جامعة الشهيد حمه لخضر- الـــــوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات والاعلام الآلي

التحليل العددي المصفوفي

دروس وتمارين محلولة

الأستـــــاذ:

✓ بقـــاص محمـــد

الموسم الدراسي : 2023/2022

مقدمة عامة

علم التحليل العددي يختلف على تعريفه الكثير، ولكن الأغلبية يتفقون على أنه علم استخدام الخوارزميات العددية للحصول على حلول تقريبية للمسائل الحسابية المعقدة، على العكس من الحلول التحليلية التي تعطى حلولا صحيحة تامة وغير تقريبية.
لذلك فإن الهدف العام من علم التحليل العددي هو تصميم خوارزميات – طرق- تقريبية لحل المسائل الصعبة التي يصعب حلها يدويا مثل أن تجد حلا لألف من المعادلات في ألف من المجاهيل أو تحسب معكوس مصفوفة مربعة من ألف صف وألف عمود مثلا.
على الرغم من امتداد أصول التحليل العددي في التاريخ إلا أن الطفرة التي حدثت في الحاسبات في نهاية القرن الماضي كان لها أكبر الأثر في استخدام هذا العلم في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية والطبية والحيوية وشتى نواحي العلوم التي نعرفها هذه الأيام.
هذه الطفرة التي نعيشها الآن لن تمنعنا من إلقاء نظرة سريعة على تاريخ هذا العلم وبالذات على تاريخ كلمة خوارزم – $Algorithm$ - التي لا تخلو صفحة تقريبا من صفحات أي كتاب في التحليل العددي من ذكرها ومفهوم الخوارزميات هو :
خطوات حسابية منظمة تعطى في عدد محدد من الخطوات إجابة لسؤال أو حلا لمشكلة.

هذا المؤلف يتضمن التحليل العددي المصفوفي والحل العددي للمعادلات التفاضلية وهو مقسم حسب الفصول التالية

- **الفصل الاول** بعد إجراء مراجعة عامة حول المفاهيم الاساسية للمصفوفات يتم التطرق للطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية.
- **الفصل الثاني** و يتضمن هذا الفصل الطرق التكرارية أو غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية.
- **الفصل الثالث** تم بحث مسألة الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام طرق التحليل العددي.
- **ملحق ماتلاب** ويتضمن برامج ماتلاب لحل جمل المعادلات الخطية من خلال الطرق المباشرة وغير المباشرة التي تم التعرض لها إضافة الي برنامج حل المعادلات التفاضلية العادية.

المحتويات

مراجعة حول المصفوفات

I. مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل العمليات التي يتم إجراؤها على المصفوفات او المحددات إضافة الى تعريف بعض المصفوفات الخاصة.

مما يسهل علينا التعامل مع الطرق المباشرة او التكرارية لحل جمل معادلات خطية كون المصفوفات تلعب دورا رئيسيا في هذ العملية.

II. مفاهيم أساسية:

1- تعريف المصفوفة

كل تطبيق خطي l معرف من الفضاء الشعاعي E وبعده n نحو الفضاء الشعاعي F وبعده m يمكن ان يمثل بواسطة جدول مستطيل A مكون من n سطر و m عمود، على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & & & \ddots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

نسمي A: المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي l .

وتكتب :

$$A = \left(a_{i,j}\right) \ : \quad \begin{cases} 1 \le i \ \le \ n \\ 1 \le j \ \le \ m \end{cases}$$

$a_{i,j}$: يمثل العنصر ذو الرتبة i بالنسبة للأسطر وذو الرتبة j بالنسبة للأعمدة.

- اذا كانت : m=n

A تسمى مصفوفة مربعة.

- اذا كانت : n=1

نحصل على سطر شعاع : $A = [a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots\cdots \quad a_{1m}]$

- اذا كانت : m=1

نحصل على عمود شعاع : $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$

2- العمليات على المصفوفات:

ستقدم على شكل تمرين للمراجعة في التمارين المقترحة لهذا الفصل.

3- بعض الخواص الأساسية:

لتكن $A\left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة $1 \leq i,j \leq n$

أ- المصفوفة A متناظرة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall_{i,j} \;:\; 1 \leq i,j \leq n \;:\; a_{i,j} = a_{j,i}$$

ب- منقول المصفوفة A ورمزها A^t حيث :

$$A^t = \left(a_{j,i}\right)$$

نتيجة : اذا كانت A مصفوفة متناظرة، فإن: $\mathbf{A^t = A}$

ت- المصفوفة العكسية للمصفوفة A ورمزها A^{-1} بحيث : $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

ث- تكون المصفوفة A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad : \; X \neq 0 \;:\; X^t\,AX > 0$$

اذا كانت : $X^t\,AX \geq 0$ فإن المصفوفة A في هذه الحالة موجبة لكن غير معرفة.

ج- تكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر بالنسبة للأسطر والاعمدة اذا تحقق :

$$\left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \quad \forall_{i,j}$$

اذا كانت العلاقة $(>)$ نقول ان A ذات قطر مسيطر تماما .

4- المصفوفات المثلثية والقطرية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} ;\; B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ;\; C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A : مصفوفة قطرية

B : مصفوفة مثلثية سفلية

C : مصفوفة مثلثية علوية

5- المحددات:

نرمز للمحدد مصفوفة بالرمز : det A أو $|A|$ المحدد هو عبارة عن ثابت متغير في الكثير من التطبيقات وخاصة في حل جمل المعادلات الخطية.

بالنسبة للمصفوفة المربعة $A(2 \times 2)$ حيث :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad |A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بالنسبة للمصفوفة المربعة الثلاثية $A(3 \times 3)$ يمكن حساب محددها عن طريق تكرار أول عمودين كما يلي :

$$A=\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right]$$

حيث :

$$|A| = \det A = (a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \quad a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32}) - (a_{31} \quad a_{22} \quad a_{13} + \quad a_{32} \quad a_{23} \quad a_{11} + \quad a_{33} \quad a_{22} \quad a_{12})$$

حساب المحدد باستعمال المحددات المساعدة:

$$|A| = \det A = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يمكن اختيار أي سطر او عمود حسب سهولة الحساب.

6- القيم الذاتية والاشعة الذاتية:

لتكن : $y = AX$ حيث :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \; ; \; A(n \times n) \, ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

نضع : $y = \lambda X$

نجد : $(y = \lambda X = AX) \leftrightarrow (A - \lambda I)\, X = 0$

فنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة.

الجملة $(A - \lambda I)\, X = 0$ اذا وفقط اذا كان :

$$\det(A-\lambda I)=0$$

- هذه المعادلة تسمى : المعادلة المميزة.
- جذور هذه المعادلة تسمى القيم الذاتية لـ A.
- الاشعة التي تمثل حلول الجملة تسمى :

الاشعة الذاتية لـ A وكل قيمة ذاتية مرفقة بشعاع ذاتي.

- **الشعاع الطيفي :**

نرمز للشعاع الطيفي للمصفوفة A بالرمز $\rho(A)$ حيث : $\rho(A)=max|\lambda_i|: 1\le i\le n$

λ_i : القيم الذاتية لـ A :

ملاحظة:

الشعاع الطيفي يلعب دورا هاما في معرفة تقارب الطرق التكرارية.

7- النظيم المصفوفي :

سوف نذكر ثلاث نظيمات :

$$A=\left(a_{i,j}\right) \qquad 1\le i,j\le n$$

1) $\|A\|_1=\max_j\sum_i\left|a_{i,j}\right|$

2) $\|A\|_\infty=\max_i\sum_j\left|a_{i,j}\right|$

3) $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^tA)}$

الفصل الأول: الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

مقدمة

الكثير من التطبيقات يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية وعندما يكون عدد هذه المعادلات صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات.

أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى العشرات أو المئات فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق التكرارية لحل جملة المعادلات الخطية هذه الطرق سنتعرض لها في الفصل الموالي.

توجد نظم المعادلات الخطية في الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، والجوامد المرنة، والتدفق الحرارى، والمجالات الكهرومغناطيسية والدوائر الكهربائية وغيرها الكثير .

تعتمد الطرق المباشرة على تحويل مجموعة المعادلات المعطاة إلى مجموعة أخرى من المعادلات التي يسهل حلها كما سنرى.

هذا التحويل يتم عن طريق إجراء بعض العمليات الأولية على مصفوفة المعاملات وهذه العمليات ليس لها أي تأثير على محددة هذه المصفوفة ولذلك فهي لن تؤثر على الحل النهائي و هي:

1 - تبديل معادلتين بين بعضهما البعض.

2 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر.

3 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر ثم طرحها من معادلة أخرى.

4- تفكيك مصفوفة المعاملات الى جداء مصفوفتين مثلثيتين .

وهذه العمليات كلها سنستخدمها في هذه الطرق المباشرة لحل جمل المعادلات.

تذكير:

لحل جملة معادلات خطية تعرضنا سابقا لطريقة كرامر والمصفوفة العكوس. سيتم التطرق لهما في الاعمال الموجهة أما في هذا الفصل فسوف نتعرض للطرق التالية:

1- طريقة غوص للحذف

2- طريقة التفكيك : LU

3- طريقة شوليسكي

1) طريقة غوص:

تعتمد طريقة غوص على تبديلات تخص الجملة الخطية (AX = b) بحيث يتم في كل مرة حذف متغير من معادلة الى ان نصل الى جملة خطية تتحول من خلالها A الى مصفوفة علوية او سفلية ثم يتم استنتاج الحلول بالتعويض.

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\;x_2 + a_{13}\,x_3 \;+\; a_{14}\,x_4 = \;\; y_1\;(1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\;x_2 + a_{23}\,x_3 \;+\; a_{24}\,x_4 = \;\; y_2\;(2) \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\;x_2 + a_{33}\,x_3 \;+\; a_{34}\,x_4 = \;\; y_3\;(3) \\ a_{41}\,x_1 + a_{42}\;x_2 + a_{43}\,x_3 \;+\; a_{44}\,x_4 = \;\; y_4\;(4) \end{cases}$$

المرحلة الأولى: (الحذف)

أ- $a_{11} \neq 0$: نقوم بقسمة المعادلة (1) على a_{11} .

فنحصل على:

$$(1) : x_1 + a_{12}^1\,x2 + a_{13}^1\,x3 + a_{14}^1\,x4 = y1$$

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} / a_{11} \quad ; \quad y_1^1 = y_1/a_{11} \quad j=1,2,3,4$$

ثم نقوم بحذف المتغير x1 من المعادلات (2)، (3)، و (4) نجد:

$$(S^2)\begin{cases} x_1 \;+\; a_{12}^1\,x_2 \;+ a_{13}^1\,x_3 \;+\; a_{14}^1\,x_4 \;=\; y_1^1 \;\;(1^1) \\ 0 + \;a_{22}^1\,x_2 \;+\; a_{23}^1\,x_3 \;+\; a_{24}^1\,x_4 \;=\; y_2^1 \;\;(2^1) \\ 0 \;+\; a_{32}^1\,x_2 \;+\; a_{33}^1\,x_3 \;+\; a_{34}^1\,x_4 = \;\; y_3^1\;(3^1) \\ 0 \;+\; a_{42}^1\,x_2 \;+\; a_{43}^1\,x_3 \;+\; a_{44}^1\,x_4 \;=\; y_4^1 \;\;(4^1) \end{cases}$$

حيث:

$$a_{i,j}^1 = \; a_{i,j} \;\; / \;\; a_{i,1}\;\; a_{i,j}^1 \qquad\qquad 2 < i \leq 4$$

$$y_1^1 = \; y_i \;\; / \;\; a_{i,1}\; y_1^1 \qquad\qquad 2 < j \leq 4$$

ب- نكرر نفس العملية مع الشطر الثاني بالقسمة على (a_{22}^1) على اعتبار أن: ($a_{22}^1 \neq 0$)

فنحصل على:

$$(2^2) \;\; : \; x_2 + a_{23}^2\,x_3 + a_{24}^2\,x_4 = y_2^2$$

حيث:

$$a_{2,j}^1 = \; a_{2,j}^1 \; / \; a_{22}^1 \qquad\qquad j=3,4$$

$$y_2^2 = \; y_2^1 \; / \; a_{22}^1$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من المعادلات (3^1) و (4^1) نجد :

$$(S^2)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1 \; (1^1) \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2 \; (2^2) \\ 0 + 0 + a_{33}^2\, x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^2 \; (3^2) \\ 0 + 0 + a_{43}^2\, x_3 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^2 \; (4^2) \end{cases}$$

ج- نعتبر أن $(a_{33}^2 \neq 0)$ ونقوم بعملية القسيمة كما سبق المعادلة (3^2) تصبح من الشكل :

$$(3^3) \;:\; x_3 + a_{34}^3\, x_4 = y_3^3$$

حيث:

$$a_{3,j}^3 = a_{3,j}^2 \,/\, a_{33}^2 \qquad j = 4$$

$$y_3^3 = y_3^2 \,/\, a_{33}^2$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_3 من السطر الرابع فنجد :

$$(S^3)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1 \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2 \\ 0 + 0 + x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^3 \\ 0 + 0 + 0 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^4 \end{cases}$$

د- نقوم بقسمة السطر الرابع على (a_{44}^3) على اعتبار ان $(a_{44}^3 \neq 0)$ فنحصل على :

$$y_4^4 = y_4^3 \,/\, a_{44}^3$$

$$a_{44}^4 = 1$$

أخيرا نحصل على شكل مصفوفي بمصفوفة مثلثية يسهل حلها بالتراجع : AX = b

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^2 \\ y_3^3 \\ y_4^4 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض):

$$x_4 = y_4^4$$

$$x_3 = y_3^3 - a_{34}^3\, x_4$$

$$x_2 = y_2^2 - a_{23}^2\, x_3 - a_{24}^2\, x_4$$

$$x_1 = y_1^1 - a_{12}^1\, x_2 - a_{13}^1\, x_3 - a_{14}^1\, x_4$$

مثال:

حل الجملة التالية باستعمال طريقة غوص للحذف : AX = b

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الأولى: - الحذف - $a_{11} = 2 \neq 0$

لتسهيل العملية سوف نحافظ على شكل المصفوفة A مع إضافة الشعاع b

المصفوفة الموسعة $[A; b]$

أ- نقوم بقسمة السطر الأولى على a_{11}

$$L_1/a_{11} : L_1/2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 1 \\ 6 & 4 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

نحذف x_1 من L_2 و L_3 نجد:

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 6L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & -2 & -4 & : & 0 \\ 0 & -5 & -22 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ب- ($a_{44}^3 = -2 \neq 0$) نقوم بقسمة السطر الثاني على (-2) ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من السطر L_3 نجد :

$$\begin{matrix} L_2/-2 \\ \text{و} \\ L_3 - 5L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -12 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ج- نقوم بقسمة السطر الثالث على (-12) نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/6 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 - 2x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 = -\frac{1}{3}$$

حلول الجملة هي :

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

1) العدد $\left(a_{ii}^{k}\right)$ يسمى محور اذا كان $\left(a_{ii}^{k} = 0\right)$ نقوم بعملية تبديل الاسطر او الاعمدة لكي نحصل على محور غير معدوم مع مراعاة ما ينتج عن هذا التبديل.

- إذا كان بتبديل الاسطر فينتج عنه تبديل المعادلة أي الطرف الثاني ايضا.
- إذا كان تبديل الاعمدة فينتج عنه تبديل المتغيرات المرتبطة بهذه الاعمدة وعند الحصول على الحل نقوم بإعادتها إلى الوضعية الاصلية.

2) يمكن الحصول على مصفوفة مثلثية علوية او سفلية حسب الانطلاق من الأعلى إلى الأسفل او العكس ونحصل على نفس النتيجة.

3) طريقة غوص- جوردان:

نتبع نفس الخطوات السابقة لطريقة غوص وعند الحصول على مصفوفة مثلثية نواصل العملية للحصول على مصفوفة A قطرية (عناصر قطرها تساوي 1)

4) نستعمل طريقة غوص - جوردان أيضا في اتجاه المصفوفة العكسية للمصفوفة A بإتباع نفس الخطوات حيث تكون المصفوفة الموسعة من الشكل : $[A: I]$

$$[A: I] \longrightarrow [I, A^{-1}]$$

(سيتم التعرض لها في التمارين المقترحة)

2) طريقة التفكيك: LU - كروت - (Lower - Upper)

لحل الجملة: AX = b حيث A مصفوفة قابلة للقلب نقوم بإيجاد مصفوفتين مثلثتين:

L : مصفوفة سفلية

U : مصفوفة علوية

حيث A = L x U

نتيجة: يوجد تفكيك وحيد لـ A اذا وفقط اذا كانت كل المحددات الصغرى لـ A غير معدومة.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية الجداء (L xU) ومساواتها بـ A نجد :

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

- $(l_{11}U_{12} = a_{12}) \Longrightarrow U_{12} = {a_{12}}/{l_{11}}$
- $(l_{11}U_{13} = a_{13}) \Longrightarrow U_{13} = {a_{13}}/{l_{11}}$

- $(l_{21}U_{12} + l_{22}) = a_{22} \Longrightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}\, U_{12}$
- $(l_{31}U_{12} + l_{22}) = a_{32} \Longrightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}\, U_{12}$

ثم:

- $l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = a_{23}$

ومنه:

$$U_{23} = {[a_{23} - l_{21}U_{13}]}/{l_{22}}$$

- $l_{31}U_{13} + l_{31}U_{23} + l_{33} = a_{33}$

ومنه:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}U_{13} - l_{32}U_{23}$$

بعد الحصول على L و U نقوم بحل الجملة على مرحلتين حيث:

Ax = b : L (U X) = b

نضع : U X = Z ثم نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} L.Z = b \\ U\,X = Z \end{cases}$$

نقوم أولا بإيجاد الشعاع Z ثم نحل الجملة الثانية بحيث يصبح Z معلوما.

تطبيق :

حل الجملة AX = b حيث:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

المرحلة الأولى: التفكيك

A مصفوفة قابلة للقلب وكل المحددات الصغرى غير معدومة.

نضع : LU = A أي :

$$\begin{matrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{matrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

اذن:

- l_{11} = 1 ; l_{21} = 3 ; l_{31} = 2
- ($l_{11}U_{12}$ = 1) $\Longrightarrow$ U_{12} = 1
- ($l_{11}U_{13}$ + 0 x U_{23} = 1) $\Longrightarrow$ U_{13} = 1

ثم :

- ($l_{21}U_{12}$ + l_{22} = 9) $\Longrightarrow$ l_{22} = 6
- ($l_{31}U_{12}$ + l_{32} = 4) $\Longrightarrow$ l_{32} = 2
- ($l_{21}U_{13}$ + $l_{22}U_{23}$ = 27) $\Longrightarrow$ U_{23} = 4

وأخيرا:

- ($l_{31}U_{13}$ + $l_{32}U_{23}$ + l_{33} = 2) $\Longrightarrow$ l_{33} = -2

ومنه نجد :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية:

نضع *UX = Z* ونقوم بحل الجملة : *LZ = b* أي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

نجد:

- Z_1 = 14
- Z_2 = $(120 - 3 \text{ x } 14) / 6$ = 13
- Z_3 = $(50 - 2 \text{ x } 14 - 2 \text{ x } 13) / -2$ = 2

اذن حل الجملة LZ = b هو : $Z = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$

نقوم الآن بحل الجملة الثانية لإيجاد X

أي : $UX = Z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نجد :

$x_3 = 2$

$x_2 = 13 - 4x_2 = 13 - 8 = 5$

$x_1 = 14 - 5 - 2 = 7$

اذن حل الجملة $AX = b$ هي : $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) طريقة شوليسكي:

نظرية : اذا كانت A مصفوفة مربعة متناظرة ومعرفة موجبة فيمكن تفكيكها على الشكل التالي:

$A = L^t . L$ حيث L^t مصفوفة حقيقية مثلثية.

مثال: $A = L^t . L$ أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

تطبيق نفس العمل في تفكيك (LU) مع الأخذ بالاعتبار أن:

$\forall_i , \forall_j \quad l_{i,j} = l_{j,i}$ ومنه :

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $l_{12} = {a_{21}}/{l_{11}}$
- $l_{13} = {a_{31}}/{l_{11}}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{12})^2}$
- $l_{23} = {[a_{23} - l_{12} . l_{13}]}/{l_{22}}$

- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{13})^2 - (l_{23})^2}$

حل الجملة يكون على الشكل :

$$\begin{cases} L^t.Z = b \\ L\,X = Z \end{cases}$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1) احسب : A – B , A x B , B x A ثم $\det A\,;\ \det B\,;\ det\,(A\times B)$
2) استنتج $\det(A^{-1})$
3) احسب $\|B\|_\infty\ ,\ \|B\|_1$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة ثلاثية الأقطار A حيث :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1) بين ان A متناظرة هل A معرفة موجبة ؟ برر
2) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر اجابتك
3) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A ثم عين قيمة الشعاع الطيفي. استنتج $\|A\|_2$.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية :

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x+2y+z=0\\ x+2y-z=1\\ -2x-2y-z=2\end{cases}$$

1) ضع الجملة (I) على الشكل المصفوفي : $AX=b$
2) حل الجملة (I) مستعملا طريقة كرامر.
3) اوجد حل الجملة (I) باستعمال طريقة غوص للحذف.

التمرين الرابع :

اوجد حلول الجملة التالية مستعلا طريقة غوص مع تغيير المحاور :

$$\begin{cases} 3x + 8y + 9z = 6 \\ 3x + 8y + z = 11 \\ x + 2y + 4z = 20 \end{cases}$$

التمرين الخامس :

لدينا الجملة $AX = b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) جل الجملة مستعملا طريقة غوص- جوردان.
2) اوجد المصفوفة العكسية لـ A باستعمال طريق غوص- جوردان.

التمرين السادس:

حل الجملة الخطية المعرفة على شكل المصفوفي $AX = b$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) باستعمال طريقة غوص .
2) باستعمال طريقة غوص- جوردان.

التمرين السابع:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

حل الجملة مستعملا طريقة التفكيك (LU) (كروت).

التمرين الثامن:

حل الجملة التالية مستعملا طريقة شولبسكي:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

الفصل الثاني : الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

مقدمة

طرق الحل لأي نظام من المعادلات الخطية التي رأيناها في الفصل السابق تعتبر طرقا مباشرة لإيجاد الحل، وتتميز هذه الطرق بأنها تصل إلى الحل النهائي بعدد محدد من الخطوات، وحيث أن الحاسب يعمل حسب دقة محددة نتيجة العدد.

على العكس من ذلك، فإن الطرق التكرارية التي نقدمها هنا، و تسمى بالطرق غير المباشرة أيضا، تبدأ بتخمين حل معين، وبطريقة تكرارية تحاول هذه الطرق التحسين من هذا الحل الذى تم تخمينه في خطوات متتالية حتى يصبح التغير في الحل مع التقدم في هذه الخطوات صغيرا، عندها نوقف الخطوات ويكون هذا الحل الأخير هو الحل المقدم لمجموعة المعادلات.

هذه الخطوات التكرارية من الممكن أن يكون عددها كبيرا جدا، ولذلك فإن هذه الطرق تكون أبطأ كثيرا من الطرق المباشرة.

الجدير بالذكر أن هذه الطرق لا تعتمد على قيمة الحل الابتدائي الذى نبدأ به محاولات الحل. كما

أن هذه الطرق من الممكن ألا تصل إلى حل، بمعنى أن الحلول تتباعد مع تكرار المحاولات. على الرغم من ذلك فإن

هذه الطرق يكون لها المميزات التالية التي تجعلها هي الأفضل عند حل مسائل معينة:

1 - في المصفوفات المتناثرة العناصر تكون معظم عناصر المصفوفة تساوى أصفارا، ولذلك فإن هذه الطرق تسمح بتخزين العناصر غير الصفرية فقط والتعامل معها حسابيا مما يوفر وقتا في الحساب وفى مساحة التخزين -خاصة إذا كان بعد المصفوفة كبيرا- وذلك على العكس من الطرق المباشرة التي لا تميز بين العناصر الصفرية وغير الصفرية في الحساب. وهناك الكثير من التطبيقات التي تكون مصفوفاتها متناثرة.

2 - الميزة الثانية أن الطريقة التكرارية تكون ذاتية التصحيح، بمعنى أن كل محاولة للحل تكون أصح من المحاولة السابقة لها.

3 - الميزة الثالثة أن الطرق التكرارية لا تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية، على العكس من الطرق المباشرة فإنها تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية بل وفى ترتيب الصفوف كما رأينا في الفصل السابق.

في هذا الفصل سوف نستعرض طريقتين من الطرق التكرارية وهما

- طريقة جاكوبي

- طريقة غوص- سايدل

I. طريقة جاكوبي : (Jacobi)

لتكن الجملة التالية:

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_n x_n = b_1 & (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 & (2)\\
\vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{n1} x_n = b_n & (\mathrm{n})
\end{cases}
$$

نعتمد طريقة جاكوبي على إيجاد:

- قيمة x_1 من المعادلة (1) بدلالة باقي المتغيرات.
- قيمة x_2 من المعادلة (2) بدلالة باقي المتغيرات.

⋮

⋮

- قيمة x_n من المعادلة (n) بدلالة باقي المتغيرات.

فنحصل على الجملة التالية:

$$
(\mathrm{I'})\begin{cases}
x_1 = c_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n\\
x_2 = c_2 + t_{21}x_1 + \cdots + t_{2n}x_n\\
\vdots\\
\vdots\\
x_n = c_n + t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{n,n-1}x_{n-1}
\end{cases}
$$

حيث: $(a_{i,i} \neq 0)$

$$C_i = {}^{b_i}/_{a_{ii}} \qquad i= 1,2, \ldots ,n$$

$$t_{i,j} = {}^{-a_{i,j}}/_{a_{ii}} \qquad (j \neq i)$$

$$t_{ii} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

الجملة ('I) يمكن كتابتها على الشكل:

$$X^k = TX^{(k-1)} + C \qquad k=1, \ldots,n$$

$$
T = \begin{pmatrix}
0 & t_{12} & \ldots\ldots & t_{1n}\\
t_{21} & 0 & \ldots\ldots & t_{2n}\\
\vdots & & & \\
\vdots & & & \\
t_{n1} & t_{n2} & \ldots\ldots & 0
\end{pmatrix} \quad ; \quad C= \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{bmatrix}
$$

المصفوفة التكرارية حيث : T قطرها كل عناصره معدومة .

الكتابة العامة لخوارزمية جاكوبي:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = c_i + \sum_{j=1}^{1} t_{i,j}\, x_j^{k-1} & \text{k} = 1, 2, \dots, n \\ t_{ii} = 0 & \text{i} = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يمكن كتابتها مباشرة باستعمال المصفوفة A كالآتي :

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right] \Big/ a_{ii} & \text{k} = 1, \dots, n \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

لحل الجملة نقوم بالخطوات التالية:

1- نقوم باختيار قيمة ابتدائية $X^{(0)}$ أي من اجل (k=0).

2- نضع k=1 ثم نقوم بحساب $X^{(1)}$ من خلال مركباته $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. مع الشرط a_{11}≠0 اذا لم يتحقق الشرط نقوم بالتبديل، ثم نضع k=2 ونعيد الحساب بنفس الكيفية لـ $X^{(2)}$ ثم $X^{(3)}$ ...، $X^{(k)}$.

3- اختبار التوقف:

اذا كان $X^{(k)}$ يمثل الحل التقريبي فهو يحقق اختبار التوقف المعطى من خلال العبارة التالية:

$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| < \varepsilon$ القيمة ε معطاة

اذا لم يحقق $X^{(k)}$ اختيار التوقف نضيف 1 للعدد k ونعود الى (2).

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(\text{I}) \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

اذن حسب ما سبق:

$$(\text{I}') \begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 + 0.111x_2 \end{cases}$$

نكتب الآن الصيغة العامة بدلالة k :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k-1)} - 0.111x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$$X^{(k)} = T_j X^{(k-1)} + C$$

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0.143 & 0 & 0.286 \\ -0.222 & -0.111 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التكرارية لجاكوبي

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix}$$

يمكنك التأكد أنه من أجل (K=6)

نجد :

$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

علما ان الحل الصحيح للجملة هو :

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II. طريقة غوص- سايدل:

هي عبارة عن تحسين لطريقة جاكوبي فعوض استعمال المركبات:

(i >1) $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$ للشعاع $X^{(k-1)}$ نستعمل المركبات: $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ للشعاع $X^{(k)}$ التي تم حسابها ومنه نحصل على الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{1} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \Big/ a_{ii} \\ \\ i = 1, \dots, n. \qquad k = 1, 2, \dots, n \quad (a_{11} \neq 0) \end{cases}$$

مثال:

سنقوم بحل المثال السابق المعطى في طريقة جاكوبي لملاحظة الفرق:

نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k)} - 0.111x_2^{(k)} \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

يمكنك التأكد أن:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.996 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

ثم مقارنتها بالنتائج السابقة لطريقة جاكوبي ونلاحظ عملية التسريع في الوصول للحل التقريبي.

III. تفكيك المصفوفة: A

من خلال الجملة: AX =b يمكن تفكيك المصفوفة A للحصول على المصفوفة التكرارية لطريقة جاكوبي و غوص- سايدل.

نضع:

مصفوفة قطرية D: $d_{ii} = a_{ii}$

مصفوفة سفلية L: $l_{ii} = -a_{ij} \quad {\scriptstyle i<j}$

مصفوفة علوية U: $U_{ii} = -a_{ij} \quad {\scriptstyle i>j}$

نحصل على العلاقة التالية:

A = D – L – U

= D – (L+U)

أ - المصفوفة التكرارية لجاكوبي: T_j

الجملة AX=b تصبح من الشكل:

$$[D - (L + U)]\, X = b$$

ومنه:

$$DX = (L + U)\, X + b$$

بما ان المصفوفة D قابلة للقلب نحصل على :

الطريقة التكرارية لجاكوبي :

$$DX^{(k)} = (\ L + U\ )X^{(k-1)} + b$$

ومنه :

$$X^{(k)} = D^{-1}(\ L + U\ )X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لجاكوبي هي :

$$\boldsymbol{T_j = D^{-1}\ (L + U)}$$

ب- المصفوفة التكرارية لغوص- سايدل

الصيغة التكرارية:

$$(D - L)X^{k} = UX^{(k-1)} + b$$

اذن:

$$X^{(k)} = (D - L)^{-1}UX^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لغوص- سايدل:

$$\boldsymbol{T_G = (D - L)^{-1}U}$$

IV. **التقارب** :

نظرية

تتقارب طريقة جاكوبي و غوص سايدل اذا تحقق احد الشروط الثلاث الآتية :

1) المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما.
2) اذا كان : $\|T_j\| < 1$ (أو $\|T_G\| < 1$) باستعمال أي نظيم (ممكن $\|\ \|_1$ أو $\|\ \|_\infty$).
3) الشعاع الطيقي للمصفوفة والتكرارية اصغر تماما من واحد أي :

$$\rho(T_G) < 1 \quad \text{و} \quad \rho(T_j) < 1$$

ملاحظات :

1) شروط التقارب (1) و (2) كل شرط هو كاف وغير لازم أما الشرط الثالث فهو كاف ولازم.
2) اذا كانت الطريقة متقاربة فإن أي اختيار للشعاع الابتدائي $X^{(0)}$ يوصلنا للحل الصحيح X.
3) في حالة تقارب الطريقتين فإن طريقة غوص- سايدل تكون اسرع من جاكوبي .
4) طريقة غوص سايدل تتطلب n قيمة للتخزين في الذاكرة بينما جاكوبي تتطلب 2n.

مبرهنة

إذا كانت المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة فإن طريقة غوص- سايدل تتقارب.

V. تطبيقات :

التطبيق الاول

لتكن الجملة التالية :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \end{cases}$$

1) برهن ان طريقة جاكوبي لهذه الجملة تتقارب.

2) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى يكون الخطأ المرتكب: 10^{-4}

الحل:

1) تحول الجملة الى الشكل:

$X^{(k)} = T_j\, X^{(k-1)} + C$ نجد:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.1x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} + 0.3x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} + 0.1x_3^{(k-1)} - 0.2x_4 + 0.5 \\ x_3^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} - 0.15x_2^{(k-1)} + 0.05x_4 - 0.5 \\ x_4^{(k)} = -0.15x_1^{(k-1)} - 0.1x_2^{(k-1)} - 0.05x_3^{(k-1)} + 0.75 \end{cases}$$

حيث:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\|T_j\|_1 = \max\{0.35, 0.35\,, 0.35, 0.55\} = 0.55$$

بما أن $\|T_j\|_1 = 0.55 < 1$ فإن

طريقة جاكوبي تتقارب.

يمكن اثبات التقارب يكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر (يمكنك التأكد)

2) قبل الإجابة سنعرض المبرهنة التالية:

اذا كان $\|T\| < 1$ فإن المتتالية:

$$X^{k} = TX^{(k-1)} + C \qquad (k \geq 1)$$ تتقارب

من اجل أي اختبار لـ $X^{(0)}$ نحو الحل الصحيح X

ولدينا :

$$\left\| X - X^{(k)} \right\| \leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|$$

اذن:

نأخذ $X^{(0)} = C$ ومنه:

$$\left\| X^{(0)} \right\|_{1} = \|C\|_{1} = 1.75$$

لدينا:

$$\left\| X - X^{(k)} \right\| \leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\| TX^{(0)} + C - X^{(0)} \right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k+1} . \|C\|}{1 - \|T\|} = 10^{-4}$$

نجد $k \geq 16.7$ يمكن أخذ $k = 17$ $(k \in N)$

التطبيق الثاني

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي : AX = b حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

1) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر.

هل يمكن استنتاج تباعد او تقارب الطرق التكرارية؟ برر.

2) اوجد المصفوفة التكرارية T_j و T_G ، ثم احسب الشعاع الطيفي.
3) أي الطريقتين تتقارب؟

الحل:

1) A ليست ذات قطر مسيطر لأن:
- حسب الأعمدة: $1 > 1 + 2$ غير محققة.
- حسب الأسطر: $1 > 1 + 1$ غير محققة.

لا يمكن استنتاج التقارب او التباعد لأن شرط A ذات قطر مسيطر هو شرط كاف لكنه غير لازم.

2) المصفوفات التكرارية:

يمكنك ايجادها بواسطة العبارة التكرارية او تفكيك المصفوفة A حسب كل طريقة نجد:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} ; T_G = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الشعاع الطيفي : $\rho = max|\lambda i|$ لدينا: $det\left(T_j - \lambda I\right) = 0$

أي : $(\lambda = 0) \longrightarrow (-\lambda^3 = 0)$

ومنه : $\rho\left(T_j\right) = 0$

- $det\ (T_G - \lambda I) = -\lambda\ (2 - \lambda)^2 = 0$

ومنه : $\lambda = 0$ أو $\lambda = 2$

اذن : $\rho(T_G\ ) = 2$

بما ان $\rho\ \left(T_j\right) = 0 < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب و $\rho(T_G) = 2 > 1$ فإن طريقة غوص سايدل تتباعد.

هذا المثال يبين أن أفضلية طريقة غوص- سايدل تكون عند تقارب الطريقتين فقط.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي :

$AX = b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) اكتب الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي معينا T_j C_j
2) احسب الشعاع الطيفي للمصفوفة T_j ثم استنتج تقارب او تباعد طريقة جاكوبي.
3) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى سكون الخطأ المرتكب 10^{-4} نأخذ $X^0 = C_j$

التمرين الثاني:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

- عين قيم α التي تحقق تقارب طريقتي جاكوبي و غوص- سايدل.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية: $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $\quad A= \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) عين المصفوفة التكرارية T_G لطريقة غوص - سايدل.
2) احسب $\rho(T_G)$ ثم اوجد الشرط الضروري والكافي على α حتى تتقارب الطريقة.

التمرين الرابع:

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) احسب $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ علما ان $X^{(0)} = (2,2,2)$

باستعمال طريقة جاكوبي ثم غوص - سايدل.

2) حل الجملة الخطية مستعملا طريقة غوص للحذف ثم طريقة التفكيك (LU).

3) استنتج أي الطريقتين اسرع في التقارب.

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية

I. مقدمة

تستخدم المعادلات التفاضلية لنمذجة المسائل أو المشاكل التي تحتوى على تغير في أحد المتغيرات التابعة بالنسبة لمتغير أخر مستقل مثل هذه المشاكل تتطلب الحل لأحد مشاكل القيمة الابتدائية أي الحل لمعادلة تفاضلية تحقق قيم ابتدائية معينة.

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة دالية بين دالة مجهولة بمتغير واحد ومشتقاتها ورتبتها من رتبة المشتق الأكبر درجة.

مثال: الشكل العام لمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى هو:

$$y' = F(x, y) \qquad y \text{ بدلالة } x$$

تعريف1:

تكون الدالة $F(x,y)$ ليبشيتزيه في y على D من R^2 اذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D :$$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

نظرية:

لتكن المسألة:

$$(1) \begin{cases} y' = F(x,y)\ ; \quad x \in [a,b] \\ \quad y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$D = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b\ ;\ -\infty < y < +\infty\}$$

اذا كانت $F(x,y)$ مستمرة و ليبشيتزية في y على D فإن المسألة (1) تقبل حلا وحيدا y(x).

المسألة (1) تسمى مسألة كوشي أو مسألة شروط ابتدائية.

مثال:

لتكن المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

و $D = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 4 \, ; \, y > 0 \}$

لدينا: $F(x,y) = 1 + xy$

الدالة F مستمرة على D.

من جهة أخرى:

$$\forall ((x,y_1),(x,y_2)) \in D^2 :$$

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| = |xy_1 - xy_2)|$$

$$= |x(y_1 - y_2)| \leq 4|y_1 - y_2|$$

إذن F ليبشيتزيه ومنه المسألة تقبل حلا وحيدا.

II. الطريق العددية:

الهدف من هذه الطرق هو إيجاد حل مقرب للحل الصحيح لمسألة كوشي (1) وسوف نتعرض لطريقتين هما:

1) طريقة إيلر
2) طريقة تايلور

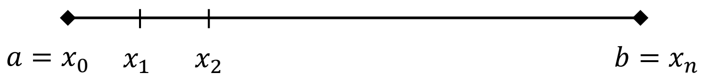
1. <u>طريقة إيلر:</u>

تعتبر أبسط الطرق وتتميز بسهولة الاستعمال وضعف الدقة.

أ) خطوات الطريقة:

- التقسيمات:

تتمثل في تجزئة المجال $[a,b]$ الى n مجال طول كل منها h وتسمى خطوة



الخطوة: $h = \frac{b-a}{h}$

✓ نشر تايلور:

نفرض أن الحل الصحيح $y(x)$ يقبل الاشتقاق ومستمر مرتين على $[a,b]$ ومنه:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + O(h^2)$$

نعوض y' بـ $F(x_i, y_i)$ نجد:

$$(2): y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i) + O(h^2)$$

من أجل i=0،...،n-1

بما ان $\lim_{h\to 0} O(h^2) = 0$ فإن:

$$(2): y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i)$$

ونكتب اختصار الشكل الآتي:

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih})$$

حيث يمثل y_{ih} الحل التقريبي عند x_i .

على اعتبار : $y_{0h} = y_0$ أي معطى.

حيث : $a = x_0$

من خلاله يمكن حساب $y_{ih}, \ldots\ldots$

ب)رتبة الخطأ:

- تعريف:

نسمي القيمة e_i حيث :

$|e_i|=|y(x_i) - y_{ih}|$ الخطأ عند النقطة x_i

اذا كان $|e_i| \le kh^p$ فإن التقريب العددي التي تعطى القيمة المقربة y_{h^i} لـ y_i من الرتبة P.

من خلال ما سبق نلاحظ ان طريقة إيلر من الرتبة الأولى.

ملاحظة:

- ✓ كلما كان العدد P أكبر تكون الطريقة أكثر دقة.
- ✓ الخطأ ناتج عن إهمال $O(h^2)$ عند نشر تايلور ويسمى خطأ البتر.

ج) مثال:

لتكن مسألة كوشي:

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 & h = 0,1 \end{cases}$$

إيجاد القيمة المقربة $y(x_i)$ بطريقة إيلر:

▪ الحل:

لدينا: الخطوة h معطاة بـ:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 0.1$$

ومنه : $n = 10$

اذن : $i = 0, 1, 2, \dots\dots\dots, 9$

نضع الحل التقريبي : y_{ih}

حسب العلاقة (2) فإن:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F\left(x_i, y_{ih}\right) \\ y_0 = 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots\dots, 9 \end{cases}$$

من أجل $i = 0$ الحل معلوم.

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,(x_i - y_{ih} + 1)$$

اذن :

$$y_{(i+1)h} = y_{ih}(1-h) + hx_i + h$$

$$= 0.9y_{ih} + ih^2 + h$$

لأن : $x_i = x_0 + ih = 0 + ih = ih$

ومنه:

$$y_{(i+1)h} = 0.9y_{ih} + 0.01i + 0.1$$

$$y_0 = 1$$

$$i = 0$$

$$y_{1h} = 0.9y_0 + 0.01 \times 0 + 0.1 = 1$$

$$y_{2h} = 0.9 \times 1 + 0.01 \times 1 + 0.1 = 0.11$$

$i = 9 \qquad \vdots$

$$y_{10} = 1.348$$

يمكنك إيجاد الحل الصحيح للمسألة وتعويض x بـ 1 ثم تحسب الخطأ بين :

$$y_{10} \text{ و } y(1)$$

2. طريقة تايلور:

نفرض أن حل المسألة (1) y(x) يقبل (n+1) مشتقة مستمرة ومنه حسب نشر تايلور نجد:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_i + \theta_i h)$$

حيث : $0 < \theta_i < 1$ وحسب (1)

$$y'(x_i) = F\big(x_i, y(x_i)\big)$$

أي :

$$y''(x_i) = F(x_i, y_i)$$

اذن:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\left[F(x_i, y_i) + \frac{h}{2}F'(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}F^{(n-1)}(x_i, y_i)\right] + O(h^{n+1})$$

باستعمال البتر وبما أن:

$$\lim_{h \to 0} O(h^{n+1}) = 0$$

نحصل على العلاقة التالية:

نضع $y_{(i+1)h}$: الحل التقريبي .

ومنه نجد:

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[F(x_i, y_{ih}) + \frac{h}{2}F'(x_i, y_{ih}) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}F^{(n-1)}(x_i, y_{ih})\right]$$

نرمز للجزء بين عارضتين بالرمز:

$$T^n(x_i, y_{ih})$$

فنحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,T^n\left(x_i, y_{ih}\right) \\ y_{0h} = y_0 = \alpha \qquad\qquad i = 1, 2, \dots\dots, n-1 \end{cases}$$

ملاحظة:

عند استعمال طريقة تايلور يجب ذكر الرتبة.

مثال: نأخذ المسألة السابقة

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 \qquad 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad h = 0.1 \end{cases}$$

طريقة تايلور من الرتبة الثانية:

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,T^2\left(x_i, y_{ih}\right)$$

حيث:

$$T^2(x_i, y_{ih}) = F(x_i, y_{ih}) + \frac{h}{2}F'(x_i, y_{ih})$$

$$F'(x_i, y_{ih}) = 1 - y'(x)$$

$$= 1 - x + y(x) - 1$$

$$= -x + y(x)$$

اذن:

$$F'(x_i, y_{ih}) = -x_i + y_{ih}$$

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[x_i - y_{ih} + 1 + \frac{h}{2}(-x_i + y_{ih})\right]$$

$$= y_{ih} + h\left[\left(1 - \frac{h}{2}\right)(x_i + y_{ih}) + 1\right]$$

بالتعويض نجد:

$$y_{(i+1)h} = 0.905y_{ih} + 0.095x_i + 0.1$$

$$y_{1h} = 1.005;\ y_{2h} = 1.019$$

من اجل $i=9$ نجد: $y_{10h} = 1.367$

يمكنك المقارنة مع طريقة ايلر علما ان الحل الصحيح $y(1)=1.367$

لاحظ ان $i=9$ تكون $x_{10} = x_n = 1$ سنجد طريقة تايلور اكثر دقة واذا رفعنا الرتبة اكثر ستزيد الدقة لكن الحساب يتعقد أيضا.

الرتبة الثانية تكون $T^2(x_i, y_{ih})$:

حيث $F'(x_i, y_{ih})$ تمثل: y''

تمارين مقترحة

التمرين الاول

لتكن المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = 2 \qquad h = 0.1 \end{cases}$$

عين الحل التقريبي y_{1h} و y_{2h} بطريقة :

1/ أيلر

2/ تايلور من الرتبة الثانية

التمرين الثاني

لتكن مسألة كوشي:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

على المجال $[0,10]$

1) اوجد الحل الصحيح لهذه المسألة
2) اكتب طريقة اولر المتقدمة لهذه المعادلة التفاضلية
3) استنتج الشكل التالي:

$$y_{K+1} = g(h,k) \qquad \Delta t = h$$

حيث g يطلب تعيينه.

التمرين الثالث:

لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية حيث:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 2y(t), t\epsilon[0,T] \\ y(0) = 1\,; y'(0) = 2 \end{cases}$$

1) اكتب هذه المعادلة على شكل جملة معادلتين من الرتبة الأولى.
2) طبق طريقة اولر على هذه الجملة.

ملحق ماتلاب

الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

قبل التطرق لكيفية تنفيذ هذه الطرق من خلال برنامج ماتلاب سنذكر ببعض الخطوات الاولية الخاصة بالمصفوفات.

يفصل الماتلاب بين عناصر الصف الواحد بفاصلة أو مسافة، ويفصل بين الأعمدة بالفاصلة المنقوطة.

>> A=[1 2 3 4]

A =

1 2 3 4

هنا أدخلنا لماتلاب المصفوفة *A* على أنها صف واحد مكون من العناصر *1 2 3 4* والتي يفصل بين كل منها مسافة (كان من الممكن أن نفصل بين كل عنصر والتالي له بفاصلة .)كانت استجابة ماتلاب أنه سجل عنده مصفوفة من صف واحد وأربع أعمدة.

>> B=[1;2;3;4]

B =

1

2

3

4

في المصفوفة *B* توجد فاصلة منقوطة تفصل بين كل عنصر والتالي له، لذلك فإن ماتلاب يعتبر كل عنصر كما لو كان صفا

قائما بذاته، لذلك فقد استجاب ماتلاب بكتابة المصفوفة *B* في صورة مصفوفة من أربع صفوف وعمود واحد.

>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

A =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

لاحظ كيف تم الفصل بين عناصر كل صف بمسافة، والفصل بين كل عمودين بفاصلة منقوطة، فحصلنا على المصفوفة المربعة *(3x3)*.

منقول مصفوفة

```
A =
1 2 3
4 5 6
7 8 9
>> B=A'
B =
1 4 7
2 5 8
3 6 9
```

تمثل المصفوفة *B* منقول المصفوفة *A* ورمزها *A'*

العمليات على المصفوفات

- الجمع والطرح

```
A =
1 2 3
4 5 6
B =
1 4 7
2 5 8
>> C=A+B
C =
2 6 10
6 10 14
```

بنفس الطريقة يمكن إجراء عملية الطرح.

ضرب المصفوفات

A =

1 2 3 4

5 6 7 8

B =

1 5

2 6

3 7

4 8

*>> C=A*B*

C =

30 70

70 174

المصفوفة العكسية

إذا كانت *A* قابلة للقلب فإنه يوجد في ماتلاب الدالة *inv( )* سابقة البناء التي تحسب معكوس أي مصفوفة مباشرة كما يلى:

A =

10 2 3

4 20 3

3 3 10

>> B=inv(A)

B =

0.1121 -0.0065 -0.0317

-0.0182 0.0534 -0.0106

-0.0282 -0.0141 0.1127

طريقة غوص للحذف لحل جملة معادلات خطية

البرنامج التالي عبارة عن مقترح لتنفيذ خوارزم غوص لحذف المتغيرات مع المحورة.

```
%program to solve a system of linear equations
clear ;
format short
a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;
n = size(a,1) ;
A = [ a , b ] ; % indent a and b in a single matrix
for k=1:n %loop on the columns
[amax, im]=max(abs(A(k:n,k)));
if amax==0
disp('matrix is singular, no possible solution');
break;
end
im=im+k-1;
if im~=k
T = A(k,:);
A(k,:) = A(im,:);
A(im,:) = T;
end
for i=k+1:n
A(i,k:n+1)=A(i,k:n+1)-(A(i,k)/A(k,k))*A(k,k:n+1);
end
end % end of triangularization of the matrix
if A(n,n)==0
disp('matrix is singular, no possible solution ann=0');
```

```
break;
end
x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); %start of backward substitution
for i=n-1:-1:1
x(i)=(A(i,n+1)-sum(A(i,i+1:n).*x(i+1:n)))/A(i,i);
end
disp(x)
```

مستعملا البرنامج السابق حل الجملة الخطية التالية: *AX=B*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-8\\ 20\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$$

```
>> GElimination
Enter The Array Coefficients a= [1 -1 2 -1 ;2 -2 3 -3 ; 1 1 1 0 ;1 -1
4 3 ]
Enter The Arrays Constants b = [-8;-20;-2;4]
x =
-7.0000 3.0000 2.0000 2.0000
```

يوفر الماتلاب طرق مباشرة لحل أى نظام خطى من المعادلات وأول هذه الطرق هي الدالة *linsolve(A,b)* حيث*A* مصفوفة المعاملات و *b* هوالشعاع المعطى، ويمكن التحقق من ذلك بالتطبيق على المثال السابق في ماتلاب مباشرة كما يلى:

```
>> A=[1 -1 2 -1 ;2 -2 3 -3 ; 1 1 1 0 ;1 -1 4 3 ];
>> b=[-8;-20;-2;4];
```

```
>> X = linsolve(A,b)
X =
-7.0000
3.0000
2.0000
2.0000
```

الدالة *linsolve()* تستخدم تحليل المصفوفة *A* إلى مصفوفة مثلثة علوية وأخرى سفلية.

الطرق التكرارية لحل جمل معادلات خطية

1- طريقة جاكوبي

البرنامج المقترح لطريقة جاكوبي هو كما يلي:

```
1- %program to solve a system of linear equations using Jacobi method
2- clear ;
3- format short
4- a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
5- b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;%e.g [1;2;]
6- n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only
7- x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ' ]) ;%e.g [1;2;]
8- kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ' ]) ;%e.g [10]
9- X = x0; At = zeros(n,n);
10- for i = 1:n
11- for j = 1:n
12- if j ~= i
13- At(i,j) = -a(i,j)/a(i,i);
14- end
```

```
15- end
16- Bt(i,:) = b(i,:)/a(i,i);
17- end
18- for k = 1: kmax
19- X = At*x0 + Bt;
20- x0 = X;
21- end
22- disp(X);
```

مثال

مستخدما البرنامج السابق حل الجملة الخطية التالية

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

```
>> Jacobi
Enter The Array of Coefficients a= [10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -1 8]
Enter The Arrays of Constants b = [6;25;-11;15]
Enter The Array of first trial x0 = [0;0;0;0]
Enter The Max number of iterations = 10
1.0001
1.9998
-0.9998
0.9998
```

2- طريقة غوص- سايدل

البرنامج التالي يمثل تعديل لبرنامج جاكوبي السابق ليعطي الحل بطريقةغوص- سايدل:

```
1- % solving a system of linear equations using Gauss-Siedel method
2- clear ;
3- format short
4- a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]
5- b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ' ]) ;%e.g [1;2;]
6- n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only
7- x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ' ]) ;%e.g [1;2;]
8- kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ' ]) ;%e.g [10]
9- X = x0; At = zeros(n,n);
10- for k = 1: kmax
11- X(1,:) = (b(1,:)-a(1,2:n)*x0(2:n,:))/a(1,1);
12- for i = 2:n-1
13- tmp = b(i,:)-a(i,1:i-1)*X(1:i-1,:)-a(i,i+1:n)*x0(i+1:n,:);
14- X(i,:) = tmp/a(i,i);
15- end
16- X(n,:) = (b(n,:)-a(n,1:n - 1)*X(1:n - 1,:))/a(n,n);
17- x0 = X;
18- disp(X');
19- end
20- %disp(X);
```

مثال

سنقوم بحل الجملة السابقة لكن بواسطة برنامج طريقة غوص- سايدل

Enter The Array of Coefficients a= [10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -18]

Enter The Arrays of Constants b = [6;25;-11;15]

Enter The Array of first trial x0 = [0;0;0;0]

Enter The Max number of iterations = 10

K	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.6000	2.3273	*-0.9873*	*0.8789*
2	1.0302	2.0369	*-1.0145*	*0.9843*
3	1.0066	2.0036	*-1.0025*	*0.9984*
4	1.0009	2.0003	*-1.0003*	*0.9998*
5	1.0001	2.0000	*-1.0000*	1.0000
6	1.0000	2.0000	*-1.0000*	1.0000
7	1.0000	2.0000	*-1.0000*	1.0000
8	1.0000	2.0000	*-1.0000*	1.0000
9	1.0000	2.0000	*-1.0000*	1.0000
10	1.0000	2.0000	*-1.0000*	1.0000

لقد نفذنا البرنامج هنا على *10* محاولات مثل طريقة جاكوبي تماما والجدير بالملاحظة أننا حصلنا على الإجابة الصحيحة تماما بعد *5* محاولات فقط كما هو موضح في النتائج السابقة التي حصلنا عليها، وهذا يعكس الفرق في السرعة بين طريقة غوص- سايدل وطريقة جاكوبي.

1-طريقة الاسترخاء

البرنامج التالي يبين التعديلات على برنامج طريقة غوص- سايدل ليتلاءم مع طريقة الاسترخاء.

1- %program to solve a system of linear equations by the SOR method

2- clear ;

3- format short

4- a = input([' Enter The Array of Coefficients a= ']); %e.g [1 2;3 4]

5- b = input([' Enter The Arrays of Constants b = ']) ;%e.g [1;2;]

6- n = size(a,1) ;% where a is nxn and we want n only

7- x0 = input([' Enter The Array of first trial x0 = ']) ;%e.g [1;2;]

8- kmax = input([' Enter The Max number of iterations = ']) ;%e.g [10]

```
9- w = input([' Enter The Relaxation Value = ' ]) ;%e.g [10]
10- X = x0; At = zeros(n,n);
11- for k = 1: kmax
12- X(1,:) = x0(1,:)+w*((b(1,:)-a(1,1:n)*x0(1:n,:)))/a(1,1);
13- for i = 2:n-1
14- tmp = w*(b(i,:)-a(i,1:i-1)*X(1:i - 1,:)-a(i,i:n)*x0(i:n,:));
15- X(i,:) = x0(i,:)+tmp/a(i,i);
16- end
17- X(n,:) = x0(n,:)+w*((b(n,:)-a(n,1:n)*X(1:n,:)))/a(n,n);
18- x0 = X;
19- disp(X');
20- end
21- %disp(X');
```

حل المعادلات التفاضلية باستخدام ماتلاب

يوجد في ماتلاب دالتين لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى .الدالة الأولى هي( )*ode23*

و تستخدم طريقة رونج كيتا من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة لحساب الحل.

ماتلاب لديه طريقة للحساب الآلي لمقدار الخطوة *h* وليتم ذلك فإنه يستخدم في الحل درجتين الثانية والثالثة .الصورة العامة لهذه الدالة هي:

[xout,yout]=ode23('fun', span, y0)

مثال

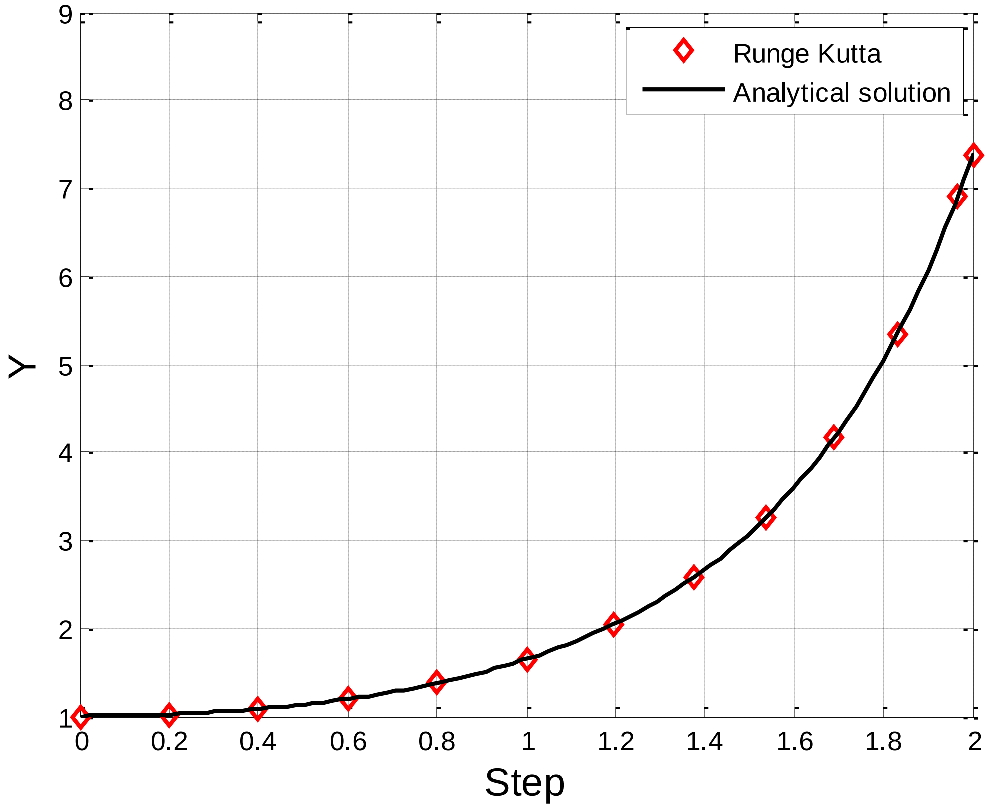
أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\begin{cases} y' = xy & x \in [0,2] \\ \quad y(0) = 1 & \end{cases}$$

الحل التحليلي لهذه المعادلة هو: $Y(x) = e^{x^2/2}$

البرنامج التالي بواسطة الدالة (*ode23( )* المرفق بالشكل الذي يمثل المنحنى البياني للحل التحليلي والحل التقريبي حيث نلاحظ انطباقهما تقريبا .

```
% using Runge Kutta
clear
f=inline('(x*y)');
[Xout, Yout]=ode23(f,[0 2],1);
curve=plot(Xout,Yout,'rd');grid;hold on; grid on;
set (curve,'LineWidth',2)
i=linspace(0,2); % plotting real solution
y4=exp(i.^2/2);
plot(i,y4,'k-', 'linewidth',1.5)
ylabel('Y', 'fontsize',14)
xlabel('Step', 'fontsize',14)
axis([0 2 1 9]);
legend('Runge Kutta','Analytical solution')
```



Runge Kutta
Analytical solution
Y
Step
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

حلول التمارين المقترحة

الفصل الاول

التمرين الأول:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. حساب A×B ، B×A ، A - B :

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ثم:

$$\det A = 0 - 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +12$$

$$\det(A \times B) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

من جهة أخرى:

$$\det A \times detB = (-1) \times (12) = -12$$

الخاصية محققة دوما أي:

$$\det(A \times B) = \det A \times detB$$

بصورة عامة:

$$\det(A_1 \times A_2 \times \dots A_n) = \det A_1 \times \dots \times detA_n$$

2. لدينا:

$$\det(A \times A^{-1}) = \det A \times detA^{-1}$$

حسب الخاصية السابقة ومنه:

$$(A \times A^{-1}) = I$$

$$\det I = \det A \times detA^{-1}$$

بما أن $\det I = 1$ فإن $detA^{-1} = \frac{1}{\det A}$

أي : $\det A^{-1} = -1$

3. $\|B\|_1 = max\{1 + 1 + 2 , 2 + 2 + 2 , 1 + 1 + 1\}$

(حسب الاعمدة) $\|B\|_1 = 6$

$$\|B\|_\infty = max\{1 + 2 + 1 , 1 + 2 + 1 , 2 + 1 + 1\}$$

$\|B\|_\infty = 5$ (حسب الاعمدة)

التمرين الثاني:

لدينا:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) اذن A متناظرة : $A^t = A$

- A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$\forall \mathrm{X} \neq 0 : \quad X^t A\, X > 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أي :

$$X^t = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} > 0$$

لدينا:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$$

ومنه:

$$X^t A\, X = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_1^2 + x_3^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0$$

ومنه : $\forall \mathrm{X} \neq 0 = X^t A\, X > 0$

اذن A معرفة موجبة

2) A ذات قطر مسيطر لأن :

حسب الاسطر: $2 \geq 1$

$$2 \geq 2$$

$$2 \geq 1$$

حسب الاعمدة: $(2 \geq 1)$ ، $(2 \geq 2)$ ، $(2 \geq 1)$

3) القيم الذاتية للمصفوفة A:

المعادلة المميزة:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$A - \lambda\, I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\, I) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2 & -\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1 - 1]$$

ومنه: $\det(A - \lambda\, I) = (2-\lambda)\,(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2})$

اذن:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} 2 & -\lambda & & = 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & -\lambda & = 0 \\ 2 & +\sqrt{2} & -\lambda & = 0 \end{cases} : \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 - \sqrt{2} \\ \lambda = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي :

$$\lambda_1 = 2\ , \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}\ , \qquad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$$

الشعاع الطيفي:

$$\rho(A) = max|\lambda_i| \quad i = 1,2,3$$

اذن: $\rho(A) = 2 + \sqrt{2}$

استنتاج $\|A\|_2$ لدينا :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \qquad (A^t = A)$$

$$= \sqrt{\rho(A^2)} \qquad \left(\rho(A^2)\right) = \left(\rho(A)\right)^2$$

$$= \sqrt{\left(\rho(A)\right)^2}$$

ومنه

$$\|A\|_2 = \rho(A) = 2+\sqrt{2} \qquad \rho(A) \geq 0$$

التمرين الثالث:

1) الشكل المصفوفي: $AX = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) طريقة كرامر:

حساب محدد المصفوفة A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

اذن الجملة تقبل حل وحيد حيث:

$$\mathrm{x} = \frac{\Delta x}{\det A} \;;\quad y = \frac{\Delta y}{\det A} \;;\quad z = \frac{\Delta z}{\det A}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -41$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/30 \\ 41/30 \\ -9/30 \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة باستعمال طريقة غوص للحذف:

المصفوفة الموسعة: $[A:b]$

1. مرحلة الحذف:

$$[A:b]\ :\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & : & 1 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L}_1/3 \ \rightarrow \mathrm{L}_1{}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \ \rightarrow \mathrm{L}_2{}^{(1)} \\ \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \ \rightarrow \mathrm{L}_3{}^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 2 & 4/3 & : & 7/3 \\ 0 & 1 & -13/3 & : & 8/3 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$L_2^{(1)}/2 \ \rightarrow \mathrm{L}_2{}^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 1 & -13/3 & : & 8/3 \end{pmatrix}$$

ث- حذف المتغير y من المعادلة الثالثة :

$$L_3^{(1)} - L_2^{(2)} \ \rightarrow \mathrm{L}_3{}^{(2)} \ : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 0 & -5 & : & 3/2 \end{pmatrix}$$

ج- $a_{33}^{(2)} = -5 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-5} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & : & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & : & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/10 \end{pmatrix}$$

2. مرحلة التعويض:

- $z = -3/_{10}$
- $\left(y + \frac{2}{3}z = \frac{7}{6}\right) \rightarrow y = \frac{7}{6} + \frac{1}{5} = \frac{41}{30}$
- $\left(x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

التمرين الرابع:

المصفوفة الموسعة
$$[A:b] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & : & 6 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

1) مرحلة الحذف:

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L_1}/_3 \rightarrow \mathrm{L_1}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L_2} + 3\mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(1)} \\ \mathrm{L_3} - \mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(1)} \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 0$ اذن لايمكن استعماله كمحور يجب تغيير المحور اما بتبديل الاعمدة او الاسطر نلاحظ ان تبديل السطرين الثالث و الثاني يفيدنا في الحذف ومنه نحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\begin{matrix} L_2^{(2)} \rightarrow L_3^{(1)} \\ L_3^{(2)} \rightarrow L_2^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \end{pmatrix}$$

ث- $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-8} \rightarrow L_3^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & 1 & : & -5/8 \end{pmatrix}$$

2) مرحلة التعويض :

- $z = -5/8$
- $-\frac{2}{3}y = 18 + \frac{5}{8} = \frac{144+5}{8} = \frac{149}{8}$
- $y = \frac{-149}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{-447}{16}$ اذن
- $x = 2 + \frac{8}{3} \times \frac{447}{16} + \frac{15}{8} = \frac{625}{8}$

$$x = \begin{pmatrix} 627/8 \\ -447/16 \\ -5/8 \end{pmatrix}$$

<u>التمرين السادس:</u> AX=b

✓ طريقة غوص:

المصفوفة الموسعة $[A:b]$ $a_{11} = 1$

أ-

$$\begin{matrix} L_2^{(1)} \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} \rightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4^{(1)} \rightarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & : & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & : & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ب-

$$\begin{matrix} L_2^{(1)}/_{-1} \\ \\ L_3^{(2)} \to L_3^{(1)} + 2L_2^{(2)} \\ L_4^{(2)} \to L_4^{(1)} + 7L_2^{(2)} \end{matrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ت-

$$\begin{matrix} L_3^{(2)}/_{-4} \\ \\ L_4^{(3)} \to L_4^{(2)} - 4L_3^{(3)} \end{matrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_1 = 1$$

حلول الجملة هي: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

التمرين السابع:

الجملة من الشكل: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

طريقة التفكيك : A=LU

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{23} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بعد الضرب والمطابقة نحصل على:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3/_2 & -1/_2 \\ 0 & 1 & 1/_2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(AX = b) \leftrightarrow \begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases}$$

$$(LZ = b) \leftrightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(UX = Z) \leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

اذن حلول الجملة هي:

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الفصل الثاني

التمرين الأول:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 2 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

أي: $X^{(k+1)} = T_j X^{(k)} + C_j$

حيث:

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. حساب الشعاع الطيفي $\rho(T_j)$ حيث:

$\rho(T_j) = \max_i |\lambda_i|$ λ_i القيمة الذاتية لـ T_j

قيم λ_i تمثل حلول المعادلة المميزة: $det(T_j - \lambda I) = 0$

$$det(-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lambda\right) = 0$$

ومنه نجد:

$$det\left(T_j - \lambda I\right) = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(-\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}\right) = 0$$

حلول المعادلة هي : $\lambda_1 = \frac{1}{3}\ ,\lambda_2 = \frac{1}{3}\ ,\lambda_3 = \frac{-2}{3}$

اذن: $\rho\left(T_j\right) = \max_{i=1,2,3}|\lambda_i| = \frac{2}{3}$

بما ان $\rho\left(T_j\right) = \frac{2}{3} < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب.

3. عدد التكرارات بخطأ 10^{-4} و $X^{(0)} = C_j$ حسب العلاقة لدينا:

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|T_j\right\|^k}{1 - \left\|T_j\right\|}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\| = 10^{-4}$$

اذن: $\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|T_j\right\|^{k+1}.\left\|C_J\right\|}{1-\left\|T_j\right\|} = 10^{-4}$

لدينا: $\left\|T_j\right\|_1 = \frac{2}{3}\ \ ;\ \ \left\|X^{(0)}\right\| = \left\|C_j\right\|_1 = 6$

ومنه نجد : $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \times 18 = 10^{-4}\quad : \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} +6}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$

ندخل الدالة ln على الطرفين نجد:

$$(K+1)\ln\frac{2}{3} + \ln 18 = -4\ln 10$$

بعد الحساب نستنتج أن $k = 29$

التمرين الثاني:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

تتقارب طريقتي جاكوبي وغوص- سايدل اذا كانت A ذات قطر مسيطر تماما أي:

$|\alpha| > 1$ (حسب الاسطر والاعمدة)

ومنه قيم α التي تحقق التقارب هي : $(\alpha > 1)$ أو $(\alpha < -1)$.

التمرين الرابع: AX=b

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) بما ان المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما فإن الطريقتين تتقارب (جاكوبي وغوص- سايدل)

1) طريقة جاكوبي:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_2^{(k)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} \quad + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -2/3 \\ 10/9 \end{pmatrix}$; $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 52/_{27} \\ -13/_{12} \\ 31/_{36} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.926 \\ -1.083 \\ 0.861 \end{pmatrix}$$

2) طريقة غوص- سايدل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_2^{(k)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{3}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/_3 \\ -2/_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 35/_{18} \\ -35/_{36} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 431/_{216} \\ -431/_{432} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.995 \\ -0.996 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة باستعمال طريقة غوص للحذف:

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & : & 12 \\ 0 & 11/_3 & -1/_3 & : & -4 \\ 0 & 0 & 6 & : & 6 \end{pmatrix}$$

نجد: $x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = 1$

أي : الحل الصحيح x حيث : $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

طريقة التفكيك A=LU حيث :

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{11}{3} & 0 \\ 1 & {}^{11}\!/_{6} & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نصل الى نفس النتيجة.

4) من خلال المقارنة نجد ان طريقة غوص- سايدل هي الأسرع لأنها الأقرب الى الحل الصحيح.

الفصل الثالث

التمرين الاول

1) الحل الصريح (الدقيق) للمسألة هو:

$$y = Ce^{-t}$$

من اجل: $y(0) = 1$ نجد $y = e^{-t}$

هو الحل الوحيد للمسألة .

2) طريقة اولر من الشكل:

$$y(t+h) \approx y(t) + y'(t) \times h$$

$$\approx y(t) + hF(t, y(t)$$

ومنه نجد العلاقة التكرارية:

$$y_{k+1} \approx y_k - hy_n = (1-h)y_k$$

3) من خلال العبارة المتحصل عليها سابقا نجد:

$$Y_{K+1} = (1-h)\, y_k = (1-h)\,(1-h)\; y_{k-1}$$

$$y_{k+1} = (1-h)(1-h)(1-h)y_{k-2} = \cdots = (1-h)^{k+1}$$

أي:

$$g(h,k) = (1-h)^{k+1}$$

1) اولر:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{\,ih} + h\,F\big(x_i, y_{\,ih}\big) \\ y_{0h} = 2 \end{cases}$$

اذن:

$$y_{1h} = y_{0h} + 0.1(0 \sin 2)$$

$$= 2$$

$$y_{2h} = y_{1h} + 0.1(0.1 \sin 2)$$

$$= 2.009$$

2) طريقة تايلور:

$$y_{(i+1)} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih}) + \frac{h^2}{2} F'(x_i, y_{ih})$$

$$= y_{ih} + h\,T^2(x_i, y_{ih})$$

تحقق أن :

$$F'(x_i, y_{ih}) = \sin y_{ih} + x_i \cos y_{ih}$$

ومنه :

$$y_{1h} = y_{0h} + h(x \sin y_{0h}) + \frac{h^2}{2}(\sin y_{0h} + x_0 \cos y_{0h} \times \sin y_{0h})$$

$$y_{1h} = 2.004$$

$$y_{2h} = 2.018$$

تأكد من النتائج

التمرين الثالث

1) نضع: $y' = z$ اذن $y'' = z'$

ومنه: $Z' = -2y' + 2y$

$$= -2Z + 2y$$

وبالتالي نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} y' = Z \\ Z' = 2y - 2Z \\ y(0) = 1\,;\, y'(0) = 2 \end{cases}$$

ويمكن كتابة الجملة على الشكل المصفوفي:

$$\begin{cases} U' = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

حيث:

$$U = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2) تطبق طريقة اولر على هذه الجملة نجد:

$$U_{n+1} = U_n + h_n F(t_n, U_n)$$

$$= U_n + h_n A U_n$$

اذن:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

ونحصل على الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n Z_n \\ Z_{n+1} = Z_n + 2h_n(y_n - Z_n) \end{cases}$$

مع $y_o = 1$ و $Z_0 = 2$

المراجع

1- Ciarlet P.G. : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris (1985).

2- Ciarlet P.G., B. Miara, J.M. Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation avec solutions.

Edition Masson, 1991 .

3- Gloria Faccanoni, Analyse numérique.

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html.

4- P. Lascaux, R. Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2 Masson 1986.

5- M. Crouzeix, AL Mignot . Analyse numérique des équations différentielles, collec. Math. Appli.

pour la maitrise. Masson, 1984.