**السلاسل الإحصائية ذات متغيرين**

أثناء دراسة على مجتمع إحصائي ما يمكن أحيانا ملاحظة طبعين – كميين، نوعيين أو مختلط- . ومن ثم نتعامل مع متغيرين، نتناول في هذا الفصل دراسة العلاقة بين المتغيرين ، و نستخدم لذلك بعض طرق التحليل الاحصائي مثل : الارتباط الانحدار ... .

نعرف عندئذ متغيرين إحصائيين ، ، و تسمى الثنائية $\left(X,Y\right)$ متغيرة إحصائية ذات بعدين.

**مثلا:** ملاحظة نقطة المراقبة المستمرة و نقطة الامتحان لطلبة سنة أولى.

1. **السلسلة الاحصائية ذات بعدين:**

ليكن و المتغيرتين المدروستين، عدد قيم الطبع بالنسبة للمتغير ، عدد قيم الطبع بالنسبة للمتغير و العدد الاجمالي للمشاهدات.

مجموعة الثنائيات $\left(x\_{i},y\_{j}\right)\_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq q}$ تشكل سلسلة إحصائية ذات متغيرين.

**ملاحظة:** إذا كان المتغير الأول هو الزمن تسمى سلسلة زمنية.

* 1. – **جدول التوزيع المشترك**: بفرض ان المتغيرين منفصلان و أن الطبعين كميان، الجدول التالي الذي يضم المتغيرتان يسمى جدول التوزيع المشترك، أو الجدول ذي المدخلين.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| المجموع | $$y\_{q}$$ | ... | ... | $$y\_{2}$$ | $$y\_{1}$$ | $Y$ $X$  |
| $$n\_{1.}$$ | $$n\_{1q}$$ | ... | ... | $$n\_{12}$$ | $$n\_{11}$$ | $$x\_{1}$$ |
|  |  |  |  |  | $$n\_{21}$$ | $$x\_{2}$$ |
|  |  |  |  |  |  | . |
| $$n\_{p.}$$ | $$n\_{pq}$$ |  |  |  | $$n\_{p1}$$ | $$x\_{p}$$ |
| $$n$$ | $$n\_{.q}$$ |  |  |  | $$n\_{.1}$$ | المجموع |

 في كل خانة من الجدول، نكتب التكرار $n\_{ij}$ عدد مشاهدة المعطيات حيث $X=x\_{i} $ و $Y=y\_{j}$.

نعرف التكرارات المطلقة التالية:

* + 1. **التكرار الهامشي**:

$n\_{i.}=\sum\_{j=1}^{q}n\_{ij}$ أي مجموع مكونات السطر

$n\_{.j}=\sum\_{i=1}^{p}n\_{ij}$ أي مجموع مكونات العمود

إذن: التوزيع الهامشي $n\_{i.}$ هو عدد الوحدات التي تتمتع بالطبع للمتغير مهما يكن توزيع المتغير .

 التوزيع الهامشي $n\_{.j}$ هو عدد الوحدات التي تتمتع بالطبع للمتغير مهما يكن توزيع المتغير .

**مثال:** كل الطلبة المتحصلين على العلامة 10 في الامتحان مهما كانت علامتهم في الرقابة المستمرة.

* + 1. **التكرار الشرطي:** ويعرف من أجل كل قيمة لـ و .

$n\_{i∕j}=\frac{n\_{ij}}{n\_{.j}} $ و $n\_{j∕i}=\frac{n\_{ij}}{n\_{i.}}$

 $n\_{j∕i}$ *هي توزيع المتغير بتثبيت الطبع للمتغير .*

**مثال:** توزيع علامات الامتحان للطلبة الذين لهم نفس نقطة الرقابة المستمرة.

* + 1. **التكرار النسبي**: و نعرف التكرار النسبي المشترك، التكرارات النسبية الهامشية $f\_{ij}$، $f\_{i.}$ و $f\_{.j}$ .

 $ f\_{ij}=\frac{n\_{ij}}{n}$ و $ f\_{i.}=\frac{n\_{i.}}{n}$ و $ f\_{.j}=\frac{n\_{.j}}{n}$

**قضية:** التكرار النسبي يحقق: $\sum\_{i=1}^{p}\sum\_{j=1}^{q}f\_{ij}=1$ و $f\_{ij}\geq 0;∀i,j$ و $\sum\_{j=1}^{q}f\_{i.}=1$ و$\sum\_{i=1}^{p}f\_{.j}=1$

* + 1. **استقلال المتغيرين**: توزيعي و مستقلان اذا و فقط اذا كان من أجل كل قيمة للأدلة و :

$$f\_{ij}=f\_{i.}×f\_{.j}$$

* + 1. **الدالة التجميعية:** $F\left(x,y\right)=\sum\_{i\leq x}^{}\sum\_{j\leq y}^{}f\_{ij}$
	1. **تمثيل البيانات:** يمكن تمثيل المعطيات بأحد الطرق:
		1. **سحابة النقط:** في معلم متعامد و مناسب، مجموعة النقط $M\_{i}\left(x\_{i};y\_{j}\right)$ تسمى سحابة النقط في $R^{2}$ لسلسلة ذات متغيرين ذوي طبع كمي.

**ملاحظة:** حتى يكون لدراسة سحابة النقط معنى ينبغي ان يكون عدد النقط كبيرا.

* + - 1. **تغيير المبدأ:** نضع: $z\_{i}=x\_{i}-a$ و $t\_{i}=y\_{i}-b$.
			2. **تغيير الوحدة:** نضع $u\_{i}=ky\_{i}$

مثال: الجدول التالي يبين عدد خريجي جامعة لمدة 5 سنوات بدلالة عدد الطلاب

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 815 | 860 | 536 | 796 | 645 | $$x\_{i}$$ |
| 9253 | 6990 | 5219 | 6951 | 6780 | $$y\_{i}$$ |

يمكن إختيار $\grave{O}\left(500;5000\right)$ كمبدأ و 2سم لكل 60 خريجا و 10 سم لـ 800 طالب

* + - 1. **أشكال الإنتشار:**

****

* + 1. **البيان المتعدد:** ويتم استعماله في الطبع الوصفي.
	1. **النقطة المتوسطة:** ونرمز لها بالرمز حيث $G\left(\overbar{x};\overbar{y}\right)$مع$\overbar{x}=\frac{1}{n}\sum\_{i}^{}n\_{i.}x\_{i}$ **و** $\overbar{y}=\frac{1}{n}\sum\_{i}^{}n\_{.j}y\_{j}$**.**
		1. **المتوسطات المتحركة:** هي واحدة من اقدم تقنيات التحليل الاحصائي وتستخدم بشكل رئيسي كأداة لمعرفة الإتجاه.

**تعريف 1-3-1:** لتكن السلسلة الزمنية الاحصائية $x\_{1},x\_{2},…,x\_{n}$ في الأزمنة $t\_{1},t\_{2},…,t\_{n}$ .

\*- الوسط المتحرك من الرتبة حيث: $p=2k+1$ من أجل $t\_{i}$ $\left(2\leq i\leq n-1\right)$ هو وسط القيم $t\_{i-k},…,t\_{i},…,t\_{i+k}$ .

أي: $\frac{t\_{i-k}+…+t\_{i-1}+t\_{i}+t\_{i+1}+…+t\_{i+k}}{p}$

\*- الوسط المتحرك من الرتبة حيث: $p=2k$ من أجل $t\_{i}$ $\left(2\leq i\leq n-1\right)$ هو العدد:

$$\frac{\frac{t\_{i-k}}{2}+…+t\_{i-1}+t\_{i}+t\_{i+1}+…+\frac{t\_{i+k}}{2}}{p}$$

* + 1. **التمليس بالاوساط المتحركة:** تمليس منحنى سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة من الرتبة هو إنجاز منحنى سلسلة أخرى قيمها الاوساط المتحركة من الرتبة لقيم السلسلةالاصلية.

**ملاحظة:** عند تمليس سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة نهمل قيمة عند الاطراف.

**مثال:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1980 | 1979 | 1978 | 1977 | 1976 | 1975 | 1974 | $$t\_{i}$$ |
| 5 | 6 | 8 | 4 | 6 | 7 | 5 | $$x\_{i}$$ |
|  | 6.33 | 6 | 6 | 5.67 | $$\frac{5+7+6 }{3}=6$$ |  | الوسط المتحرك من الرتبة 3 |
|  |  | 5.875 | 6.125 | $$\frac{\frac{5}{2}+7+6+4+\frac{8}{2}}{4}=5.875$$ |  |  | الوسط المتحرك من الرتبة 4 |

* 1. **مقاييس الارتباط:** يستخدم تحليل الارتباط لتحديد نوع و قوة العلاقة بين المتغيرين، وتقاس طبيعة، قوة و أثر العلاقة بين المتغيرين بعدة مقاييس منها:
		1. **التغاير:** و يسمى ايضا التباين المشترك وهو عدد حقيقي يقيس ارتباط و كيفية انتشار النقاط حول النقطة المتوسطة.

$$cov\left(X,Y\right)=\frac{1}{n}\sum\_{i=1}^{p}\sum\_{j=1}^{q}n\_{ij}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)\left(y\_{j}-\overbar{y}\right)$$

باستعمال قاعدة **كوينغ** نجد**:** $cov\left(X,Y\right)=\frac{1}{n}\sum\_{i=1}^{p}\sum\_{j=1}^{q}n\_{ij}x\_{i}y\_{j}-\overbar{x}\overbar{y} $**.**

* + 1. **مقياس الارتباط الخطي:** ويعتبر مقياسا للارتباط الخطي بين متغيرين كميين وهو نسبة دون تمييز – بدون وحدة-

ونرمز له بالرمز $ρ$ في حالة المجتمع و في حالة العينات حيث:

$$ρ=\frac{cov\left(X,Y\right)}{σ\_{X}σ\_{Y}}$$

* + - 1. **خواص:**
1. $ρ\left(X,Y\right)=ρ\left(Y,X\right)$ *ب-* $-1\leq ρ\leq 1$*.*

*ت-*$ρ\left(X,X\right)=1$ *لان* $cov\left(X,X\right)=V\left(X\right):$ *د-* $ρ\left(X,-X\right)=-1$*.*

*ه-* $ρ\left(aX+b,cY+d\right)=ρ\left(X,Y\right); a,c\ne 0$*.*

*برهـــان:* ***باستعمال خاصيتي التبديل و التجميع للضرب و الجمع، وخواص التباين نجد المطلوب.***

*ملاحظة:* ***توجد أزواج من المتغيرات لها نفس التوزيعات الهامشية لكنها تختلف في التغاير و الارتباط لهذا فإن التغاير و معامل الارتباط الخطي يقيسان التداخل بين المتغيرين.***

*مثــال:* ***ليكن و متغيران إحصائيان لهما التوزيع المشترك التالي:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***10*** | ***4*** |  |
| ***7*** | ***2*** | ***5*** | ***1*** |
| ***1*** | ***0*** | ***1*** | ***3*** |
| ***8*** | ***2*** | ***6*** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***3*** | ***1*** |  |
| $$\frac{1}{8}$$ | $$\frac{7}{8}$$ | $$f\_{i.}$$ |

***التواتر الهامشي للمتغير هي:***

 ***نجد:*** $\overbar{x}=1×\frac{7}{8}+3×\frac{1}{8}$ ***و*** $cov\left(X,Y\right)=\frac{1}{8}\left(5×1×4+1×3×4+2×1×10+0×3×10\right)-\frac{10}{8}×\frac{44}{8}$

 **ملاحظة:** ونستخدم في حالة العينات: $r\_{X,Y}=\frac{s\_{X,Y}}{s\_{X}s\_{Y}}$

* + 1. **معامل الارتباط للرتب:** و تستخدم في حالة متغيرات وصفية ترتيبية- مثلا: تقديرات المواد( جيد، حسن،...)...-
			1. **معامل سبيرمان:** $r\_{S}=1-\frac{6\sum\_{i}^{}d\_{i}}{n\left(n^{2}-1\right)}$

حيث **:** $d\_{i}=R\_{i,X}-R\_{i,Y}$**.**أي الفرق بين رتب مستويات المتغير الاول و رتب مستويات المتغير الثاني**.**

* + - 1. **معامل كندال:** $τ=\frac{2S}{n\left(n-1\right)}$حيث مجموع التوافيق لترتيب الثنائيات.

**ملاحظة:** في حالة استعمال هذه المعاملات من أجل ثنائية المتغيرات الطبيعية، وبمعرفة معامل الارتباط الخطي. فمن أجل كبير بالقدرالكافيلدينا:$r\_{S}=\frac{6}{π}arcsin\frac{ρ}{2}$

**مثال :** ليكن تقدير تفضيل 5 سلع حسب مستوى الدخل **.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ب | جـ | ب | ب | أ | تفضيل السلعة |
| حسن | متوسط | متوسط | حسن | جيد | مستوى الدخل |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | الرتب |
| جـ | ب | ب | ب | أ | تقدير 1 |
| 5 | $$\left({2+3+4}/{3}\right)=3$$ | 1 | رتب  |
| متوسط | متوسط | حسن | حسن | جيد | تقدير2 |
| 4.5 | $$\left({2+3}/{2}\right)=2.5$$ | 1 | رتب |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 |  | رتب | رتب |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | جيد | أ |
| 0.25 | 0.5 | 2.5 | 3 | حسن | ب |
| 2.25 | -1.5 | 4.5 | 3 | متوسط | ب |
| 0.25 | 0.5 | 4.5 | 5 | متوسط | جـ |
| 0.25 | 0.5 | 2.5 | 3 | حسن | ب |

ومنه$r\_{s}=1-\frac{6×3}{5\left(25-1\right)}=0.85$و يدل على وجود ارتباط طردي قوي بين تفضيل سلعة معينة و مستوى الدخل.

**ملاحظة:** يمكن استخدام المعاملات السابقة لحساب الارتباط بين متغيرين كميين.

* + 1. **درجة قوة معامل الارتباط:** 
	1. **التعديل – الانحدار- الخطي :** القيام بتسوية خطية أو بتعديل خطي لسحابة النقط يعني ايجاد دالة خطية تعبر بطريقة تقريبية عن بدلالة أي تعيين عددين حقيقيين **،** بحيث**:**$y=ax+b$ **.**

ويهدف الى دراسة و تحليل أثر أحد المتغيرين على الآخر،كذا عملية التنبؤ.

* + 1. **الانحدار الخطي البسيط:** عندما يكون لسحابة النقط $M\_{i}\left(x\_{i},y\_{i}\right)$ المرفقة بسلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين $\left(X,Y\right) $ طبيعيين شكل متطاول فإنه يمكن إنشاء مستقيم تقع حوله نقط السحابة.

معادلة مستقيم الإنحدار هي: $Y=aX+b+ε$ حيث :

 المتغير التابع – المفسر- ، التابع المستقل –المؤثر- الخطأ العشوائي. 

* + - 1. **تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط:** باستعمال طريقة المربعات الدنيا يمكن تعيين معاملات المستقيم

و هو أفضل تقدير و الذي يجعل $\sum\_{i=1}^{n}ε\_{i}^{2}$ أصغريا.

**مبرهنة:** مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هو المستقيم الذي يشمل النقطة المتوسطة لسحابة النقط و معادلته المختصرة:

$y=ax+b$ حيث: $a=\frac{cov\left(X,Y\right)}{V\left(X\right)}$ و $b=\overbar{y}-a\overbar{x}$

البرهان: المتغير عشوائي بينما مقاس دون خطأ، ليكن $y=ax+b$ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا، وليكن $y\_{i}=ax\_{i}+b$ *القيمة المحسوبة . اذن*$S\left(a,b\right)=\sum\_{i=1}^{n}ε\_{i}^{2}=\sum\_{i=1}^{n}\left(y-y\_{i}\right)^{2}=\sum\_{i=1}^{n}\left(\grave{y}\_{i}-ax\_{i}-b\right)^{2}$يكون أصغريا من أجل:

$\frac{dS}{db}=0⇒\sum\_{i=1}^{n}\left(\grave{y}\_{i}-ax\_{i}-b\right)=0⟹b=\overbar{y}-a\overbar{x}$ *و* $\frac{dS}{da}=0⇒\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}\left(\grave{y}\_{i}-ax\_{i}-b\right)=0⟹a=\frac{cov\left(X,Y\right)}{V\left(X\right)}$

* + 1. **مستقيم مايير:** ويتم بكتابة معادلة المستقيم $\left(G\_{1}G\_{2}\right)$ حيث $G\_{1}$ النقطة المتوسطة لنصف النقط الاولى و$G\_{2}$ النقطة المتوسطة للنقط المتبقية.

**مثال :** ندرس نسبة تكاليف – ماء، غاز، كهرباء – من دخل عائلي .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 34 | 30 | 24 | 22 | 14 | 8 | $$x\_{i}=a\_{i}-1970$$ |
| 2.8 | 3.3 | 3.2 | 4.3 | 5.2 | 4.4 | $$y\_{i}\%$$ |

1. مستقيم الانحدار: $a=\frac{\left(8×4.4+…+34×2.8\right)-6×22×3,86}{\left(8^{2}+…+34^{2}\right)-6×22^{2}}=-0.08$ و $b=3.86-\left(-0.08\right)×22=5.58$
2. مستقيم مايير: $G\_{1}\left(14.67,4.63\right)$ و$G\_{2}\left(29.33,3.1\right)$ ومنه $a=-0.06$ و $b=4.89$
	1. **التعديل الدالي :** يرتكز على البحث عن دوال مناسبة، و بتغيير في المتغير نعيد المعادلة للبحث عن مستقيم الانحدار.أي

نضع: $t\_{i}=g\left(x\_{i}\right)$ *و*$z\_{i}=f\left(y\_{i}\right)$ *ونعين معادلة الانحدار بالمربعات الدنيا للمتغيرين الجديدين.*

*أشهر التعديلات الدالية: التعديل الأسي، اللوغاريتمي، التعديل بقطع مكافئ*

***مثال:*** *الجدول التالي يمثل درجة التلوث في مدينة ما على مدار سبع سنوات.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *7* | *6* | *5* | *4* | *3* | *2* | *1* | $$x\_{i}$$ |
| *14.6* | *12.7* | *11.5* | *10.5* | *9.7* | *9.6* | *9.8* | $$y\_{i}$$ |

*برسم سحابة النقط فيوحي شكل الانتشار بوجود قطع مكافئ ذروته* $x=2$*.*

*اذن نبحث عن تعديل من الشكل* $y=a\left(x-2\right)^{2}+b$ *فنضع:* $t\_{i}=\left(x\_{i}-2\right)^{2}$ *ونكتب معادلة الانحدار* $y=at+b$ *ثم نستنتج.*

**العناصر الاساسية لنظرية الاحتمالات**

**-نبذة تاريخية :** ان السمة البارزة للقرن العشرين هي التقدم الواضح في العلوم التجريبية عامة و في الفيزياء خاصة مما أنتج معارف كثيرة و علاقات فيزيائية جديدة فلقد تم اكتشاف النظرية النسبية،نظرية الكم وعلاقة المادة بالإشعاع ...وتم ادراك ان القوانين الكلاسيكية لا تعد صحيحة دائما – الاجسام الصغيرة ذات السرعات الكبيرة- لذا توجب استخدام نظرية الاحتمالات في الفيزياء و في مختلف العلوم . فلقد استخدم مصطلح الاحتمالات منذ نشوئها في القرن 17 لدى محاولة دراسة العاب الحظ بأشكال مختلفة اهمها : الاحتمالات الفيزيائية و الذي يرتبط بالنظم الفيزيائية العشوائية مثل : الذرات المشعة، عجلة الروليت... وفي مثل هذه النظم يميل حدث ما الى الوقوع بمعدل ثابت او بتكرار نسبي على المدى البعيد. وتبلورت في هذا القرن بشكل قوانين مبرهن عليها رياضيا، وتم استخدامها في نطاق واسع في كل العلوم الكونية، الطبية، الاجتماعية، الاقتصادية، ...

ارتبط مفهوم الاحتمال في أذهان الكثيرين بالإمكانية **–** وهي حدث – بينما هي في العلم عدد يقيس حظوظ وقوع حدث أو إمكانية.

* 1. **أساسيات نظرية الاحتمالات:**

**2-1-1- مصطلحات:**

* + - 1. **التجربة العشوائية:** وهي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة لها.
			2. **المجموعة الشاملة:** وهي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية و نرمز لها بΩ-فضاء العينة-.
			3. **الحادث:** نسمي كل عنصر من Ω حدثا اوليا – بسيطا-،اذا كان $A\in Ω$ نقول ان A حادث.
			4. **عشيرة الاحداث:** نقول عن جماعة $Λ$مؤلفة من مجموعات جزئية منΩ انها عشيرة احداث اذا تحققت الشروط التالية:
* $Ω\in Λ$
* $A\in Λ⟹\overbar{A}\in Λ$
* $∀A,B\in Λ:A∪B\in Λ$

 **مثال :**عند رمي زهرة نرد متوازنة نجد :$$Ω=\left\{1,2,3,4,5,6\right\}$$

$Λ=\left\{ϕ,Ω,\left\{1,3,5\right\},\left\{2,4,6\right\}\right\} $ تمثل عشيرة احداث من Ω.

\*عين جماعة من Ω لاتمثل عشيرة احداث؟

* + - 1. **الفضاء القابل للاحتمال** نسمي الثنائية $\left(Ω,Λ\right) $ فضاءا قابلا للاحتمال. مثلا $\left(Ω,P\left(Ω\right)\right)$

 \*- اذا كان $A\in Λ;r\in A/r\in Ω$ نقول ان الحدث A قد أنجز.

**2-2- العمليات على الاحداث:**

* **الحادث الاكيد و الحادث المستحيل**: Ω هي الحادث الاكيد – لابد ان يتحقق احد نواتج Ω-، بينما ϕ تسمى الحادث المستحيل ( ظهور 3 صور عند رمي قطعة نقدية متزنة مرة فقط)
* **الحادث العكسي**: $\overbar{A}$ هي الحادثة العكسية للحادث A وتحوي كل عناصر Ω ماعدا عناصر A ( تقع عندما لا تقع A).
* **الحادثان غير المتلائمين** : كان $A∩B=∅$ نقول ان الحادثتين غير متلائمتين – لا يقعا معا -.

**ملاحظة:** يمكن إجراء مقارنة بين نظرية الحوادث و نظرية المجموعات.

**2-3- طرق العد:** يهتم التحليل التوفيقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة لحساب عدد الحالات الملائمة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال القواعد الرياضية.

**2-3-1- المبدأ الاساسي للعد:**

* + - 1. **قاعدة الضرب:** اذا امكن القيام بعملية ما ب 𝑛 طريقة ممكنة ، وقمنا بعمل اخر ب 𝑚 طريقة ممكنة من اجل كل طريقة من الطرق السابقة فانه يمكن القيام بالعمليتين معا ب 𝑛 x 𝑚 طريقة ممكنة.
			2. **قاعدة الجمع:** ان قاعدة الضرب تطبق في حالة الحوادث غير المتنافية بالتبادل ، اما اذا كان الحدثان متنافيين فان عدد مرات وقوع احدهما او الاخر هو 𝑛 +𝑚طريقة ممكنة.

**مثال:**

1. عدد الخيارات المتاحة لاختيار طالب حسب الجنس و القسم المنتمي له هو 8=2$×$4.
2. عدد الامكانيات المتوفرة لاختيار ممثلين من جنسين مختلفين لفوج متكون من 4 ذكور و 6 اناث هو 4$×$6+6$×$4=48

**2-3-2- قوائم عناصر مجموعة منتهية**

لتكن E مجموعة منتهية ذات 𝑛 عنصرا و 𝑚 عدد طبيعي (𝑛و𝑚 اكبر او يساوي من 1).

نسمي قائمة ذات 𝑚 عنصرا من E كل متتالية مرتبة من 𝑚 عنصرا من عناصر E، أ ي كل عنصر $\left(a\_{1},…,a\_{m}\right)$ من $E^{m}$.

**\*-** عدد قوائم E ذات 𝑚 عنصرا يساوي 𝑚𝑛

**مثال:**ان كل عدد مكون من 3 ارقام مشكلة من الارقام 1.2.3.4.5 هو قائمة ذات 3 عناصر اذن عدد الاعداد هو $5^{3}=125$

**2-3-3- تراتيب عناصر مجموعة منتهية**

نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى ترتيبة ويرمز لعدد الترتيبات ذات 𝑚 عنصرا من بين 𝑛 عنصرا بالرمز $A\_{n}^{m}$ ونكتب:

$$A\_{n}^{m}=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)…\left(n-m+1\right)=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$$

**2-3-3-1- التبديلة:** ترتيبة ذات 𝑛 عنصرا من مجموعة ذات 𝑛 عنصرا تسمى تبديلة ذات 𝑛 عنصرا ، عدد التبديلات

 اذن هو !𝑛 و نكتب: $P\_{n}=A\_{n}^{n}=n!$

**مثال:** في المثال كل عدد ذي 3 ارقام متمايزة مثنى مثنى هو ترتيبة ذات 3 عناصر ، عدد الاعداد هو $3×4×5=60$.

**2-3-3-2- حالة خاصة:** إذا تباديل العناصر من وضعية دائرية فان عدد الطرق هو$P\_{\overbar{n}}=\left(n-1\right)!$.

**مثال:** عدد الطرق التي يمكن لـ 3 أخوة الجلوس حول طاولة مستديرة هو $P\_{\overbar{3}}=2!$.

**2-3-3-3- التباديل مع التكرار:** يراد أحيانا معرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر بعضها متماثلا - متشابه أو مكرر- .

عدد تبديلات و التي يكون منها 1 عنصرا متماثلا، ...، عنصرا متماثلا هو: $P\_{n}^{n\_{1},…,n\_{r}}=\frac{n!}{\prod\_{i=1}^{r}n\_{i}!}$.

**مثال:** عدد الاعداد من ستة أرقام و التي يمكن تكوينها بتكرار الرقم 1 مرتين و 3 مرات الرقم 2 ومرة واحدة الرقم 3 هو $P\_{6}^{2,3,1}=\frac{6!}{2!×3!×1!}=60$ مثلا: 112223،121223....

**2-3-4- التوفيقات**

لتكن E مجموعة منتهيةذات 𝑛 عنصرا و 𝑚 عدد طبيعي حيث $n\geq m\geq 0$، نسمي توفيقة ذات 𝑚 عنصرا من E كل جزء منE ذي 𝑚 عنصرا. نرمز لعدد التوفيقات ذات 𝑚 عنصرا من E بالرمز $C\_{n}^{m}$

**ملاحظة:** $C\_{n}^{n}=1,C\_{n}^{1}=n,C\_{n}^{0}=1$

**مبرهنة:** من اجل كل عددين طبيعيين 𝑛 و𝑚 حيث $n\geq m\geq 0$ نجد:

$$C\_{n}^{m}=\frac{A\_{n}^{m}}{m!}=\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$$

**2-3-4-1- خواص :** من اجل كل عددين طبيعيين 𝑛 و𝑚 حيث $n\geq m\geq 0$ لدينا:

1. $C\_{n}^{m}=C\_{n}^{n-m}$
2. $ C\_{n}^{m}=C\_{n-1}^{m}+C\_{n-1}^{m-1}$

**برهـــان:** 1- $C\_{n}^{n-m}=\frac{n!}{\left(n-m\right)!\left(n-n+m\right)!}=C\_{n}^{m}$

 2-بتوحيد المقامات و التبسيط نحصل على الطرف الثاني انطلاقا من الاول.

2**-3-4-2- التوافيق مع الإعادة:** عدد التوفيقات ذات عنصرا مع إمكانية تكرار العنصر نفسه من مختلف هو:

$$K\_{n}^{r}=C\_{n+k-1}^{r}$$

 **مثال:** عدد العينات المكونة من 3 طلاب و التي يمكن سحبها مع الاعادة من مجموعة ذات 6 طلبة هو $C\_{6+3-1}^{3}=56$

 **2-3-5- دستور ثنائي الحد**

 ليكن a و bعددان طبيعيان ، 𝑛 عدد طبيعي اكبر او يساوي1 لدينا:

$$\left(a+b\right)^{n}=\sum\_{m=0}^{n}C\_{n}^{m}a^{m}b^{n-m}$$

 **برهــــــــان:** نستعمل البرهان بالتراجع

**مثال**: 1- يحتوي صندوق على 5 كرات سوداء و4 كرات بيضاء متشابهة لانفرق بينها في اللمس ، نسحب في آن واحد 3كرات.

 ان كل سحبة هي توفيقة ذات 3 عناصر من9 عناصر و بالتالي عدد السحبات هو:

$$C\_{8}^{3}=84$$

2-$\sum\_{k=0}^{n}C\_{n}^{k}\frac{3^{n-k}}{4^{k}}=\left(3+\frac{1}{4}\right)^{n}=\left(\frac{13}{4}\right)^{n}$

**2-3-5-1- تقريب ستيرلينغ:** من أجل كبيرة، يمكن أن نكتب : $n!≈\sqrt{2πn}n^{n}e^{-n}$

2-3-5-2- مثلث باسكال –الكرخي-: باستعمال الخاصية 2 نستطيع حساب عدد التوفيقة باستعمال الجدول التالي

$$\begin{matrix}n&m&\\1&&\\1&1&\end{matrix}\begin{matrix}&&\\&&\\&&\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2&1\\1&3&3\\1&4&6\end{matrix}\begin{matrix}&&\\1&&\\4&1&\end{matrix}$$

**2-4- مسلمات كلوموغوروف**

لتكن Ω فضاء عينة ، $Λ$ عائلة من الاحداث و ليكن P تابع حقيقي معرف على $Λ$ .نقول عن P انه دالة احتمال و ان $P\left(A\right)$ احتمال الحادث Α اذا تحققت مسلمات كالموغوروف التالية:

$$∀A\in Λ:0\leq P\left(A\right)\leq 1$$

$$P\left(Ω\right)=1$$

$$∀i,j\in N,i\ne j:A\_{i}∩A\_{j}=∅⟹P\left(\bigcup\_{i}^{}A\_{i}\right)=\sum\_{i}^{}P\left(A\_{i}\right)$$

**2-4-1 الفضاء الاحتمالي**

عندما يكون عدد مخارج التجربة العشوائية منتهيا ، نعرف على مجموعة المخارج متتالية اعداد {p1,p2…pk}تحقق $p\_{i}\geq 0 و\sum\_{i=1}^{k}p\_{i}=1$ نسمي هذه الاعداد احتمال

نسمي الثلاثية $\left(Ω,Λ,p\right)$فضاء احتمالي

**مبرهنة :** في حالة تساوي احتمال على Ω ، من اجل كل حادثة Α لدينا:

$$p\left(A\right)=\frac{card\left(A\right)}{card\left(Ω\right)}=\frac{ A لوقوع الملائمة الحالات عدد}{الممكنة الكلية الحالات عدد}$$

**مثال:**نفرض ان احتمال ميلاد ذكر او انثى متساويان، نختار عشوائيا عائلة ذات 5 أطفال ، احتمال ان يكون عدد الاناث اكبر من عدد الذكور هو:

$$P\left(A\right)=P\left(A\_{1}\right)+P\left(A\_{2}\right)+P\left(A\_{3}\right)=\frac{C\_{5}^{5}+C\_{5}^{4}+C\_{5}^{3}}{2^{5}}$$

**2-4-2- خواص و نتائج:** من اجل كل حادثتين Α و Β من $Λ$

$P\left(∅\right)=0$ -**1** **2** -$P\left(\overbar{A}\right)=1-P\left(A\right)$

1. $P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A∩B\right)$
2. $P\left(A-B\right)=P\left(A\right)-P\left(A∩B\right)$
3. $A⊆B⟹P\left(A\right)\leq P\left(B\right)$

**برهــــان:** **1-** لدينا $Ω∪∅=Ω$ *و* $Ω∩∅=∅$ *ومنه:* $P\left(Ω∪∅\right)=P\left(Ω\right)+P\left(∅\right)=P\left(Ω\right)$

 **5-**$A⊆B⟹B=A∪B∖A$ **و منه** $P\left(B\right)=P\left(A\right)+P\left(B∖A\right)$

**ملاحظة:**

* الصيغة السابقة لحساب الاحتمال تستخدم فقط في حالة فضاء عينة منتظم ويعبر عنه "بطريقة عشوائية" للدلالة عليه.
* في فضاء العينة غير المنته و غير القابل للعد، نعتبر تلك التي لها قياس محدود و نجد $P\left(A\right)=\frac{قياسΑ}{قياسΩ}$.

**مثال:** نختار نقطتان و عشوائيا حيث:$0\leq a\leq 3$ *و*$-2\leq b\leq 0$***.*** ما احتمال أن تكون المسافة بي$ $ن و أكبر من 3.

$A=\left\{\left(a,b\right)\in Ω/a-b>3\right\}و Ω=\left\{\left(a,b\right),0\leq a\leq 3,-2\leq b\leq 0\right\}$

$P\left(A\right)=\frac{مساحةΑ }{مساحةΩ}=\frac{1}{3}$

**الاحتمالات الشرطية**

**3-1- تعريف:** لتكن حادثة من فضاء العينة بحيث:$P\left(B\right)>0$.

 يعرف إحتمال وقوع الحدث بفرض أن قد وقع، بعبارة أخرى الإحتمال الشرطي للحدث اذا وقع كمايلي:

$$P\left(A/B\right)=P\_{B}\left(A\right)=\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(B\right)}$$

 **3-1-1- حالة خاصة:** إذا كان فضاءا منتظما منتهيا فإن: $P\left(A/B\right)=\frac{card\left(A∩B\right)}{card\left(B\right)}$

**مثال:** ألقينا زهرتي نرد منتظمتين، إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين مساويا 6، أوجد احتمال أن يكون الرقم الظاهر في إحدى الزهرتين هو 2 .

 لدينا: $B=\left\{\left(1,5\right),\left(2,4\right),\left(3,3\right),\left(4,2\right),\left(5,1\right)\right\}$ و $A=\left\{\left(1,2\right),\left(3,2\right),…,\left(2,6\right)\right\}$

$$P\left(A/B\right)=\frac{card\left(A∩B\right)}{card\left(B\right)}=\frac{2}{5}$$

**3-2- خواص:**

1. $P\_{B}\left(A\right)+P\_{B}\left(\overbar{A}\right)=1$ ب- $P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)P\_{B}\left(A\right)=P\left(A\right)P\_{A}\left(B\right)$

ت-$P\_{B}\left(\bigcup\_{i}^{}A\_{i}\right)=\sum\_{i}^{}P\_{B}\left(A\_{i}\right) ; A\_{i}∩A\_{j}=∅$

**مثال:** يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و 3 خضراء، لا نفرق بينها في اللمس.

 نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع، نضع الكرة المسحوبة الأولى حمراء و الكرة المسحوبة الثانية خضراء.

$$P\left(A\right)=\frac{5}{8} , P\_{A}\left(B\right)=\frac{3}{7} , P\left(A∩B\right)=\frac{5}{8}×\frac{3}{7}$$

**3-3- دستور الإحتمالات الكلية:**

لتكن الاحداث $A\_{1},A\_{2},…,A\_{n}$ *تجزئة لفضاء العينة* $Ω$ *أي: غير خالية و متنافية مثنى مثنى و* $\bigcup\_{i=1}^{n}A\_{i}=Ω$*.*

*لتكن حدث كيفي آخر، لدينا:* $P\left(B\right)=P\left(A\_{1}∩B\right)+…+P\left(A\_{n}∩B\right)=P\left(A\_{1}\right)P\_{A\_{1}}\left(B\right)+…+P\left(A\_{n}\right)P\_{A\_{n}}\left(B\right)$

*اذن:* $P\left(B\right)=\sum\_{i=1}^{n}P\left(A\_{i}\right)×P\_{A\_{i}}\left(B\right)$

***3-4- نظرية باييز:*** *بنفس شروط دستور الاحتمالات الكلية****،*** *من أجل كل لدينا:*

$$P\_{B}\left(A\_{i}\right)=\frac{P\left(A\_{i}∩B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A\_{i}\right)×P\_{A\_{i}}\left(B\right)}{\sum\_{i=1}^{n}P\left(A\_{i}\right)×P\_{A\_{i}}\left(B\right)}$$

***ملاحظة:*** *يمكن اعنبار دستور باييز كإعادة تقييم.*

***مثال:*** *في مصنع به 3 آلات تنتج 50% ،30% و 20% من الانتاج الكلي للمصنع، نسبة التالف هي 3% ،4% و5% من انتاج الآلات على الترتيب.*

 *أختيرت قطعة عشوائيا من إنتاج المصنع ، إحتمال ان تكون معيبة*$P\left(B\right)=0.5×0.03+0.3×0.04+0.2×0.05=0.037$

إذا وجد ان القطعة المختارة تالفة فإحتمال ان تكون من انتاج الآلة الاولى هو $P\_{B}\left(A\_{1}\right)=\frac{0.5×0.03}{0.037}$

**3-5- الحوادث المستقلة:** ليكن $\left(Ω,Λ,P\right)$ فضاء إحتمالي ، نقول عن حادثتين و أنهما مستقلتان اذا وفقط اذا كان:

$$P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\left(B\right)$$

**مثال:** احتمال أن يصيب الهدف هو $\frac{5}{7}$ و إحتمال أن يصيب الهدف هو $\frac{7}{8}$ ، صوب كل منهما نحو الهدف مرة واحدة.

احتمال ان يصاب الهدف هو $P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)=\frac{5}{7}+\frac{7}{8}-\frac{5}{7}×\frac{7}{8}$

**3-5-1- خواص: أ-** $A∐B⟹\left\{\begin{array}{c}\overbar{A}∐B\\A∐\overbar{B}\\\overbar{A}∐\overbar{B}\end{array}\right.$

1. $A∐B\_{1}∧A∐B\_{2}⟹A∐\left(B\_{1}∪B\_{2}\right)$
2. $A\_{i}∐B⟹\bigcup\_{i}^{}A∐B ;A\_{i}∩A\_{j}=∅$

 **برهــــان:** $P\left(\overbar{A}∩B\right)=P\left(B\right)-P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(B\right)\left(1-P\left(A\right)\right)=P\left(\overbar{A}\right)P\left(B\right)$

**3-6- الاشجار البيانية:** من بين الطرق المناسبة لوصف العمليات العشوائية المتتالية ما يسمى بشجرة الاحتمالات، و نستخدم حاصل الضرب لاحتمال ظهور اية نتيجة ممثلة في مسار معطى في هذه الشجرة.