سلسلة تمارين رقم 02

التطبيقات الخطية والمصفوفات

مقياس الجبر02

لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي

التمرين الثاني:

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق معرف بـ: $f(x,y,z)=(-2x+y+z, x-2y+z)$.

1) إثبات أن f تطبيق خطي ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z')$ شعاعان من $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
&\alpha f(u)+\beta f(v)\\
&\quad = \alpha(-2x+y+z, x-2y+z)+\beta(-2x'+y'+z', x'-2y'+z')\\
&\quad = (-2\alpha x+\alpha y+\alpha z, \alpha x-2\alpha y+\alpha z)\\
&\quad + (-2\beta x'+\beta y'+\beta z', \beta x'-2\beta y'+\beta z')\\
&\quad = (-2(\alpha x+\beta x')+\alpha y+\beta y'+\alpha z+\beta z', \alpha x+\beta x'\\
&\quad - 2(\alpha y+\beta y')+\alpha z+\beta z') = f[\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z'\ ]\\
&\quad = f(\alpha u+\beta v)
\end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي.

2) نعلم أن $\ker f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; f(x,y,z)=(0,0)\ \}$

$$; f(x,y,z)=(0,0) \Leftrightarrow -2x+y+z=0 \wedge x-2y+z=0 \Leftrightarrow x=y=z$$

ومنه $\ker f=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{R}\ \}=\langle e=(1.1.1)\rangle$ أي أن $\{e\}$ هو جزء مولد ومستقل خطيا (لأن $e\neq(0,0,0)$) وبالتالي فهو يشكل أساسا للفضاء الشعاعي الجزئي $\ker f$ وعليه $\dim kerf=1$.

بما أن : $dimImf+\dim kerf=\dim\mathbb{R}^3=3$ فإن $dimImf=2$.

3) لدينا Imf فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ بحيث $dimImf=2$ ومنه $Imf=\mathbb{R}^2$

إذا $\{(1,0),(0,1)\ \}$ هو أساس له.

التمرين الثالث:

1) تعيين التطبيق الخطي f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(xe_1+ye_2) = xf(e_1)+yf(e_2) \\ &= x(2\tau_1+\tau_3)+y(\tau_2-\tau_1) = (2x-y)\tau_1 + y\tau_2 + x\tau_3 \\ &= (2x-y,y,x) \end{aligned}$$

2) بما أن $(2x-y,y,x) = x(2,0,1)+y(-1,1,0)$ ومنه
$Imf = \langle (2,0,1),(-1,1,0)\rangle$ ومنه فهو ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$ مولد بشعاعين مستقلين خطيا
ومنه $dimImf = rang(f) = 2$.

التمرين الرابع:

ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $f(x,y) = \big(x-y,-3(x-y)\big)$.

1) إثبات أن f تطبيق خطي ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $u=(x,y)$, $v=(x',y')$ شعاعان من $\mathbb{R}^2$
باستخدام تعريف الجمع الداخلي في $\mathbb{R}^2$ وتعريف التطبيق f نجد

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x',y+y') \\ &= [(x+x')-(y+y'),-3(x+x')+3(y+y')] \\ &= [(x-y)+(x'-y'),-3(x-y)-3(x'-y')] \\ &= \big(x-y,-3(x-y)\big)+\big(x'-y',-3(x'-y')\big) \\ &= f(x,y)+f(x',y') = f(u)+f(v) \end{aligned}$$

وباستخدام الضرب الخارجي وتعريف التطبيق نجد

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha x,\alpha y) = \big(\alpha x-\alpha y,-3(\alpha x-\alpha y)\big) = \alpha\big(x-y,-3(x-y)\big) \\ &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي .

2) f تطبيق غير متباين لأن : $f(6,4) = f(7,5) \wedge (6,4) \neq (7,7)$. وليس غامرا لأن
$(5,3)$ ليس له سابقة $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ بالتطبيق f حيث أن الجملة

$-3(x-y) = 3 \wedge x-y = 5$ مستحيلة الحل.

3) $(x,y) \in \ker f \Leftrightarrow -3(x-y) = 0 \wedge x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$ ومنه

$$\ker f = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1)\rangle$$

وبما أن $(1,1) \neq (0,0)$ فإن $\{(1,1)\}$ جزء مولد لـ $\ker f$ ومستقل خطيا فهو أساس له

إذا $\dim kerf = 1$.

لدينا من جهة أخرى $dimImf + \dim kerf = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

ومنه $dimImf = rang(f) = 1$

هذه النتيجة الأخيرة تبين أن التطبيق ليس متباينا لأن $\dim kerf \neq 0$ وليس غامرا لأن $rang(f) \neq 2$.

التمرين الخامس :

1) تعيين التطبيق الخطي f انطلاقا من معرفة صور عناصر أساس فضاء البداية

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xv_1+yv_2+zv_3) = xf(v_1)+yf(v_2)+zf(v_3) \\ &= x(v_1+v_2)+y(v_1-v_2)+z(v_1-\mu v_3) \\ &= (x+y+z)v_1+(x-y)v_2-\mu z v_3 \\ &= (x+y+z, x-y, -\mu z) \end{aligned}$$

2) $(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow x+y+z=0 \wedge x-y=0 \wedge -\mu z=0$

إذا كان $\mu \neq 0$ فإن $\ker f = \{(0,0,0)\}$ ومنه يكون التطبيق متباينا في حالة $\mu \neq 0$.

ويكون كذلك غامرا لأن : $dimImf = rang(f) = 3-0=3$

التمرين 6 :

a) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=$؟ لا يمكن الجمع لأن المصفوفتين ليستا من نفس الرتبة .

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ لا يمكن الجمع لأن المصفوفتين ليستا من نفس الرتبة

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+1\times1 & 2\times(-1)+1\times1 \\ 3\times1+2\times1 & 3\times(-1)+2\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+(-2)\times(-1)+3\times3 & 1\times2+(-2)\times0+3\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$ (g

التمرين 07:

حساب A^2 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A+2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^2$$

نعلم أن المجموعة M_3 للمصفوفات المربعة من الرتبة 3 المزودة على الترتيب بعمليتي جمع وضرب المصفوفات الداخليتين لها بنية حلقة واحدية غير تبديلية ومنه

$$A^2 = A + 2I_3 \Leftrightarrow A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{A-I_3}{2}\right) = \left(\frac{A-I_3}{2}\right)A = I_3$$

ومنه المصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة :

$$\frac{A-I_3}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

التمرين 8:

لدينا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 14 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

ومنه : $A^3 - A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 14 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 12 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

نلاحظ أن : $A^3 - A = 2\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 2\left(A^2 + I_3\right)$ وبالتالي $A^3 - 2A^2 - A = 2I_3$ بنفس الطريقة

المتبعة في التمرين السابق نستنتج أن $A\left(\frac{A^2 - 2A - I_3}{2}\right) = \left(\frac{A^2 - 2A - I_3}{2}\right)A = I_3$ وهو ما يبين أن A

قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة

$$\frac{A^2 - 2A - I_3}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

التمرين 09:

حساب المحددات للمصفوفات التالية بطرق مختلفة

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - (-1)\times 2 = -1 + 2 = 1$ (استخدمنا تعريف محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 2)

b) نستخدم قاعدة ساريس وهي طريقة تعطينا محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 3(نعيد كتابة العمودين الأول والثاني أمام المصفوفة)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1\times1\times1 + (-1)\times(-2)\times 2 + 3\times 0\times 0 - 3\times 1\times 2 - 1\times(-2)\times 0 - (-1)\times 0\times 1 = 1 + 4 + 0 - 6 - 0 - 0 = -1$$

c) مصفوفة مثلثية عليا محددها يساوي جداء عناصر قطرها أي $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1 = 1$

d) لا يتغير محدد مصفوفة إذا أضفنا لأحد الصفوف عبارة خطية للصفوف الأخرى لذلك نستبدل السطر الأول من هذه المصفوفة بمجموع الصفوف الثلاثة ثم ننشر المحدد الناتج وفق السطر الأول الجديد فنجد

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \overset{L_1 \to L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & b+a+c & c+b+a \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\left[1\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix}\right]$$

$$= (a+b+c)\left(a^2 - bc - ca + b^2 + c^2 - ab\right) = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$$

<u>التمرين 10</u>:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$ (استبدلنا العمود الثاني

ونشرنا وفق العمود الثاني الجديد).

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \times 0 = 0$

إذا وجد في مصفوفة سطران أو عمودان مرتبطان خطيا فمحددها معدوم.

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_4 \to L_4 + 2L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_4 \to C_4 - 7C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -16 \\ -2 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_4 \to L_4 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -16 \\ -2 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$4\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4(-1)\left(5\times 2 - (-3)\times(-3)\right) = -4$$

<u>التمرين 11:</u>

تكون الأشعة v_1, v_2, v_3 مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان $det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$

لدينا

$$\det(v_1,v_2,v_3)=\begin{vmatrix}\alpha & -1 & -1\\ -1 & \alpha & -1\\ -1 & -1 & \alpha\end{vmatrix}\overset{L_3\to L_3-L_2}{=}\begin{vmatrix}\alpha & -1 & -1\\ -1 & \alpha & -1\\ 0 & -(1+\alpha) & 1+\alpha\end{vmatrix}$$

$$=(1+\alpha)\begin{vmatrix}\alpha & -1 & -1\\ -1 & \alpha & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\overset{C_2\to C_2+C_3}{=}(1+\alpha)\begin{vmatrix}\alpha & -2 & -1\\ -1 & \alpha-1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1+\alpha)\begin{vmatrix}\alpha & -2\\ -1 & \alpha-1\end{vmatrix}$$

$$=(1+\alpha)\left[\alpha(\alpha-1)-2\right]=(1+\alpha)\left[\alpha^2-\alpha-2\right]=(1+\alpha)^2(\alpha-2)$$

ومنه تكون الأشعة v_1,v_2,v_3 مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان $\alpha\in\mathbb{R}-\{-1,2\}$.