❶ Algèbre Relationnelle

Les LM de données relationnelles

- **Un LMD se compose de :**
  - un ensemble de commandes permettant **d'interroger** une BD
  - un ensemble de commandes permettant de la **modifier** (insertion, suppression, mise a jour, etc.).

➢ En général, la plupart des SGBD propose a l'utilisateur un LMD avec une interface conversationnelle et aussi une possibilité d'intégration de ce LMD dans un langage hôte.

➢ De manière générale, L'algèbre relationnelle consiste à munir le domaine des relations avec **un ensemble d'opérateurs.**

➢ **Cet ensemble contient :**

- **Des opérateurs de base**
- **+ des opérateurs complémentaires qui peuvent s'exprimer en fonction des opérateurs de base** mais qui ont une utilité pratique

• Les opérations de base

Il existe 2 catégories :

1. Les opérations **binaires s'appliquant à 2 relations**
2. Les opérations **unaires s'appliquant à 1 seule relation**

Panorama des opérations binaires

- Panorama des opérations **binaires**

- **L'union de deux relations R et S**

  - R et S ont la même arité i.e. le même nombre de colonnes
  - Notation : R ∪ S ou UNION(R,S)
  - **Résultat : une relation contenant l'ensemble des tuples appartenant a R ou à S ou au deux.**

Remarques

- Les relations R et S **doivent normalement avoir le même schéma** (c.a.d. les mêmes attributs) qui sera dans ce cas le schéma de la relation résultat.
- Si les deux relations n'ont pas la même sémantique **l'union des deux n'a sans doute pas de sens** mais elle peut être calculée.

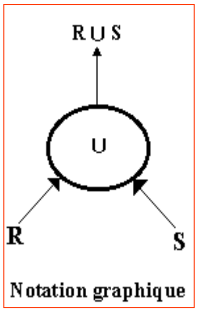
Exemple : Union entre deux relations R et S ayant même schéma

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

Relation R

A	B	C
a1	b1	c1
a4	b4	c4
a5	b5	c5
a2	b2	c2

Relation S



Notation graphique

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3
a4	b4	c4
a5	b5	c5

Relation R ∪ S

- **La différence entre deux relations R et S**

  - R et S ont la même arité i.e. le même nombre de colonnes
  - Notation : R — S ou MINUS(R,S)
  - **Résultat :** une relation contenant l'ensemble des tuples appartenant à R **et n'appartenant pas** à S.

Remarques

- Les relations R et S **doivent normalement avoir le même schéma** (c.a.d. les mêmes attributs) qui sera dans ce cas le schéma de la relation résultat.
- Si les deux relations n'ont pas la même sémantique **la différence n'a sans doute pas de sens** même si on peut la calculer.

Pb : ? Schéma de la relation résultat = celui de R ou de celui de S ou Autre

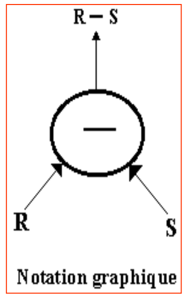
Exemple : Différence entre deux relations R et S ayant même schéma

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

Relation R

A	B	C
a1	b1	c1
a4	b4	c4
a5	b5	c5
a2	b2	c2

Relation S



A	B	C
a3	b3	c3

Relation R-S

Résultat

- Un seul tuple **(a3,b3,c3)** appartient à R et n'appartient pas à S.
- les tuples (a1,b1,c1) et (a2,b2,c2) appartiennent à R mais aussi à S. Donc ils ne doivent pas figurer dans la relation résultat R - S.

La différence n'est pas commutative

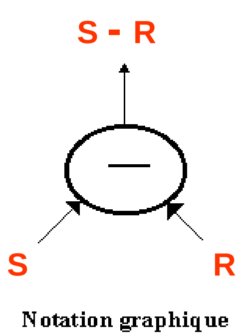
R — S ≠ S — R

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

Relation R

A	B	C
a1	b1	c1
a4	b4	c4
a5	b5	c5
a2	b2	c2

Relation S



?

Résultat

- **Produit Cartésien de deux relations R et S**

  - R et S ont des **schémas quelconques**
  - Notation : R **X** S ou PRODUCT (R,S)
  - **Résultat :**
    - une relation ayant pour attributs la **concaténation** des attributs de R et de S
    - et contenant tous les tuples obtenus par **concaténation** d'un tuple de R a un tuple de S.

Le calcul du produit cartésien impose que les attributs de R et de S n'aient pas de nom commun même s'ils ont le même domaine.

Exemple : Produit cartésien entre 2 relations R et S

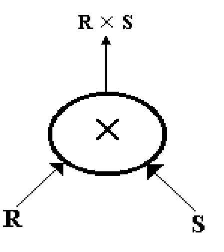
- Le produit cartésien des relations **R** et **S** utilisées dans l'exemple de l'union **ne peut se faire que si on donne aux attributs de S (A,B et C) des noms qui seront distincts de ceux de R** (car R a aussi des attributs ayant les mêmes noms A, B et C).
- Si on renomme dans S la colonne A par **D**, la colonne B par **E** et la colonne C par **F**, on aura :

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

Relation R

D	E	F
a1	b1	c1
a4	b4	c4
a5	b5	c5
a2	b2	c2

Relation S



Notation graphique

• Le résultat sera une nouvelle relation ayant pour schéma et pour extension :

A	B	C	D	E	F
a1	b1	c1	a1	b1	c1
a1	b1	c1	a4	b4	c4
a1	b1	c1	a5	b5	c5
a1	b1	c1	a2	b2	c2
a2	b2	c2	a1	b1	c1
a2	b2	c2	a4	b4	c4
a2	b2	c2	a5	b5	c5
a2	b2	c2	a2	b2	c2
a3	b3	c3	a1	b1	c1
a3	b3	c3	a4	b4	c4
a3	b3	c3	a5	b5	c5
a3	b3	c3	a2	b2	c2

Relation R x S

• Si le nombre de tuples de R est **n** et le nombre de tuples de S est **m** alors la relation R x S contiendra **n*m** tuples

• dans l'exemple R x S contient 12 tuples puisque R contient 3 tuples et S en contient 4.

Le Produit cartésien est-il commutatif ou non ?

R x S ≠ S x R

ou **R x S = S x R**

Panorama des opérations unaires

- Il existe **2** opérations unaires appelées **PROJECTION** et **SELECTION** (ou **RESTRICTION**).
- **Ces opérations consistent respectivement à :**
  - Eliminer des colonnes (**PROJECTION**) dans une relation

ou

  - Eliminer de lignes (**SELECTION**) dans une relation.

La combinaison de ces deux opérations avec les opérations binaires permet de générer toutes les opérations de l'algèbre relationnelle.

- **Projection d'une relation ayant pour schéma R(A1,A2,….An)**

> **Notation :** Π Ai1,Ai2,….Aip (R) ou PROEJECT Ai1,Ai2,….Aip (R)

❖ Résultat :

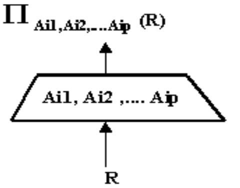
- une relation R' ayant pour schéma R'(Ai1,Ai2,….Aip)
- **Contenant les tuples obtenus par élimination des valeurs des attributs de R n'appartenant pas a R' (c.a.d. à Ai1,Ai2,….Aip) et par suppression des tuples en double de la relation résultat (c.a.d. de R').**

Exemple : Projection R' = Π A , C (R)

- **R' = Π A , C (R)** aura pour schéma **R'(A,C)**
- On élimine les valeurs des attributs B (la colonne B de la relation R) car l'attribut B n'appartient pas a R')
- et pour extension

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a3	b3	c3

Relation R



Notation Graphique

A	C
a1	c1
a2	c2
a3	c3

résultat : R' (A,C)

- **Sélection ou Restriction dans une relation ayant pour schéma R(A1,A2,....An)**

  - Consiste à éliminer tous les tuples (les lignes) dont les attributs ne vérifient pas une condition ***c*** spécifiée.
  - **Notation :** σ_c ou SELECT c (R)
  - **Résultat :**
    - **une relation R' de même schéma que R**
    - Contenant tous les tuples de R **qui satisfont la condition *c*.**

- **La condition *c* spécifiée**

  est une expression faisant intervenir :

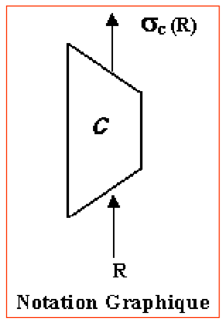
  - **des opérandes (constantes ou des noms d'attributs)**
  - **des opérateurs arithmétiques de comparaison (≤ , ≠ , < , = , > , ≥)**
  - **des opérateurs logiques (ET,OU,NON)**

Exemple : R'= SELECT "prix ≤ 500 ET qte ≥ 20" (PRODUIT)

- La relation **PRODUIT** a pour schéma **PRODUIT (NOM_PRODUIT,PRIX,QTE)**
- La condition ***C*** est donc : **"prix ≤ 500 ET qte ≥ 20"**

NOM_PRODUIT	PRIX	QTE
BOULONS	10	100
VIS	15	50
CHAISE	500	10
TABLE	1000	20

Extension de la relation PRODUIT



Résultat

NOM_PRODUIT	PRIX	QTE
VIS	15	50
BOULONS	10	100

σ_c (PRODUIT)

Remarque

- Si on avait comme condition ***C* : *"prix < 10 ET qte ≥ 20"***
- le résultat serait une relation vide (ne contenant aucun tuple) car aucun tuple de la relation PRODUIT ne vérifie cette condition.

NOM_PRODUIT	PRIX	QTE

Résultat : une relation vide

Opérations complémentaires

- **Les opérations de base** permettent d'exprimer toutes les questions qu'on veut poser à une BDR. **ELLES forment un ensemble cohérent et minimal.**
- Dans la pratique on dispose aussi **d'opérations dites complémentaires** qui ne modifient pas l'algèbre ⇒ **on peut les obtenir a partir des opérations de base**
  - ☝ **MAIS ELLES sont très utiles pour la réalisation pratique d'un SGBD relationnel.**

Par Exemple :

- Le produit cartésien est très coûteux en temps machine et en espace ⇒ **On préfère réaliser une autre opération similaire mais plus restrictive qu'on appelle la jointure.**

La Jointure entre deux relations R et S

La Jointure entre deux relations R et S

- **On distingue différents types de JOINTURE**

1. La jointure selon une condition (ou une qualification)

- Une condition **C** comparant des attributs de R à ceux de S
- Notation : **JOIN** $_C$ **(R,S)** ou $R \bowtie_{C} S$

Résultat :

une relation de schéma égal a **l'union des schémas** de R et de S

contenant l'ensemble des tuples du produit cartésien **R x S** satisfaisant la qualification **C**.

Exemple : Jointure selon une condition entre 2 relations R et S

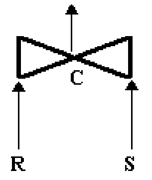
Le résultat de la jointure de R et de S selon la condition **c** : **" C ≤ D"**
Donnera pour Résultat : une relation **R'** de schéma **R'(A,B,C,D,E)**

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Relation R

D	E
4	1
6	2

Relation S



Notation graphique

Relation R'

A	B	C	D	E
1	2	3	4	1
1	2	3	6	2
4	5	6	6	2

- La forme la plus courante de la qualification **C** est : **A θ B** ou A est un attribut de R et B un attribut de S et θ un opérateur de comparaison (≤ , ≠ , < , = , > , ≥).

- Dans le cas ou l'opérateur **θ** est l'opérateur d'égalité (=) la jointure s'appelle une **EQUIJOINTURE**.

- Dans le cas contraire on dit aussi une **θ-JOINTURE**.

La jointure étant une opération complémentaire :

Elle peut être exprimée à l'aide des opérations de base :

SELECTION et PRODUIT CARTESIEN

➢ **En effet on a :**

$$\mathbf{JOIN}_{\,c}\,(R,S) = \mathbf{SELECT}_{\,c}\,(R \times S)$$

Ce qui revient à :

- **Calculer le produit cartésien R x S**
- **Appliquer une opération de sélection selon la condition c à la relation résultant du produit cartésien**

La JOINTURE Naturelle entre deux relations R et S

- **R et S ont des schémas non disjoints** (R et S ont des attributs de même noms)

➢ Notation : **JOIN (R,S)** ou $R \bowtie S$

❖ **Résultat :**

- une relation de schéma **égal a l'union des schémas de R et de S**
- contenant tous les tuples obtenus par **EQUIJOINTURE** de **R** et de **S** sur tous les attributs ayant le même nom dans R et S suivie d'une **PROJECTION** qui permet de conserver un seul de ces attributs égaux de même nom.

Exemple : Jointure Naturelle entre 2 relations R et S

En supposant que **A1,A2,......Ak** sont les noms d'attributs apparaissant dans les deux relations R et S, **la condition c** qui sera utilisée dans **l'équijointure** sera de la forme :

R.A1=S.A1 Λ R.A2=S.A2 Λ...... Λ R.Ak=S.Ak

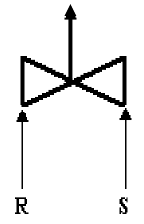
❖ **Soient les 2 relations suivantes**

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b1	c1
a3	b3	c3

Relation R

B	C	D
b1	c1	d1
b1	c1	d2
b3	c3	d3

Relation S



Notation graphique

La jointure naturelle de R et S sera une relation **R'** ayant pour schéma :

R' [(A,B,C) ∪ (B,C,D)] c.a.d. **R'(A,B,C,D)**

Les attributs de même noms dans R et S sont B et C.

Donc **la condition c** pour réaliser **l'equijointure** sera :

R.B = S.B Λ R.C = S.C .

Le résultat de la jointure naturelle de R et S

Relation R' = JOIN (R,S)

A	B	C	D
a1	b1	c1	d1
a1	b1	c1	d2
a2	b1	c1	d1
a2	b1	c1	d2
a3	b3	c3	d3

La Jointure Naturelle étant une opération complémentaire, **Elle peut être exprimée à l'aide des opérations de base :**

SELECTION , PROJECTION et PRODUIT CARTESIEN

- **En effet on a :**

- JOIN (R,S) = PROJECT $_V$ (SELECT $_C$ (R x S))

ou **v** est égal l'union des attributs de R et des attributs de S n'appartenant pas à R.

- Le calcul de la jointure naturelle passe donc par les étapes intermédiaires suivantes :

1. **Calcul de la relation R1 = R x S**
2. **Calcul de la relation R2 = SELECT $_C$ (R1) avec la condition c :**

$$(R.B = S.B \land R.C = S.C)$$

3. **Calcul de la relation R3 = $\Pi_{A, B, C, D}$ (R2) qui sera le résultat final**

$\Rightarrow$ JOIN (R,S) = $\Pi_{A, B, C, D}$ (SELECT $_C$ (R x S))

La SEMI-JOINTURE entre deux relations R et S

- *C'est une opération dérivée de la jointure.*
- **Consiste à faire une jointure entre R et S puis de projeter la relation obtenue sur les attributs de la relation R (on ne garde que les attributs de R)**
- R et S ont des schémas quelconques (peuvent être disjoints)

> Notation : **JOIN**$_c$ **(R,S)** ou **R** $\ltimes_c$ **S**

❖ Résultat :

- **une relation de même schéma que R**
- **contenant l'ensemble des tuples de R participant à la jointure de R et de S selon la condition c.**

Exemple : Semi-Jointure entre 2 relations R et S

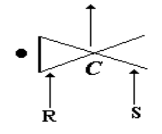
- La semi-jointure de R et S selon la condition C : "C ≤ D "

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Relation R

D	E
4	1
6	2

Relation S



Notation graphique

❖ 1) une jointure de R et S selon la condition C

❖ 2) une projection de la relation résultant de cette jointure sur les attributs (A,B,C) qui sont les attributs de R

Ce qui donnera :

1) La jointure de R et S selon la condition **C** : **"C ≤ D "** donnera :

A	B	C	D	E
1	2	3	4	1
1	2	3	6	2
4	5	6	6	2

2) la projection du résultat sur les attributs (A,B,C) qui donnera come résultat final

A	B	C
1	2	3
4	5	6

$\Pi_{A,B,C}$ (JOIN $_{"C \leq D"}$ (R,S))

L'intersection entre deux relations R et S

Intersection entre deux relations R et S

L'**INTERSECTION** de deux relations R et S **de même schéma est une relation** :

- ayant même schéma que R et S
- contenant les tuples qui appartiennent à R et à S **en même temps.**

➤ **Notation** : R ∩ S ou ou INTERSECT(R,S)

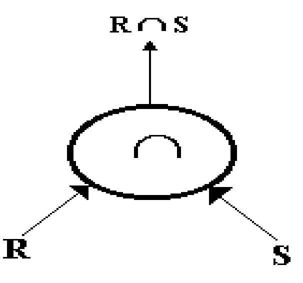
Exemple : L'intersection entre les relations R et S

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b3	c2
a2	b2	c1
a3	b3	c3

Relation R

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c2
a2	b2	c1

Relation S



Notation graphique

A	B	C
a1	b1	c1
a2	b2	c1

Relation R ∩ S

Résultat

L'opération INTERSECTION étant complémentaire peut s'obtenir a partir de l'opération de base DIFFERENCE à l'aide de l'une des deux formules suivantes :

a) $R \cap S = R - (R - S)$

b) $R \cap S = S - (S - R)$

En effet si on pose : $R = R_{+S} \cup R_{-S}$ **où**

- R_{+S} représente l'ensemble des tuples de R **appartenant aussi à** S

et

- R_{-S} représente l'ensemble des tuples de R **n'appartenant pas à** S.

Et si on pose : $S = S_{+R} \cup S_{-R}$ **où**

- S_{+R} représente l'ensemble des tuples de S **appartenant aussi à R**

et

- S_{-R} représente l'ensemble des tuples de S **n'appartenant pas à R.**

☞ **on remarque que :**

Les deux ensembles S_{+R} et R_{+S} sont égaux

Par définition de l'opération **DIFFERENCE** on a aussi :

- $R - S = R_{-S}$ (l'ensemble des tuples de R n'appartenant pas à S)

et

- $S - R = S_{-R}$ (l'ensemble des tuples de S n'appartenant pas à R)

On peut alors écrire d'après a) $R \cap S = R - (R - S)$

que :

$R \cap S = R_{+S} \cup R_{-S} - (R_{-S}) = R_{+S}$

Et on sait que R_{+S} représente l'ensemble des tuples de R appartenant aussi à S

C'est donc bien la définition de l'opération $R \cap S$

On peut écrire aussi d'après b) $R \cap S = S - (S - R)$

que :

$$R \cap S = S_{+R} \cup S_{-R} - (S_{-R}) = S_{+R}$$

Et sachant que S_{+R} représente l'ensemble des tuples de S appartenant aussi à R

Ceci n'est autre que la définition de l'opération $R \cap S$