجبان فإنّنا نستخدم العبارات: $\mathrm{ch}^{2} x=\dfrac{\mathrm{ch}\, 2x+1}{2}$ ، $\mathrm{ch}^{2} x=\dfrac{\mathrm{ch}\, 2x-1}{2}$ و $\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x=\dfrac{\mathrm{sh}2x}{2}$

لتحوّل العبارة المراد حساب تكاملها إلى **عبارة خطيّة.**

هـ .**طريقة حساب تكامل دالة ناطقة:**

تعريف: – نسمي كسرًا ناطقًا بسيطا من النمط الأول كل كسر من الشكل : $\dfrac{A}{(x-\alpha)^{k}}$ حيث $A,\alpha\in\mathbb{R}$ و $k\in\mathbb{N}^{*}$.

– نسمي كسرًا ناطقًا بسيطا من النمط الثاني كل كسر من الشكل: $\dfrac{px+q}{\left(ax^{2}+bx+c\right)^{s}}$ a,b,c,p,q ثوابت حقيقيّة

و $b^{2}-4ac<0$ (أي مميّزالعبارة $ax^{2}+bx+c$ سالب تماما).

1 . حالة $I=\int \dfrac{px+q}{ax^{2}+bx+c}dx$ حيث a,b,c,p,q ثوابت حقيقيّة و $a\neq 0$, نميّز ثلاث حالات

- أولا: إذاكان $\Delta=b^{2}-4ac>0$ و بالتّالي العبارة $ax^{2}+bx+c$ تقبل جذرين مختلفين x_1,x_2 و تحلل على الشكل

$a(x-x_1)(x-x_2)$ في هذه الحالة نبحث على العددين الحقيقيّن A,B حيث :

$\dfrac{px+q}{ax^{2}+bx+c}=\dfrac{px+q}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\dfrac{A}{(x-x_1)}+\dfrac{B}{(x-x_2)}$ و بالتالي فإنّ I مجموع تكاملين بسيطين مباشرين

$$I=\int \frac{px+q}{ax^{2}+bx+c}dx=\int\left(\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}\right)dx=A.\ln|x-x_1|+B.\ln|x-x_2|+c$$

مثال: لحساب $I=\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}dx$ لدينا $\Delta=9$ و $x_1=-2, x_2=1$ وبالتالي $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

لنبحث على A,B حيث: $\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}$............(*)

من أجل $x\neq -2$ نضرب طرفي (*) في $(x+2)$ نجد: $\frac{2x+3}{(x-1)}=A+\frac{(x+2)B}{(x-1)}$ بحساب نهاية الطرفين عندما $x\to -2$

فنجد $A=\frac{1}{3}$ ، بنفس الطريقة نجد $B=\frac{5}{3}$ و بالتالي:

$$I=\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3(x+2)}+\frac{5}{3(x-1)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+c$$

- **ثانيا: إذاكان** $\underline{\Delta=0}$ العبارة ax^2+bx+c تقبل جذراً مضعفاً x_0 و تحلل على الشكل $a(x-x_0)^2$

في هذه الحالة نبحث على العددين الحقيقيّين A,B حيث:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{px+q}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^2}$$ و بالتالي فإنّ:

$$I=\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int\left(\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^2}\right)dx=A.\ln|x-x_0|-\frac{B}{(x-x_0)}+c$$

مثال: لحساب $I=\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx$ لدينا $x^2-2x+1=(x-1)^2$ نحسب العددين A,B حيث

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}............(**)$$

من أجل $x\neq 1$ نضرب طرفي (**) في $(x-1)^2$ فنجد $x+1=A(x-1)+B$ بأخذ نهاية الطرفين عندما $x\to 1$ و منه $B=2$

بالتعويض عن قيمة B و أخذ قيمة $x=2$ في (**) نجد : $3=A+2$ أي أنّ $A=1$ و بالتالي

$$I=\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx=\int\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=\ln|x-1|-\frac{2}{(x-1)^2}+c$$

- **ثالثا إذا كان:** $\underline{\Delta=b^2-4ac<0}$ نكتب العبارة ax^2+bx+c على الشكل النموذجي:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$ و نضع $t=x+\frac{b}{2a}$ و $k^2=\frac{-\Delta}{4a^2}$

$$I=\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)-\frac{pb}{2a}+q}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{I_1}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$$

I_1 هو تكامل مباشر $I_1=\ln|ax^2+bx+c|$

و لحساب I_2 نستعمل الشكل النموذجي و تغيير المتغيّر السابق فينتج

$$I_2=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{1}{ak}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}}\right)$$

و منه: $I=\frac{p}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\frac{1}{ak}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}}\right)+c$

مثال : لحساب التكامل $I=\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ لدينا $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ و بالتّالي: $t=x+\frac{1}{2}$ و $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$

بعد حساب بسيط نجد $I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

2. الحالة العامّة:

تعريف: نسمي كسر ناطق **نظامي** كل كسر ناطق درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه.

لحساب تكامل من الشكل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود فإننا نتّبع الخطوات التالية:

أولا: إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر أو تساوي من درجة $g(x)$ ، نجري القسمة الاقليدية العاديّة لـ $f(x)$ على $g(x)$ فنجد: $\frac{f(x)}{g(x)}=E(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$ حيث $E(x)$ هو كثير حدود و هو يمثّل حاصل قسمة $f(x)$ على $g(x)$ و $R(x)$ باقي القسمة و هو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة $g(x)$ أي أنّ: $\frac{R(x)}{g(x)}$ كسر ناطق نظامي.

السؤال المطروح كيف نفكك الكسر النظامي $\frac{R(x)}{g(x)}$ إلى مجموع كسور بسيطة من النمط الأول و (أو) النمط الثاني.

ثانيا: نحلّل المقام $g(x)$ إلى جداء قوى لعوامل من الدرجة الأولى من الشكل $(x-\alpha)^n$ و (أو) جداء قوى لعوامل من الدرجة الثانية بمميّز سالب تماماً من الشكل $(ax^2+bx+c)^m$ حيث $n,m\in\mathbb{N}^*$.

- كل حدّ في $g(x)$ من الشكل $(x-\alpha)^n$ يُعطي مجموع n كسر بسيط من النمط الأول:

$\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$ حيث $A_1,A_2,\ldots\ldots\ldots,A_n$ ثوابت حقيقيّة يُطلب حسابها .

- وكل حدّ في $g(x)$ من الشكل $(ax^2+bx+c)^m$ يُعطي مجموع m كسر بسيط من النمط الثاني :

$\frac{p_1x+q_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{p_2x+q_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots\cdots+\frac{p_mx+q_m}{(ax^2+bx+c)^m}$ حيث $p_1,p_2,\ldots\ldots\ldots,p_m$ $q_1,q_2,\ldots\ldots\ldots,q_m$ ثوابت حقيقيّة يُطلب حسابها .

حساب التكامل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ يؤول إلى مكاملة كثير الحدود $E(x)$ و الكسور البسيطة السابقة.

3. مكاملة الكسور البسيطة:

- **النمط الأول:** $I_n=\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}dx$ **حيث** $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} si \quad n=1 \quad I_1=\int \frac{A}{(x-\alpha)}dx = A\ln|x-\alpha| \\ si \quad n\geq 2 \quad I_n=\int A(x-\alpha)^{-n}dx = \frac{A}{-n+1}(x-\alpha)^{-n+1} \end{cases}$$

- النمط الثاني: $J_m=\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx \quad m\in\mathbb{N}^*$

سنهتم فقط بالحالة $m\geq 2$ لأنّ حالة $m=1$ عُولجت في الفقرة 1 من هذا الجزء . من أجل $m\geq 2$.

$(ax^2+bx+c)^m=a^m\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]^m$ و بوضع $t=x+\frac{b}{2a}$ و $k^2=\frac{-\Delta}{4a^2}$ لدينا

$$J_m=\int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)-\frac{pb}{2a}+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\underbrace{\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}dx}_{I}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}}_{L}$$

I هو تكامل مباشر من الشكل $\int\frac{u'}{u^m}$ أي أنّ : $I=\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}dx=\frac{1}{(1-m)(ax^2+bx+c)^{m-1}}$

و لحساب L نستعمل الشكل النموذجي و تغيير المتغيّر السابق ثمّ علاقة تراجعية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$L=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}=\int\frac{dx}{a^m\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]^m}=\frac{1}{a^m}\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^m}}_{I_m}=\frac{1}{a^s}\int(t^2+k^2)^{-m}dt$$

و لحساب I_m نستعمل المكاملة بالتجزئة نضع: $\begin{cases} v(t)=(t^2+k^2)^{-m}\Rightarrow v'(t)=-2mt(t^2+k^2)^{-m-1} \\ w'(t)=1\Rightarrow w(t)=t\end{cases}$ و بالتّالي

$$I_m=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{t^2}{(t^2+k^2)^{m+1}}dt$$

$$=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{(t^2+k^2)-k^2}{(t^2+k^2)^{m+1}}dt$$

$$=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2m\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^m}-2mk^2\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{m+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2+k^2)^m}+2mI_m-2mk^2I_{m+1}$$

و أخيراً نجد العلاقة التراجعيّة المطلوبة:

$$\begin{cases} I_{m+1}=\frac{t}{2mk^2(t^2+k^2)^m}+\frac{(2m-1)}{2mk^2}I_m \quad m=1,2,3,........ \\ I_1=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right) \quad k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|}\end{cases}$$

مثال: لنحسب $I=\int \frac{x^2+x+3}{(x^2-1)(x^2+4)}dx$ شكل التفكيك هو: $\frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$

بضرب الطرفين في $(x-1)^2$ وبعد التبسيط ثمّ التعويض بـ: $x=1$ نجد $B=1$

بضرب الطرفين في x^2+4 وبعد التبسيط ثمّ التعويض بـ: $x=2i$ نجد: $2Ci+D=\frac{2i-1}{-5}\Rightarrow C=-\frac{1}{5}, D=\frac{1}{5}$

بضرب الطرفين في x ثم نحسب نهاية الطرفين عند $+\infty$ نجد: $A+C=0\Rightarrow A=-C=\frac{1}{5}$

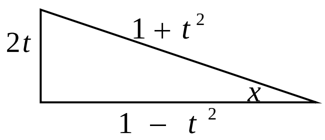
ومنة التفكيك المطلوب هو: $\frac{x^2+x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-1}{5(x^2+4)}$ و بالتّالي:

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{x-1}{x^2+4}dx=\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{10}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}+\frac{1}{10}\int\frac{\frac{dx}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{10}\ln(x^2+4)+\frac{1}{10}\arctan\frac{x}{2}+const$$

و. تكاملات حسابها يؤول إلى حساب تكامل دالة ناطقة: ليكن R كسرًا ناطقًا لمتغير أو متغيرين أو عدة متغيرات.

1. تكامل دالة كسرية من الشكل $R(\cos x,\sin x)$: لحساب التكامل $\int R(\cos x,\sin x)dx$ و في الحالة العامة يمكن اعتماد تبديل المتغير $t=\tan\frac{x}{2}$ ونجد $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$



مثالين:

1) $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$

2) $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}-\int\frac{-dt}{1-t}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

ملاحظة: تغيير المتغيّر السابق فعّال ولكن قد يؤدّي إلى حسابات معقّدة, لذا نستعرض القاعدة التالية.

حالة خاصة: قاعدة بيوش Bioche: بوضع $w(x)=R(\cos x,\sin x)$ و لحساب $\int R(\cos x,\sin x)dx=\int w(x)dx$ نميّز الحالات التالية:

♦ إذا كان: $w(-x)=-w(x)$ نضع: $t=\cos x$ ♦ إذا كان: $w(\pi-x)=-w(x)$ نضع: $t=\sin x$

♦ إذا كان: $w(\pi+x)=w(x)$ نضع: $t=\tan x$

مثال: لحساب $I=\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ نضع $t=\sin x$ لأن $w(\pi-x)=-w(x)$: $I=\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t+c=\arctan(\sin x)+c$

2. تكامل دالة كسرية من الشكل $R(e^{px},e^{qx})$ حيث: $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ لحساب التكامل $\int R(e^{px},e^{qx})dx$ يمكن اعتماد تبديل المتغير $t=e^x$ للحصول على تكامل دالة ناطقة للمتغير t.

مثال: لحساب $I=\int\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$ نضع $t=e^x$ ينتج: $I=\int\frac{dt}{(1+t)^2}=\frac{-1}{t+1}+c=\frac{-1}{e^x+1}+c$

3. تكامل دالة كسرية من الشكل $R(\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)$: لحساب التكامل $\int R(\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)dx$ و في الحالة العامة يمكن اعتماد تبديل المتغير

$t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ لنجد $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ ، $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$ و $\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$

مثال: لحساب $I=\int\frac{dx}{1-\operatorname{sh}x}$ نضع $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ ينتج:

$$I=\int\frac{1-t^2}{1-t^2-2t}\cdot\frac{2dt}{1-t^2}=-\int\frac{2dt}{t^2+2t-1}=-2\int\frac{dt}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+c$$

ملاحظة:

يمكن استخدام المتغير $t=e^x$ لحساب $\int R(\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x)dx$ لكن يعد أكثر صعوبة من استخدام $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

4. حساب تكامل من الشكل: $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: حساب التكامل I يتم بطريقة أولر حسب الحالات التالية:

الحالة1: إذا كان $a>0$: نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(t+x)$

الحالة2: إذا كان x_1 جذرا للمعادلة $ax^2+bx+c=0$: نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$

مثال: لحساب $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ لاحظ أنّ : $-x^2+3x-2=(2-x)(x-1)$ نضع: $\sqrt{(2-x)(x-1)}=t(x-1)$

ومنه $t(x-1)=\frac{t}{1+t^2}\wedge x=\frac{2+t^2}{1+t^2}\Leftrightarrow(2-x)(x-1)=t^2(x-1)^2$ كذلك $dx=\frac{2t(1+t^2)-2t(2+t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$

بعد التعويض عن x ، dx و $t(x-1)=\sqrt{-x^2+3x-2}$ بدلالة t نجد:

$$I=\int\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\arctan(t)+c=-2\arctan\frac{\sqrt{(2-x)(x-1)}}{x-1}+c=-2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+c$$

5. حساب تكامل من الشكل $I=\int x^{\alpha}\left(ax^{\beta}+b\right)^{\gamma}dx$ حيث: α ، β ، γ أعداد ناطقة ، لحساب التكامل I نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان γ عددا صحيحا($\gamma\in\mathbb{Z}$) نضع: $x=t^n$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامي لعددين α,β .

الحالة الثانية: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}\in\mathbb{Z}$ نضع: $ax^{\beta}+b=t^p$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\in\mathbb{Z}$ نضع: $a+bx^{-\beta}=t^p$ حيث p هو مقام العدد الناطق γ .

أمثلة:

1) لحساب $I=\int\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2dx$ لدينا $I=\int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+1)^2dx$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=2$

لدينا $\gamma=2\in\mathbb{Z}$ و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3 هو 6 و بالتالي نضع: $x=t^6$ ومنه

$$I=\int t^3\left(t^2+1\right)^2 6t^5\,dt=6\int\left(t^{12}+2t^{10}+t^8\right)dt=6\left(\frac{1}{13}t^{13}+\frac{2}{11}t^{11}+\frac{1}{9}t^9+c\right)=6\left(\frac{1}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{2}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{1}{9}x^{\frac{9}{6}}+c\right)$$

2) لحساب $I=\int \sqrt[3]{x}\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ لدينا $I=\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}dx$, $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{2}$

لدينا $\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{1/3+1}{1/3}=4\in\mathbb{Z}$ و لدينا مقام العدد γ هو $p=2$ بالتالي نضع: $x^{\frac{1}{3}}+1=t^2$ ومنه نجد $x^{\frac{1}{3}}=t^2-1$ أي:

$x=(t^2-1)^3$ ومنه: $dx=3(t^2-1)^2\,2t\,dt=6t\,(t^2-1)^2\,dt$

$$I=\int t^3\left(t^2+1\right)^2 6t^5\,dt=6\int\left(t^{12}+2t^{10}+t^8\right)dt=6\left(\frac{1}{13}t^{13}+\frac{2}{11}t^{11}+\frac{1}{9}t^9+c\right)=6\left(\frac{1}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{2}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{1}{9}x^{\frac{9}{6}}+c\right)$$