



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Echahid Hamma Lakhdar – El Oued



Faculté de la Technologie
Département de Génie des Procédés et la Pétrochimie

Support de Cours

Transfert de chaleur Cours et exercices corrigés

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie des procédés

Spécialité : Génie des procédés

Niveau : 3^{ème} année LMD



Présenté par :

BARANI Djamel

Maitre de Conférences – B –



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Echahid Hamma Lakhdar – El Oued



Faculté de la Technologie
Département de Génie des Procédés et la Pétrochimie

Support de Cours

Transfert de chaleur Cours et exercices corrigés

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie des procédés

Spécialité : Génie des procédés

Niveau : 3^{ème} année LMD



Présenté par :

BARANI Djamel

Maitre de Conférences – B –

AVANT-PROPOS

Puisque le transfert de chaleur est fondamental pour la réalisation de nouveaux produits dans des domaines tels que les énergies renouvelables, la nanotechnologie, la biotechnologie...etc.

Ces nouvelles applications, ainsi que les applications traditionnelles dans la production d'énergie, nous indiquent que la discipline du transfert de chaleur sera une discipline essentielle et utile pour l'avenir.

Nous nous sommes attachés à rester fidèles à l'approche pédagogique fondamentale de la ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique en conservant une méthodologie stricte et systématique dans la préparation de ce document, en incluant des exemples et exercices corrigés, et en offrant aux étudiants des possibilités de répondre aux objectifs du programme.

Le présent document est adressé aux étudiants du 3^{ème} année génie des procédés licence LMD. On souhaite qu'il soit d'une très bonne aide à la compréhension des mécanismes des différents modes de transfert de chaleur. Ce présent document est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre comporte les différents modes de transfert de chaleur qui seront décrits en termes généraux et accompagnés d'exemples liés aux différents modes. L'objectif est de représenter les différents modes de transfert de chaleur de manière simple et claire. De plus, il vise à initier l'étudiant à ces phénomènes qui existent réellement dans la vie.

Le deuxième chapitre constitue la conduction unidimensionnelle à l'état permanent, le développement de son équation différentielle générale de conduction, dans les diverses coordonnées connues en pratique (cartésiennes, cylindriques ainsi que sphériques). On présente ensuite la loi de Fourier : paroi simple, parois composites, paroi cylindrique, parois cylindriques composées (similarité électrique, résistance totale), ainsi que des problèmes d'ailettes.

Le troisième chapitre est consacré à la convection avec ces types libre et forcée, dans laquelle les équations concernant la conservation (quantité de mouvement, masse et de l'énergie) sont développées. Aussi, les différents nombres sans dimensions et les

Avant-propos

corrélations empiriques couramment utilisées en convection libre et forcée sont aussi étudiés.

Le quatrième chapitre est réservé au rayonnement thermique, commençant par des définitions relatifs à ce mode de transfert, étudier les différent lois qui gouvernent le phénomène du rayonnement thermique tel que : loi de Lambert ; loi de Kirchhoff ; loi de Wien. Aussi, le rayonnement des corps noirs, le rayonnement des corps non noirs et l'échange de chaleur par rayonnement entre surfaces sont aussi étudiés.

Finalement, nous souhaitons que ce document soit entièrement au service du lecteur, en espérant qu'il sera bien content.

Sommaire

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Avant-propos	
Sommaire	
Liste des tableaux	
Liste des figures	
Nomenclatures	1
Chapitre I : Introduction aux transferts thermiques	
1. Introduction	4
2. Système des unités	4
3. Différents modes de transfert de chaleur	5
3.1 La conduction	5
3.2 La convection	6
3.3 Le rayonnement	7
Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction	
1. Conception de la conduction	10
2. Les lois fondamentales de la conduction	10
3. Conduction unidimensionnelle en régime permanent	16
3.1 Equation générale de la conduction	16
3.2 Equation générale de la conduction en coordonnées cylindriques	18
3.3 Equation générale de la conduction en coordonnées sphériques	19
4. Conditions aux limites	19
5. Le régime permanent	20
5.1 Exemple de mur	21
5.2 Convection de la chaleur des surfaces	24
5.3 Exemple de mur en contact avec deux fluides	26
5.4 Exemple de mur composé	28
5.5 Cylindre creux long (tube)	32
5.6 Sphère creuse	33
5.7 Cylindre creux à plusieurs couches	34
5.8 Sphère exposée à la convection des deux côtés	37
5.9 Le rayon critique d'isolation (cylindre et sphère)	39
6. Le transfert de chaleur par des surfaces à ailettes	41
6.1 Principe des ailettes	41

SOMMAIRE

6.2 Développement de l'équation générale unidimensionnelle	41
6.3 Flux dissipé par l'ailette	45
6.4 L'efficacité de l'ailette	46
Chapitre III : Transfert de chaleur par convection	
1. Introduction	53
2. Développement des équations générales de conservation	54
2.1 Équations de conservation de la masse (équation de continuité)	54
2.2 Équations de conservation de la quantité de mouvement	55
2.3 Équation de conservation de l'énergie	56
3. La conception de la couche limite et ses hypothèses	56
3.1 Conception de la couche limite hydrodynamique	56
3.2 Hypothèses de la couche limite	58
4. Régime laminaire et régime turbulent	59
5. Nombres adimensionnels	62
6. Equations expérimentales fréquemment rencontrées	64
6.1 Convection naturelle ou libre	64
6.2 Convection forcée	71
Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement	
1. Nature de rayonnement	81
2. Définitions	82
3. Lois du rayonnement	83
3.1 Loi de Lambert	83
3.2 Propriétés de rayonnement	85
3.3 Loi de Kirchoff	87
4. Rayonnement du corps noir	88
4.1 L'emittance monochromatique	88
4.2 L'emittance totale	90
4.3 Fonctions de rayonnement et émission de bande	90
5. Rayonnement des corps non noirs	92
5.1 Emissivités (facteurs d'émission)	92
6. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces	93
6.1 Le facteur de forme du rayonnement	93
6.2 Échange de rayonnement entre deux surfaces parallèles infinies	94

SOMMAIRE

6.3 Échange de rayonnement entre deux surfaces cylindriques concentriques	96
6.4 Échange de rayonnement entre deux surfaces sphériques concentriques	96
6.5 Les écrans de protection contre les rayonnements et ses effets	97

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Tableau II.1 : Conductivité thermique de divers matériaux à 0°C	12
Tableau III.1 : Valeurs typiques de nombre de Prandtl pour les fluides	63
Tableau III.2 : Corrélations empiriques couramment utilisées dans la convection naturelle	66
Tableau III.3 : Valeurs des constantes C et m en fonction de nombre de Reynolds	77

Liste des figures

Liste des figures

Figure I.1 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par conduction	5
Figure I.2 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par convection naturelle	6
Figure I.3 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par convection forcée	6
Figure I.4 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par rayonnement	7
Figure I.5 : schéma simplifier les trois modes de transfert de chaleur	8
Figure II.1 : Schéma simplifier l'énergie cinétique des corps chauds et froids	10
Figure II.2 : Transmission de la chaleur d'un corps chaud vers un corps froid	11
Figure II.3: Une plaque à laquelle la chaleur est transmise	11
Figure II.4: Bilan thermique dans un volume infinitésimal par rapport au système de coordonnées cartésiennes	16
Figure II.5: Système de coordonnées cylindriques	18
Figure II.6: Système de coordonnées sphériques	19
Figure II.7: Distribution des températures en régime permanent dans une paroi	21
Figure II.8: Distribution des températures dans un mince film de fluide qui adhère sur une paroi	24
Figure II.9: Mur simple en contact avec deux fluides	26
Figure II.10: Mur composé	28
Figure II.11 : cylindre creux	32
Figure II.12 : Cylindre creux multicouche	34
Figure II.13 : Calandre sphérique exposée à la convection des deux côtés	37
Figure II.14 : Cylindre isolé exposé à la convection de la surface extérieure	39
Figure II.15 : Schémas des différents types des ailettes	41

Liste des figures

Figure II.16 : Schéma d'une ailette qui a été placée sur un mur	42
Figure II.17 : Efficacité d'ailettes circulaires, rectangulaires et triangulaires sur une surface plane de largeur w	47
Figure II.18 : Efficacité d'ailettes circulaires de longueur L et d'épaisseur constante t	48
Figure III.1: Schème simplifier la convection naturelle et forcée	53
Figure III.2 : Conservation de la masse pour un fluide incompressible en écoulement sur une plaque plane	54
Figure III.3 : Conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible en écoulement sur une plaque plane	55
Figure III.4 : Conservation de l'énergie pour un fluide incompressible en écoulement sur une plaque plane	56
Figure III.5 : Couche limite au voisinage d'une paroi solide	57
Figure III.6 : Les profils de vitesse dans la couche limite en régime laminaire et turbulent (écoulement sur une plaque plane)	60
Figure III.7 : Représentation de l'expérience de Reynolds	61
Figure III.8 : Schéma simplifier représente la force de flottabilité et de la force de viscosité opposée du fluide	65
Figure III.9 : Ecoulement dans l'espace annulaire (deux conduites)	76
Figure III.10 : Ecoulement perpendiculaire à une conduite	77
Figure III.11 : Écoulement dans le sens perpendiculaire à une série de tuyaux	78
Figure IV.1 : Spectre des ondes électromagnétiques	82
Figure IV.2 : Schéma montrant les effets du rayonnement incident	82
Figure IV.3 : Schéma illustrant l'intensité du rayonnement	83
Figure IV.4 : Schéma illustrant le rayonnement incident, réfléchi et absorbé	86
Figure IV.5 : La variation du pouvoir émissif du corps noir en fonction de la longueur	89

Liste des figures

d'onde pour plusieurs températures

Figure IV.6 : Schéma montrant les éléments de surface utilisés pour dériver le facteur	93
Figure IV.7 : Échange de rayonnement entre deux surfaces parallèles infinies	94
Figure IV.8 : Échange de rayonnement entre deux surfaces cylindriques	96
Figure IV.9 : Échange de rayonnement entre deux surfaces sphériques	96
Figure IV.10 : L'écran antiradiation placé entre deux plaques parallèles	97

Nomenclatures

Nomenclatures

Q : Quantité de chaleur

φ : Densité de flux thermique

K : Conductivité thermique

T : Température

t : Temps

a : Coefficient de diffusivité thermique

β : Coefficient de dilatation volumique

g : Accélération de la force de gravité

ρ : Densité

C_p : Chaleur massique à pression constante

r : Rayon

d, D : Diamètre

e : Epaisseur

R : Résistance thermique

S : Surface

L : Longueur

h : Coefficient de transfert de la chaleur par convection

p : Périmètre

P : Pression

s : Efficacité

δ : Épaisseur de la couche limite

r : Contrainte de cisaillement dans un fluide

Nomenclatures

μ : Viscosité dynamique

ν : Viscosité cinématique

Re : Nombre de Reynolds

Nu : Nombre de Nüsselt

Pr : Nombre de Prandtl

Gr : Nombre de Grashof

Ra : Nombre de Rayleigh

λ : Longueur d'onde

ω : Angle solide

θ, \emptyset : Angles

I : Intensité du rayonnement

E : Pouvoir émissif

G : Taux de rayonnement

F_{ij} : Facteur de forme

C : Vitesse de propagation d'une onde

C_0 : Vitesse de la lumière

ν : Fréquence d'une onde électromagnétique

n : Indice de réflexion d'un milieu

μm : Micromètre

Chapitre I :
Introduction aux transferts
thermiques

1. Introduction

L'énergie est définie comme étant la capacité d'une substance à effectuer un travail. C'est une propriété de la substance et il peut être transféré par l'interaction d'un système et de son environnement. Les interactions d'un système et son environnement sont rencontrés au cours de l'étude de la thermodynamique. Cependant, la thermodynamique traite de l'état final des processus et ne fournit aucune information concernant la structure de la matière et les mécanismes qui ont provoqué le processus. C'est l'étude de ces derniers qui représente la spécialité en question : le transfert de chaleur.

Le transfert thermique se produit de façon naturelle de deux systèmes dès lors qu'il existe une certaine différence de température entre eux, peu importe le milieu qui les sépare, même dans un espace vide.

Dans les chapitres à venir plus tard, nous étudions en détail les trois types de transfert de chaleur : conduction, convection et rayonnement, nous cherchons à expliquer le mécanisme de ces modes de manière qualitative afin que chacun puisse être considéré dans sa propre perspective.

2. Système des unités

Avant d'examiner les trois modes de transfert de chaleur distincts, il convient d'introduire certains termes et unités qui s'appliquent à ces trois modes. Il convient de mentionner que nous utiliserons les unités SI (Système International) dans l'ensemble de ce document.

- Le flux thermique qui est défini comme la puissance échangée par deux points, sera indiqué par le symbole Q . Il est mesuré en Watts (W) et en multiples tels que (kW) et (MW).
- On définit la densité du flux de chaleur comme le flux thermique par une unité de surface. Elle s'exprime comme suit :

$$\rho = \frac{dQ}{S \cdot dT} \quad (I.1)$$

Avec :

$$[\rho] \equiv \text{Watts/m}^2$$

Où : S est la surface à travers laquelle la chaleur se déplace.

- On définit la source de chaleur par la puissance thermique pour laquelle elle est produite. Pour une réaction chimique, elle est exprimée comme suit :

$$\dot{Q} = A_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad (I.2)$$

Où: A_0 et α sont des constantes.

Évidemment, les températures jouent un rôle majeur dans l'étude du transfert de chaleur. Le symbole T sera utilisé pour la température. En unités SI, la température est mesurée en Kelvin ou en Celsius : (K) et (C).

3. Différents modes de transfert de chaleur

On peut définir le transfert de chaleur comme étant une transmission énergétique entre deux régions grâce à la différence entre les deux températures. Il est gouverné par un ensemble de relations physiques.

On appelle généralement les divers types de transfert de chaleur « modes de transfert de chaleur ». On distingue trois modes : la conduction, la convection et le rayonnement.

3.1 La conduction

Elle se produit au niveau moléculaire quand il y a un gradient de température dans un milieu, qui peut être solide, fluide ou entre deux milieux qui sont en contact direct. La chaleur est transférée par conduction à travers ce gradient de température.

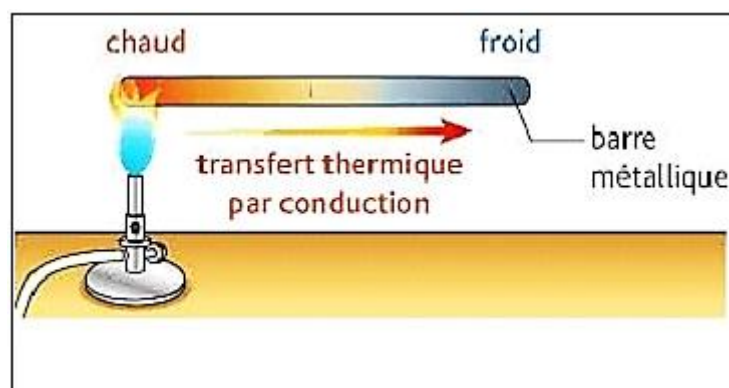


Figure I.1 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par conduction

La conduction est la façon dont la chaleur se déplace entre des objets qui se touchent. La conduction se déplace plus rapidement à travers les solides, mais les fluides peuvent également conduire aussi la chaleur. Certains matériaux, comme le métal, peuvent

conduire la chaleur très rapidement, tandis que d'autres (comme le plastique ou le bois) conduisent la chaleur très lentement.

3.2 La convection

Le phénomène de la convection intervient lors du transfert de chaleur lorsque le fluide est en mouvement relativement à des éléments fixés. Il existe donc deux types de convection : la convection naturelle ou libre et la convection forcée.

3.2.1 Convection naturelle ou libre

Dans la convection naturelle ou libre, le mouvement du fluide est provoqué par les variations de densité résultant de gradients de température générés par le chauffage ou le refroidissement. En d'autres termes, l'écoulement du fluide est influencé par les forces de flottabilité.

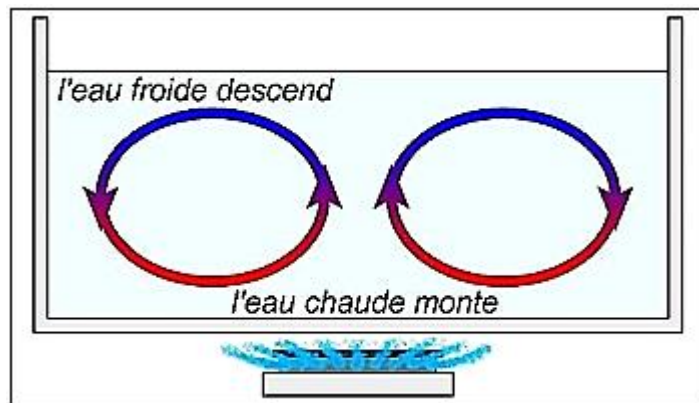


Figure I.2 : schéma simplifié le mode de transfert de chaleur par convection naturelle

3.2.2 Convection forcée

Dans la convection forcée, le mouvement du fluide est provoqué par une influence extérieure. Par exemple, une pompe ou un ventilateur induit le mouvement du fluide, le phénomène est appelé convection forcée.

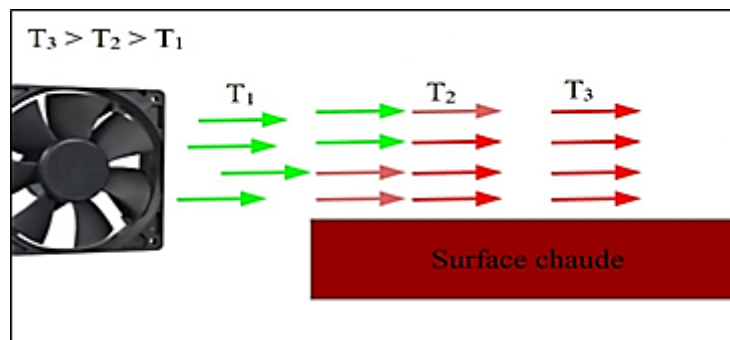


Figure I.3 : schéma simplifié le mode de transfert de chaleur par convection forcée

La convection est la façon dont la chaleur circule dans les fluides - liquides et gaz. Les fluides chauds montent, tandis que les fluides froids descendent. Ce mouvement ascendant et descendant est appelé courant de convection. Le courant de convection diffuse la chaleur de manière circulaire, de haut en bas.

3.3 Le rayonnement

Il s'agit du transfert d'énergie thermique par un phénomène électromagnétique entre un milieu à température élevée et un autre à faible température, quand les deux milieux sont séparés dans l'espace. Ce type de transfert par rayonnement ne nécessite pas un contact physique.

Généralement, les sources de rayonnement sont des corps solides et le rayonnement est la façon dont la chaleur circule dans l'espace vide.

Le flux de rayonnement est donné par la loi de Stephan-Boltzmann comme suit :

$$Q = \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad \text{I.3}$$

S : la surface du corps rayonnée en (m²).

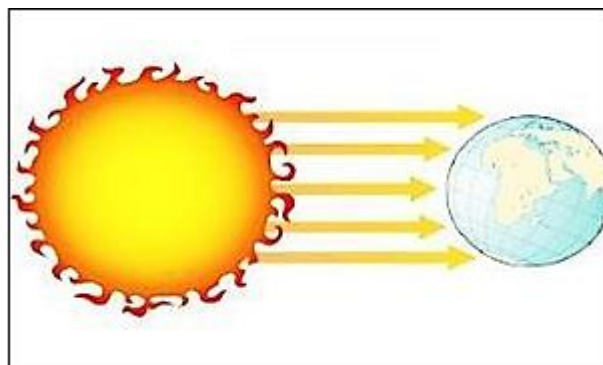


Figure I.4 : schéma simplifier le mode de transfert de chaleur par rayonnement

Des détails supplémentaires sur la conduction, la convection et le rayonnement seront présentés respectivement dans les chapitres II, III et IV.

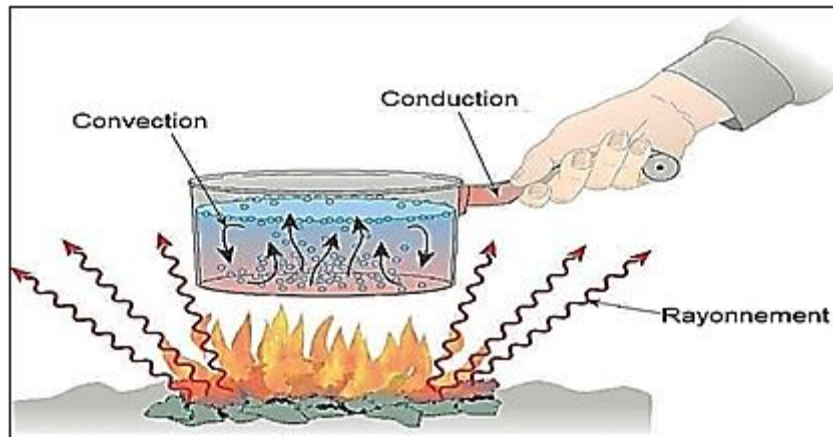


Figure I.5 : schéma simplifier les trois modes de transfert de chaleur

Chapitre II :
Transfert de chaleur par
conduction

1. Conception de la conduction

La conduction est le transfert d'énergie des particules les plus énergétiques d'une substance vers les particules voisines moins énergétiques, suite à des interactions entre les particules. La conduction peut avoir lieu dans des solides, des liquides ou des gaz. Dans les gaz et les liquides, la conduction est due aux collisions et à la diffusion des molécules au cours de leur mouvement aléatoire. Dans les solides, elle est due à la combinaison des vibrations ou rotation des molécules dans un réseau et du transport d'énergie par les électrons libres.

Quand la température d'un élément augmente, l'énergie cinétique des atomes et des molécules qui le composent augmente également, ce qui provoque une augmentation du transfert de chaleur par conduction.

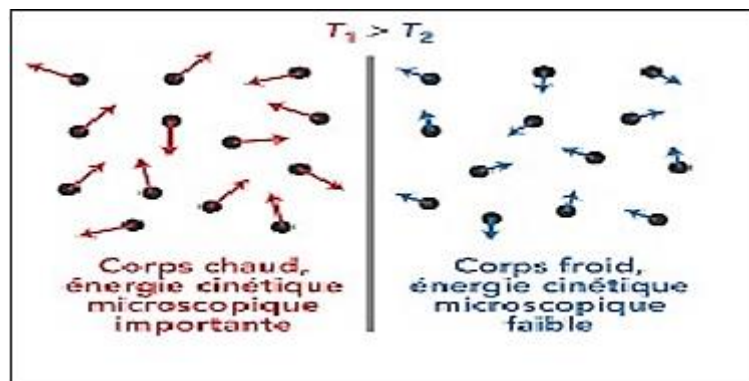


Figure II.1 : Schéma simplifié l'énergie cinétique des corps chauds et froids

2. Les lois fondamentales de la conduction

2.1 Loi de Fourier

Selon les règles classiques de la thermodynamique :

- La conservation de l'énergie est assurée en l'absence de source de chaleur.
- La chaleur est systématiquement transférée du « corps chaud » au « corps froid ».

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

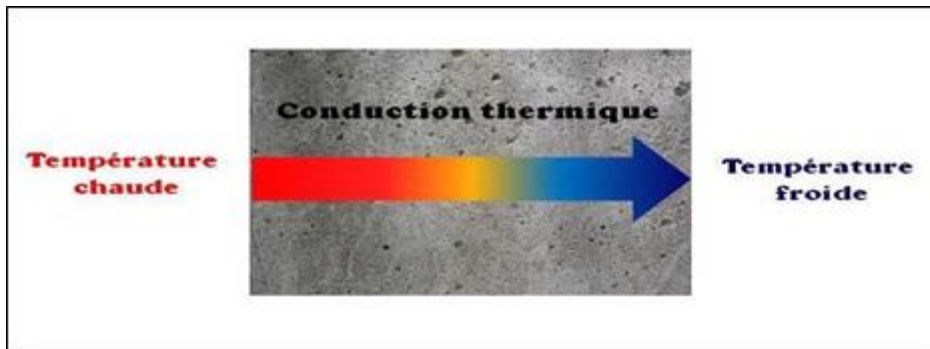


Figure II.2 : Transmission de la chaleur d'un corps chaud vers un corps froid

Soit une plaque (D) de surface S. Soit dQ le flux de chaleur qui est échangé entre la plaque et l'air environnant durant le temps dt .

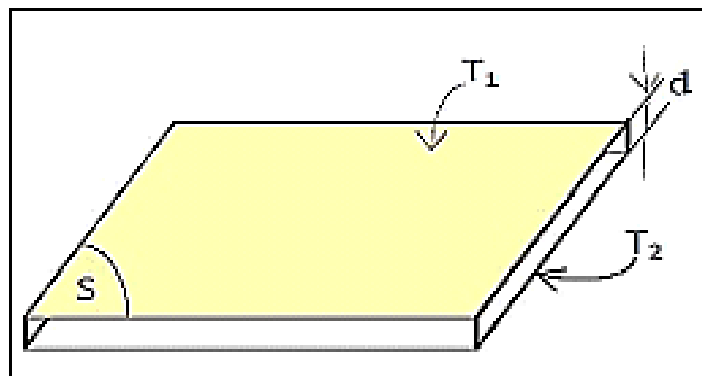


Figure II.3: Une plaque à laquelle la chaleur est transmise

Il peut être prouvé de manière expérimentale que :

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2) \quad (\text{II. 1})$$

Avec:

- $T_1 > T_2$
- Q : Quantité de la chaleur transmise à partir de la plaque (D).
- K : « Conductivité thermique » est une propriété du matériau.

Pour un élément infinitésimal dS , la relation (II.4) s'écrit :

$$dQ = -kdS \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (\text{II. 2})$$

η : Indice normal à la surface.

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

L'équation (II.2) est donnée par Fourier qui exprime sa formule qui peut se résumer de la manière suivante :

« En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique k du milieu et au gradient de la température »

Cela nous amène à la formule vectorielle de la loi de Fourier permettant de définir la densité du flux thermique comme étant la quantité de chaleur transférée par unité de surface. Considérons :

$$\vec{\varphi} = -K \overrightarrow{\text{Grad}} T \quad (\text{II. 3})$$

Remarque

Par accord $\vec{\varphi}$ est positivement comptée dans la direction du flux de chaleur, donc vers les températures décroissantes. $\overrightarrow{\text{Grad}}T$ est un vectoriel sur le même plan mais de direction opposée à celle de φ , donc le signe négatif de la loi de Fourier.

❖ La conductivité thermique

L'équation (II.3) est l'équation de définition de la conductivité thermique. A partir de cette équation, des mesures expérimentales peuvent être effectuées pour déterminer la conductivité thermique de différents matériaux.

Le tableau II.1 montre les valeurs typiques de la conductivité thermique de plusieurs matériaux. En général, la conductivité thermique dépend fortement de la température.

Tableau II.1 : Conductivité thermique de divers matériaux à 0°C

Matériaux	Conductivité thermique (W/m ⁰ C)
Métaux	
Argent (pure)	410
Cuivre (pure)	385
Aluminium (pure)	202
Nickel (pure)	93
Fer (pure)	73
Matériaux non métalliques	
Diamant	2300

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Magnésite	4.15
Marbre	2.08 – 2.94
Verre	0.78
Bois	0.059

❖ *Exercice d'application 1 :*

La densité du flux de chaleur qui traverse une plaque de 50 mm d'épaisseur est 70W/m^2 . Mesurez la différence de température sur les surfaces de la plaque ainsi que les valeurs du gradient de température dans le cas où la plaque est :

- (a) en laiton ($k = 100\text{ w/m.k}$).
- (b) en granit ($k = 2,5\text{w/m.k}$)
- (c) en bois ($k = 0,23\text{W/ mK}$).

Solution :

Calcul de la différence de température sur les surfaces de la plaque ainsi que les valeurs du gradient de température :

(a) Plaque en laiton :

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2) = K \frac{S}{d} \Delta T$$

$$\rho = \frac{Q}{S} = \frac{k}{d} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\rho \cdot d}{k}$$

$$\Delta T = \frac{70 \cdot 0,05}{100} = 0,035\text{ K}$$

$$|\text{GradT}| = \left| \frac{dT}{dS} \right| = \frac{\Delta T}{d}$$

$$|\text{GradT}| = \frac{0,035}{0,05} = 0,7\text{ k/m}$$

(b) Plaque en granit :

$$\Delta T = \frac{70 \cdot 0,05}{2,5} = 1,4\text{ K}$$

$$|\text{GradT}| = \frac{1,4}{0,05} = 28\text{ k/m}$$

(c) Plaque en bois :

$$\Delta T = \frac{70.0,05}{0,23} = 15,2 \text{ K}$$

$$|\text{GradT}| = \frac{15,2}{0,05} = 303 \text{ k/m}$$

❖ **Exercice d'application 2 :**

Calculez le flux de chaleur et sa densité dans une plaque homogène d'une épaisseur de 50 mm, si celle-ci est en :

1. Acier inoxydable ($k = 16 \text{ w/mk}$) de dimensions 3m x 2m.
2. Béton ($k = 0,92 \text{ w/mk}$) de dimensions 30m x 20m.

Les températures sur les surfaces de la plaque sont constantes dans les deux cas et égales à : $T_1 = 100^\circ\text{C}$ et $T_2 = 90^\circ\text{C}$.

Solution :

- (1) Plaque en acier :

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2)$$

$$Q = 16 \frac{(3.2)}{0,05} (100 - 90) = 19200 \text{ w}$$

$$\rho = \frac{Q}{S} = \frac{19200}{(3.2)} = 3200 \text{ w/m}^2$$

- (2) Plaque en béton :

$$Q = 0,92 \frac{(30.20)}{0,05} (100 - 90) = 110400 \text{ w}$$

$$\rho = \frac{Q}{S} = \frac{110400}{(30.20)} = 184 \text{ w/m}^2$$

✚ **Remarque :**

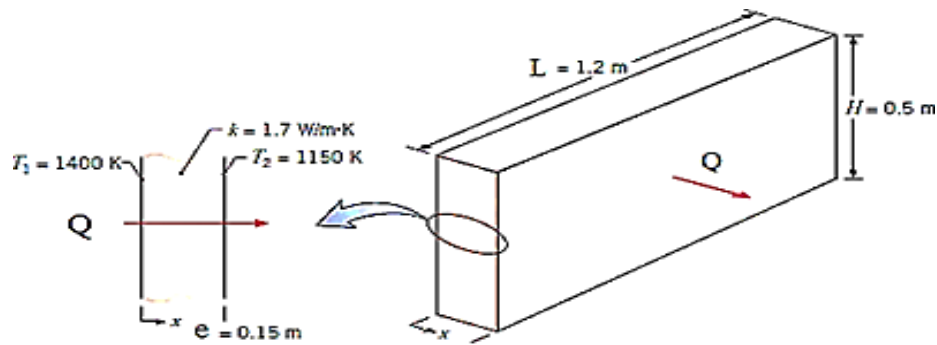
En effet, la densité du flux thermique indique la capacité de transmission de la chaleur par conduction d'un élément. On peut conclure de ce cas que l'acier est beaucoup plus conducteur que le béton.

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

❖ Exercice d'application 3 :

La paroi d'un four industriel est construite en brique d'argile réfractaire de 0,15 m d'épaisseur ayant une conductivité thermique de 1,7 w/m.k. Les mesures effectuées en régime permanent indiquent des températures de 1400 et 1150 k sur les surfaces intérieure et extérieure, respectivement.

Quel est la quantité de chaleur qui transmit ce mur si est de 0,5 m sur 1,2 m de côté ?



Solution :

Calcul la quantité de chaleur qui transmit ce mur : $T_1 = 1400^\circ\text{k}$; $T_2 = 1150^\circ\text{k}$; $d = 0.15 \text{ m}$

$$S = L \cdot H$$

$$S = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6 \text{ m} ; k = 1,7 \text{ w/m}^\circ\text{k}$$

Le flux de chaleur qui traverse le mur est :

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2)$$

$$Q = 1,7 \frac{0,6}{0,15} (1400 - 1150)$$

$$Q = 1700 \text{ w}$$

❖ Exercice d'application 4 :

Déterminez la perte de chaleur à partir d'un mur de briques de 8 cm d'épaisseur, de 4 mètres de haut et de 2 mètres de large. Les températures des deux côtés du mur sont les suivantes : 35°C et 3°C . ($k = 0,69 \text{ w/m}\cdot^\circ\text{C}$).

Solution :

Calcul de la perte de chaleur :

$$T_1 = 35^\circ\text{C} ; T_2 = 3^\circ\text{C} ; d = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$$

$$S = L \cdot H = 2.4 = 8 \text{ m}$$

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2)$$

$$Q = 0,69 \frac{8}{0,08} (35 - 3)$$

$$Q = 2208 \text{ w}$$

3. Conduction unidimensionnelle en régime permanent

Pour la description analytique ou mathématique, il faut d'abord développer l'équation générale de conduction dans les coordonnées cartésiennes et ensuite, en utilisant avec le même système, en déduire, dans les coordonnées cylindriques et sphériques.

3.1 Equation générale de la conduction

En considérant un volume infinitésimal v et en effectuant le bilan thermique relatif à ce volume pendant le temps dt , on peut développer l'équation de conduction thermique ou simplement l'équation de la chaleur dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) (figure II.4).

Le bilan énergétique sur cet élément peut être exprimé comme :

$$\left[\text{Quantité de chaleur entrée} \right] - \left[\text{Quantité de chaleur sortie} \right] + \left[\text{Quantité de chaleur générée} \right] = \left[\text{énergie interne de l'élément} \right]$$

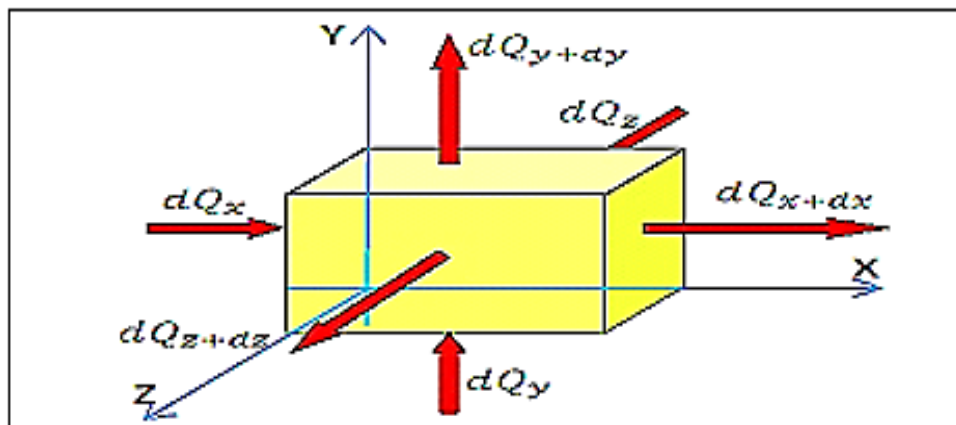


Figure II.4: Bilan thermique dans un volume infinitésimal par rapport au système de coordonnées cartésiennes

L'application de la loi de Fourier nous permet de déterminer les quantités de chaleur par rapport à la section perpendiculaire à l'axe des x (à titre d'exemple)

- La quantité de chaleur transmise à travers la surface (entrée) selon la direction (x) est indiquée par la loi de Fourier :

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

$$dQ_x = -k(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad dS = dydz \quad (\text{II. 4})$$

- La quantité de chaleur transmise à travers la surface (sortie) selon la direction (x) est indiquée par :

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x} (dQ_x) dx + \dots \text{ (Série de Taylor)}$$

$$dQ_{x+dx} = -k(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-k(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$$

$$dQ_{x+dx} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dydz \quad (\text{II. 5})$$

Le bilan thermique par rapport à l'axe des x est le suivant :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -k \frac{\partial T}{\partial x} (dydz) + k \frac{\partial T}{\partial x} (dydz) + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx dy dz) \quad (\text{II. 6})$$

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \quad (\text{II. 7})$$

Nous avons développé les équations de la même manière que pour la direction x en exprimant les différentes quantités de chaleur mises en jeu par rapport aux parois perpendiculaires aux axes y et z :

- Suivant l'axe des (y) :

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (\text{II. 8})$$

- Suivant l'axe des (z) :

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (\text{II. 9})$$

Le bilan des quantités de chaleur qui sont transférées à travers le volume V par conduction est le suivant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) dx dy dz \quad (\text{II. 10})$$

La quantité de chaleur Q' (x, y, z, t) produite dans l'élément par unité de temps et de volume sera :

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

$$\dot{Q} \, dx \, dy \, dz \quad (\text{II. 11})$$

La quantité de chaleur par conduction qui entre dans l'élément de volume V et la quantité qui est créée s'associent pour augmenter l'énergie interne de l'élément. Cette augmentation est représentée comme suit :

$$\rho c \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 12})$$

Le bilan énergétique final donne :

$$\rho c \, \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \dot{Q} \quad (\text{II. 13})$$

Ceci représente l'équation générale de conduction en coordonnées cartésiennes. Cette équation est générale et applicable à un milieu hétérogène anisotrope parce que :

$$\begin{cases} k = k(x, y, z, t) \\ \rho = \rho(x, y, z, t) \\ c = c(x, y, z, t) \end{cases}$$

Dans le cas d'un corps homogène et isotrope, l'équation (II.13) devient alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c} \quad (\text{II. 14})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho c} \quad (\text{II. 15})$$

Où : $\alpha = k/\rho c$ est le coefficient de diffusivité thermique.

3.2 Equation générale de la conduction en coordonnées cylindriques

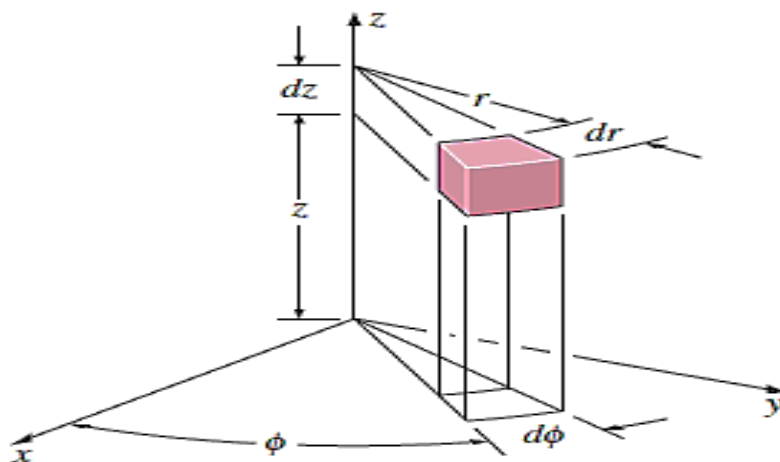


Figure II.5: Système de coordonnées cylindriques

Sachant que :

$$\begin{cases} x = r \cos \varnothing \\ y = r \sin \varnothing \\ z = z \end{cases}$$

On écrit l'équation de la chaleur dans les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varnothing^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c} \quad (\text{II. 16})$$

3.3 Equation générale de la conduction en coordonnées sphériques

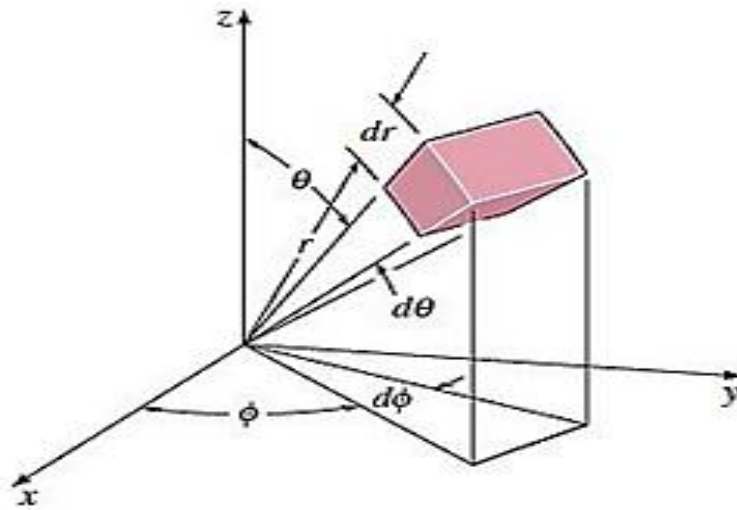


Figure II.6: Système de coordonnées sphériques

Sachant que :

$$\begin{cases} x = r \cos \varnothing \sin \theta \\ y = r \sin \varnothing \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

On écrit l'équation de la chaleur dans les coordonnées sphériques comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varnothing^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c} \quad (\text{II. 17})$$

4. Conditions aux limites

Les équations générales de la conduction ont des équations différentielles partielles linéaires du second ordre, ont été élaborées à partir d'un bilan énergétique d'un volume V, et elles restent les mêmes, quelle que soit les conditions thermiques à la surface du

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

milieu. C'est-à-dire que les équations différentielles n'intègrent aucune information relative aux conditions sur les surfaces, comme la température de surface ou un flux de chaleur déterminé.

Pourtant, nous savons que le flux de chaleur et la répartition de la température dans un milieu dépendent des conditions des surfaces et de la description d'un transfert de chaleur dans un milieu n'est pas complet sans une description complète des conditions aux surfaces limites du système.

Les équations générales de conduction offrent un nombre illimité de solutions mathématiques qui ne peuvent prendre un sens physique que pour des conditions bien définies qui correspondent à des facteurs déterminant l'évolution du phénomène : on parle alors de conditions aux limites.

5. Le régime permanent

Nous souhaitons maintenant examiner les applications de la loi de Fourier sur la conduction thermique au calcul du flux thermique dans certains systèmes unidimensionnels simples. Plusieurs formes physiques différentes peuvent entrer dans la catégorie des systèmes unidimensionnels : les systèmes cylindriques et sphériques sont unidimensionnels lorsque la température dans le corps est uniquement fonction de la distance radiale et est indépendante de la distance axiale. Dans certains problèmes bidimensionnels, l'effet d'une coordonnée du second espace peut être si faible qu'il justifie sa négligence, et le problème multidimensionnel du flux de chaleur peut être approché par une analyse unidimensionnelle.

Dans ces cas, les équations différentielles sont simplifiées, et nous sommes amenés à une analyse beaucoup plus facile. Cette simplification a permis de trouver des solutions qui ont un sens physique.

Dans le régime permanent ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), absence de source de chaleur ($Q' = 0$), la distribution de la température dans un milieu homogène et isotrope répond à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II. 18})$$

Nous ne nous intéresserons pas dans ce qui suit à la résolution mathématique de

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

l'équation au sens général, mais considèreront des cas pratiques qui sont souvent les plus employés.

5.1 Exemple de mur

Rappelons que le transfert de chaleur dans une certaine direction est déterminé par le gradient de température dans cette direction. Il n'y aura pas de transfert de chaleur dans une direction où il n'y a pas de changement de température. Les mesures de température à plusieurs endroits sur la surface intérieure ou extérieure de la paroi confirmeront qu'une surface de paroi est presque isotherme, (les températures en haut et en bas de la surface d'une paroi sont presque identiques).

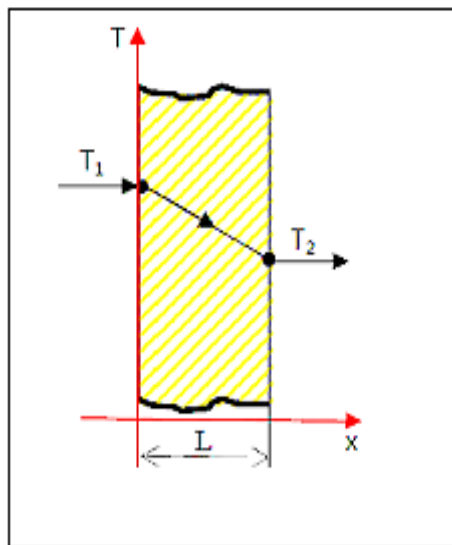


Figure II.7: Distribution des températures en régime permanent dans une paroi

La faible épaisseur de la paroi provoque le gradient de température dans la direction de la surface intérieure vers la surface extérieure à être grande. De plus, si les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la maison restent constants, alors le transfert de chaleur à travers le mur d'une maison peut être modélisé comme stable et unidimensionnel. La température de la paroi dans ce cas dépendra d'une seule direction (la direction selon x).

L'équation fondamentale de la chaleur notée (II.13), en ignorant les différentes sources de chaleur en régime permanent supposées non existantes, on obtient la formule suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Qui possède une solution de la forme :

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Les constantes C_1 et C_2 sont évaluées à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T = T_1 \text{ pour } x = 0 \\ T = T_2 \text{ pour } x = L \end{cases}$$

Appliquant ces conditions, on obtient :

$$C_2 = T_1 \text{ et } C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

D'où :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 \quad (\text{II. 20})$$

En régime permanent, le flux de chaleur est toujours constant, et la loi de Fourier nous autorise à écrire :

$$Q = -KS \frac{dT}{dx} \quad (\text{II. 21})$$

$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$ C'est la pente de la droite représentée en figure II.6

Donc :

$$Q = KS \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (\text{II. 22})$$

Le flux thermique à travers une paroi plane est proportionnel à la conductivité thermique moyenne, à la surface de la paroi et à la différence de température, mais il est inversement proportionnel à l'épaisseur de la paroi. De plus, une fois que le taux de conduction thermique est disponible, la température $T(x)$ en tout point x peut être déterminée en remplaçant T_2 dans l'équation (II.22) par T , et L par x .

❖ *Le concept de résistance thermique*

L'équation (II.22) pour la conduction de la chaleur à travers une paroi plane peut être réarrangée comme suit :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad (\text{II. 23})$$

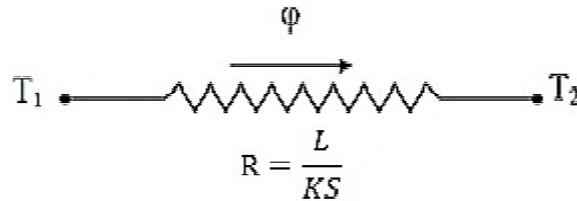
Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Où

$$R = \frac{L}{KS} \quad (\text{II. 24})$$

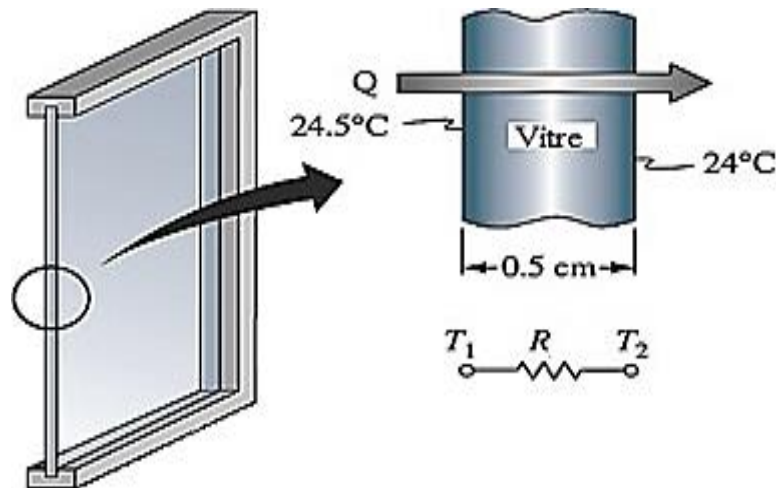
$$[R] \equiv \text{°C}/\text{w}$$

C'est la résistance thermique de conduction du mur, et le schéma électrique équivalent peut être représenté comme suit :



❖ Exercice d'application 5 :

Calculer la résistance thermique et le flux de transfert de chaleur à travers une vitre de 1 m de haut, 0,5 m de large et 0,5 cm d'épaisseur, si la température de la surface extérieure est de 24°C et celle de la surface intérieure de 24,5°C. La conductivité thermique de la vitre est 8,81 w/m.k.



Solution :

Calcul de la résistance thermique R :

$$R = \frac{L}{KS}$$

$$R = \frac{0,005}{8,81 \cdot 1,05} = 0,0123 \text{ k/w}$$

Calcul de flux thermique :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

$$Q = \frac{24,5 - 24}{0,0123} = 40 \text{ w}$$

5.2 Convection de la chaleur des surfaces

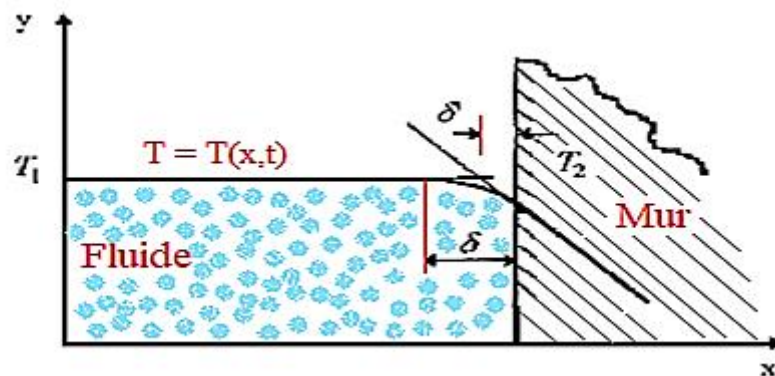


Figure II.8: Distribution des températures dans un mince film de fluide qui adhère sur une paroi

Pour un fluide s'écoulant sur une paroi solide, la répartition de la température est représentée sur la figure II.8. A l'intérieur du fluide, le gradient de température est limité à une fine couche près de la paroi, tandis que la température est considérée constante loin de la paroi.

Afin de simplification la répartition des températures, leur courbe est remplacée par une ligne droite représentée par un point sur la figure II.8. En termes physiques, cela correspond à l'hypothèse qu'un mince film d'épaisseur δ est accolé à la paroi et que c'est par lui que s'effectue la révolution de la température. Puisque le profil de température est supposé être une ligne droite, on peut supposer que le transfert de chaleur se fait par conduction comme dans le cas d'une paroi solide. Cette hypothèse permet de bien simplifier les mécanismes qui se produisent en réalité et nous autorise à écrire que :

$$Q = \frac{K_{fluide}}{\delta} S. (T_{fluide} - T_{surface}) \quad (II. 25)$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

La quantité de chaleur Q peut donc être établie lorsque (δ) est connue. Cette épaisseur est dépendant de différents paramètres comme la vitesse du fluide, la forme de la surface ainsi que sa structure. Il est préférable dans la pratique de se baser sur le rapport $\left(\frac{K_{fluide}}{\delta}\right)$ au lieu de (δ). Notons que :

$$h = \frac{K_{fluide}}{\delta} \quad (II.23)$$

h : Coefficient de transfert de la chaleur par convection.

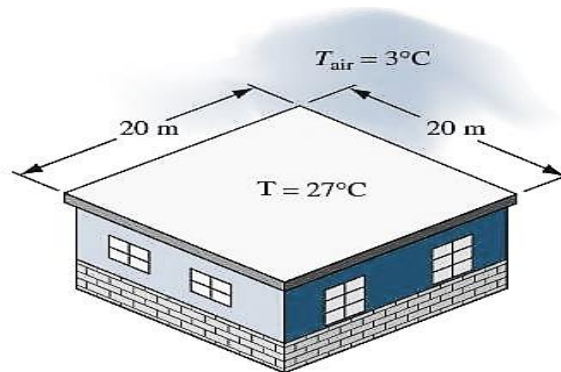
Ceci conduit à une relation qui exprime la quantité de chaleur échangée par convection du fluide par rapport à la paroi :

$$Q = h.S.(T_{fluide} - T_{mur}) \quad (II.24)$$

Qui est la loi de Newton.

❖ *Exercice d'application 6 :*

Si la température de la surface du toit est égale à 27°C , la température de l'air est égale à -3°C et le coefficient de transfert de chaleur par convection est égal à $10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, déterminez la quantité de chaleur qui circule par convection naturelle entre le toit d'un bâtiment ($20\text{m} \times 20\text{m}$) et l'air ambiant.



Solution :

$$Q = h.S.(T_{toit} - T_{air})$$

$$S = 20.20 = 400 \text{ m}^2$$

$$Q = 10.400.(27 - (-3))$$

$$Q = 120000 \text{ w}$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

❖ *Le concept de résistance thermique*

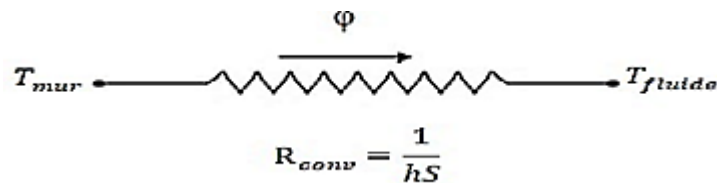
La loi de Newton (équation II.24) pour le transfert de chaleur par convection d'une surface solide de surface S et de température T_{mur} vers un fluide dont la température suffisamment éloignée de la température de la surface est T_{fluide} , peut être réarrangée comme suit :

$$Q = \frac{T_{mur} - T_{fluide}}{R_{conv}} \quad (II.28)$$

Où

$$R_{conv} = \frac{1}{hS} \quad (II.29)$$

Le schéma électrique équivalent peut être représenté comme suit :



5.3 Exemple de mur en contact avec deux fluides

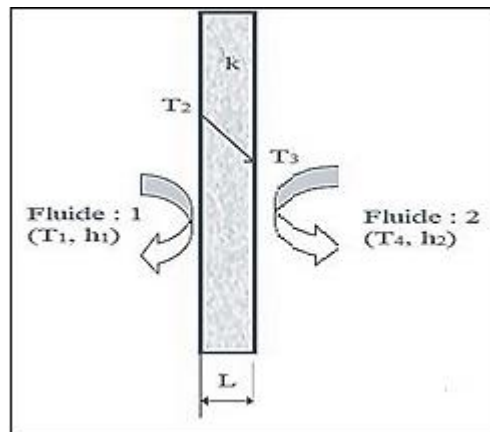


Figure II.9: Mur simple en contact avec deux fluides

Considérons maintenant un flux thermique unidimensionnel régulier à travers une paroi plane d'épaisseur L , la surface S et la conductivité thermique k qui est exposée à la convection sur des deux côtés aux fluides à des températures T_1 et T_4 avec des coefficients de transfert de chaleur h_1 et h_2 , respectivement, comme le montre la figure II.9. En supposant $T_1 > T_4$, la variation de température sera comme indiqué dans la figure.

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

La conservation du flux de chaleur nécessite :

$$Q = h_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_2) = K \frac{S}{L} (T_2 - T_3) = h_2 \cdot S \cdot (T_3 - T_4) \quad (\text{II. 30})$$

Ce qui peut être exprimé par :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1 \cdot S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L}{K \cdot S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{1}{h_2 \cdot S}}$$

D'où:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{cv1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_{cd}} = \frac{T_3 - T_4}{R_{cv2}} = \frac{T_1 - T_4}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}} \quad (\text{II. 31})$$

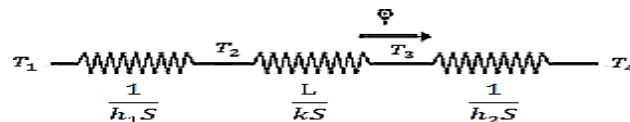
$$Q = \frac{T_1 - T_4}{R} \quad (\text{II. 32})$$

Où

$$R = R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2} = \frac{1}{hS} + \frac{L}{kS} + \frac{1}{hS} \quad (\text{II. 33})$$

Où par analogie avec l'électricité, R_{cv1} , R_{cd} et R_{cv2} sont appelées les résistances thermiques.

On peut se représenter cela par un schéma équivalent électrique comme suit :



Notons également que les résistances thermiques sont en série, et que la résistance thermique équivalente est déterminée par la simple addition des résistances individuelles, tout comme les résistances électriques connectées en série.

Observation

À partir de l'équation II.32, le rapport entre la chute de température et la résistance thermique à travers une couche est constante, et donc la chute de température à travers une couche est proportionnelle à la résistance thermique de la couche. Plus la résistance est importante, plus la chute de température est importante. En effet, l'équation II.32 peut être réorganisée comme :

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

$$\Delta T = Q \cdot R \quad (\text{II. 34})$$

Par conséquent, la loi de Fourier et la loi de Newton qui permettent respectivement de déterminer les quantités de chaleur transmise par conduction et par convection peuvent être assimilées à la loi d'Ohm qui détermine la différence de potentiel entre deux points d'un circuit électrique en se basant sur la résistance de ce dernier et sur l'intensité du courant qui le parcourt :

$$\begin{cases} \frac{L}{K \cdot S} Q = T_1 - T_2 \rightarrow \text{Loi de Fourier} \\ \frac{1}{h \cdot S} Q = T_1 - T_2 \rightarrow \text{Loi de Newton} \\ R I = U_1 - U_2 \rightarrow \text{Loi d'Ohm} \end{cases}$$

5.4 Exemple de mur composé

Dans la pratique, nous rencontrons souvent des murs plans composés de certaines couches de différents matériaux. Le concept de résistance thermique peut encore être utilisé pour déterminer le taux de transfert de chaleur constant à travers ces parois composites.

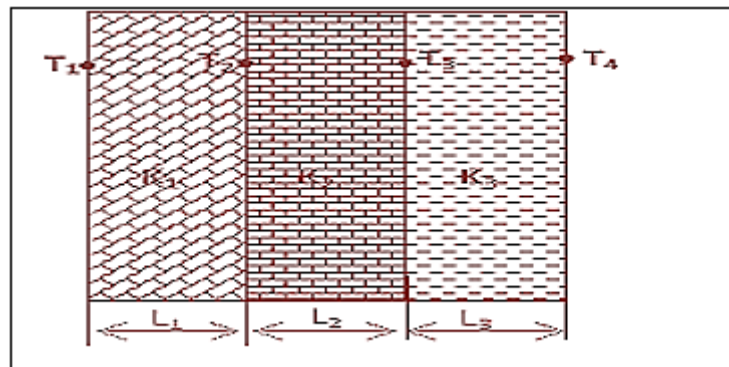


Figure II.10: Mur compose

Considérons un mur plan constitué de trois couches comme le montre la figure II.10. Le taux de flux thermique régulier à travers cette paroi composite à trois couches peut être exprimé comme suit :

La conservation du flux de chaleur implique :

$$Q = K_1 \cdot \frac{S}{L_1} \cdot (T_1 - T_2) = K_2 \cdot \frac{S}{L_2} \cdot (T_2 - T_3) = K_3 \cdot \frac{S}{L_3} \cdot (T_3 - T_4) \quad (\text{II. 35})$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{K_1 \cdot S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_2}{K_2 \cdot S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_3}{K_3 \cdot S}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_3 - T_4}{R_3}$$
$$Q = \frac{T_1 - T_4}{R} \quad (\text{II.36})$$

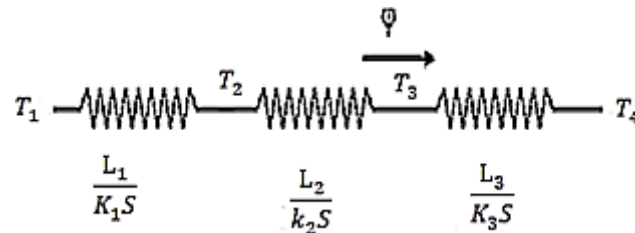
Avec :

$$R = \sum R_i$$

Le mur constitué de plusieurs couches se présente alors comme une paroi unique de résistance thermique :

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$
$$R = \frac{L_1}{K_1 \cdot S} + \frac{L_2}{K_2 \cdot S} + \frac{L_3}{K_3 \cdot S} \quad (\text{II.37})$$

On peut se représenter cela par un schéma équivalent électrique comme suit :



❖ Exercice d'application 7 :

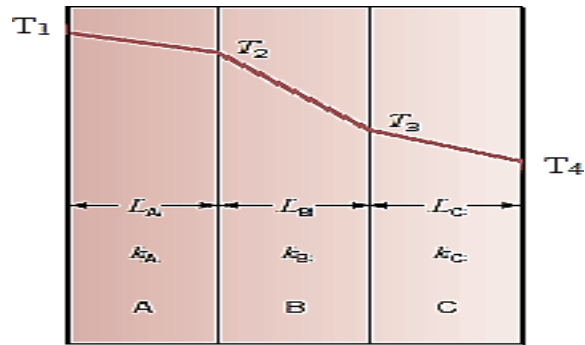
La paroi d'un four est composée de trois rangées de différents matériaux placées les unes à côté des autres :

- Un rangée de briques réfractaires ($K_1 = 1,21 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$)
- Un rangée de garnissage thermo-isolant ($K_2 = 0,08 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$)
- Un rangée de briques ($K_3 = 0,69 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$)

Chacune des trois rangées à une épaisseur de 10 cm.

Les températures sont : 872°C et 32°C à l'intérieur du four et à l'extérieur respectivement.

1. Déterminez la quantité de chaleur perdue par conduction, si la surface du mur est de 42 m^2 .
2. Combien mesure la température T_m au centre du garnissage thermo-isolant ?



Solution :

1. La perte calorifique par conduction

$$T_1 = 872^\circ\text{C} ; T_4 = 32^\circ\text{C}$$

$$K_1 = 1.21 \text{ W/m}^\circ\text{C}; K_2 = 0.08 \text{ W/m}^\circ\text{C}; K_3 = 0.69 \text{ W/m}^\circ\text{C}. S = 42 \text{ m}^2 ; L_1 = L_2 = L_3 = 0.10 \text{ m}.$$

$$Q = \frac{T_1 - T_4}{R}$$

La paroi du four constitué de plusieurs couches se présente alors comme une paroi unique de résistance thermique :

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R = \frac{L_1}{K_1 \cdot S} + \frac{L_2}{K_2 \cdot S} + \frac{L_3}{K_3 \cdot S}$$

$$R_1 = \frac{L_1}{K_1 \cdot S} = \frac{0,10}{1,21 \cdot 42} = 0,002 \text{ }^\circ\text{C/k}$$

$$R_2 = \frac{L_2}{K_2 \cdot S} = \frac{0,10}{0,08 \cdot 42} = 0,0297 \text{ }^\circ\text{C/k}$$

$$R_3 = \frac{L_3}{K_3 \cdot S} = \frac{0,10}{0,69 \cdot 42} = 0,00345 \text{ }^\circ\text{C/k}$$

$$Q = \frac{872 - 32}{0,002 + 0,0297 + 0,00345} = 23,87 \text{ kw}$$

2. La température T_m au centre du garnissage thermo-isolant :

$$Q = K_1 \cdot \frac{S}{L_1} \cdot (T_1 - T_2) \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{Q \cdot L_1}{K_1 \cdot S}$$

$$T_2 = 825 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$Q = K_3 \cdot \frac{S}{L_3} \cdot (T_3 - T_4) \Rightarrow T_3 = T_4 + \frac{Q \cdot L_3}{K_3 \cdot S}$$

$$T_3 = 114,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

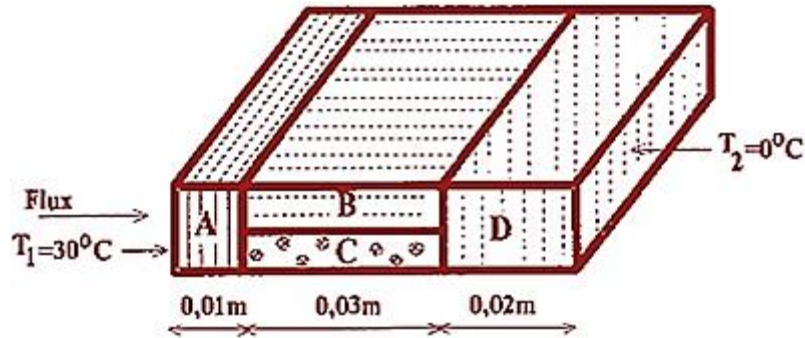
$$T_m = \frac{T_2 + T_3}{2} = 469,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

❖ Exercice d'application 8 :

Considérons un mur composé comme représenté sur la figure ci-dessous. En supposant que la conduction est unidimensionnelle. Déterminez la quantité de chaleur par unité de surface au travers de ce mur. Sachant que :

$k_A = 175 \text{ W/mk}$; $K_B = 35 \text{ W/mk}$; $K_C = 80 \text{ W/mk}$; $K_D = 55 \text{ W/mk}$.



Solution :

La quantité de chaleur par unité de surface au travers le mur est calculé comme suit :

$$\frac{Q}{S} = \frac{T_1 - T_2}{R_{total}}$$

$$\frac{Q}{S} = \frac{T_1 - T_2}{R_A + R_{\acute{e}q} + R_D}$$

$$\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \Rightarrow R_{\acute{e}q} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_B + R_C}$$

$$R_A = \frac{L_{A1}}{K_A \cdot S} = \frac{0,01}{175} = 0,0000571 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$R_B = \frac{L_B}{K_B \cdot S} = \frac{0,03}{35} = 0,000875 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$R_C = \frac{L_C}{K_C \cdot S} = \frac{0,03}{80} = 0,000375 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$R_D = \frac{L_D}{K_D \cdot S} = \frac{0,03}{80} = 0,000336 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$R_{\acute{e}q} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_B + R_C} = 0,000261 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$R_{total} = R_A + R_{\acute{e}q} + R_D = 0,000681 \text{ m}^2\text{k/w}$$

$$\frac{Q}{S} = \frac{30 - 0}{0,000681} = 44 \text{ kw/m}^2$$

5.5 Cylindre creux long (tube)

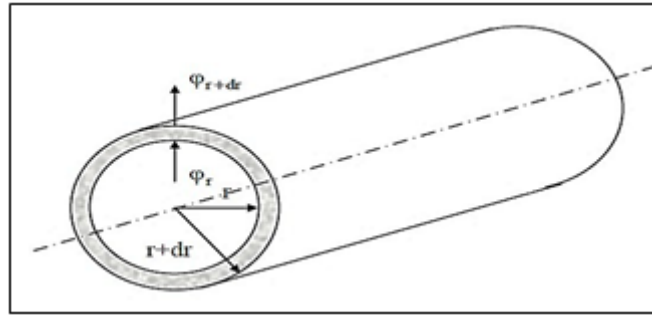


Figure II.11 : cylindre creux

Un cylindre creux ayant une conductivité thermique K , une longueur L , un rayon intérieur r_1 et un rayon extérieur r_2 , avec des températures de surface intérieure et extérieure T_1 et T_2 respectivement. Il est considéré que le gradient de température dans le sens longitudinal est négligeable par rapport au gradient dans le sens radial.

Réalisons le bilan calorifique du système qui est constitué par la section du cylindre située entre les rayons r et $r + dr$:

$$Q_r = Q_{r+dr}$$

Avec :

$$Q_r = -kS \left(\frac{dT}{dr} \right)_r \quad (\text{II. 38})$$

Où : $S = 2\pi rL$

$$Q_r = -2\pi krL \left(\frac{dT}{dr} \right)_r \quad (\text{II. 39})$$

Et

$$Q_{r+dr} = -2\pi k(r + dr)L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr} \quad (\text{II. 40})$$

Soit

$$-2\pi krL \left(\frac{dT}{dr} \right)_r = -2\pi k(r + dr)L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

D'où :

$$r \frac{dT}{dr} = C$$

Par des conditions relatives aux limites :

$$T(r_1) = T_1 \text{ et } T(r_2) = T_2$$

$$T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{II. 41})$$

En appliquant la relation :

$$Q = -2\pi krL \frac{dT}{dr}$$

Nous obtenons :

$$Q = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{II. 42})$$

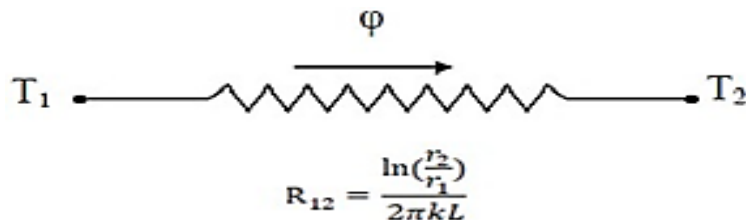
On peut aussi mettre cette relation sous forme :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{Cyl}} \quad (\text{II. 43})$$

Avec:

$$R_{Cyl} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL} \quad (\text{II. 44})$$

C'est la résistance thermique de la couche cylindrique :



5.6 Sphère creuse

Considérons une sphère creuse ayant une conductivité thermique K , un rayon interne r_1 , un rayon externe r_2 , les températures des parois intérieure et extérieure sont respectivement T_1 et T_2 . Nous pouvons répéter l'analyse ci-dessus pour une couche sphérique en prenant $S = 4\pi r^2$ et en établissant le bilan thermique du système constituant la partie de la sphère située entre les rayons r_1 et r_2 , par les intégrations de l'équation (II.39). Le résultat peut être exprimé par la formule suivante :

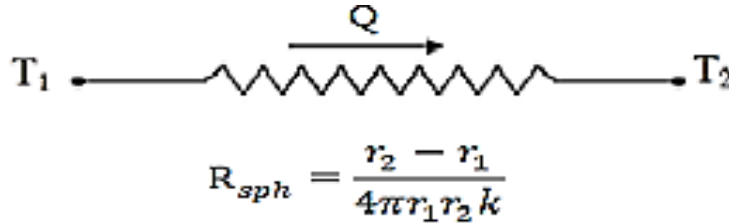
$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{Sph}} \quad (\text{II. 45})$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Avec:

$$R_{sph} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} \quad (II.46)$$

Qui est la résistance thermique de la couche sphérique :



5.7 Cylindre creux à plusieurs couches

Dans ce cas pratique, il s'agit d'un tube constitué d'une ou de plusieurs couches de différents matériaux et où seules les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les parois intérieure et extérieure du cylindre sont connues ; h_1 et h_2 représentent les coefficients de transfert thermique par convection qui existent entre les fluides et les parois intérieure et extérieure.

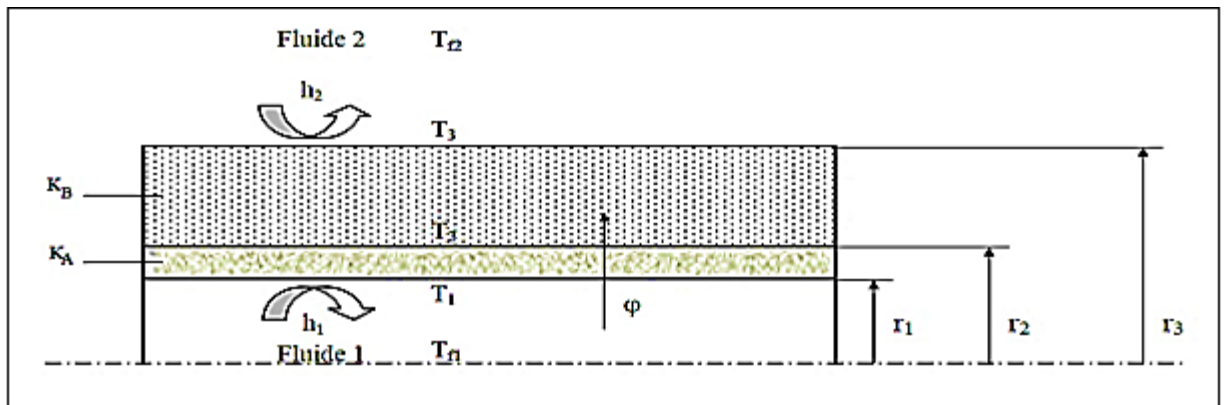


Figure II.12 : Cylindre creux multicouche

Dans le cas d'un régime permanent, la quantité de chaleur Q est conservée pendant le passage à travers les couches et s'écrit comme suit :

$$Q = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi k_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi k_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2})$$

D'où :

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (II.47)$$

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{total}} \quad (II.48)$$

Où :

$$R_{total} = \frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L} \quad (II.49)$$

Le schéma équivalent :

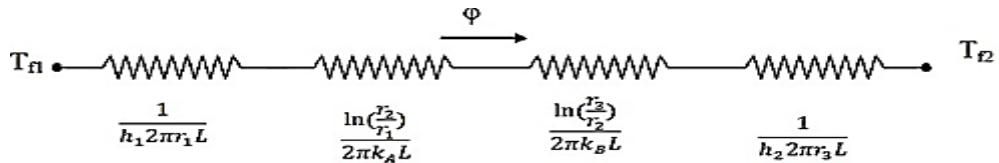
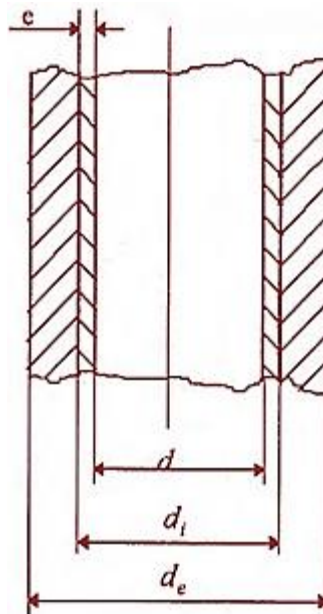


Figure II.13 : Schéma électrique équivalent de cylindre creux multicouche

❖ **Exercice d'application 9 :**

Une cheminée en béton armé ($k_1 = 1,1 \text{ w/m}^\circ\text{C}$), possède un diamètre interne $d_i = 600 \text{ mm}$ et un diamètre externe de $d_e = 1000 \text{ mm}$ doit être revêtue de l'intérieur par un matériau réfractaire ($k_2 = 0,5 \text{ w/m}^\circ\text{C}$).

1. Calculez l'épaisseur du garnissage.
2. Si la température de la paroi intérieure du garnissage est considérée comme étant de 425°C , Déterminez la température de la face extérieure de la cheminée afin que la perte de chaleur ne soit pas supérieure à 2000 w/m et la température de la face intérieure de la cheminée ne dépasse pas 200°C .



Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Solution :

1. Calcule de l'épaisseur du garnissage :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

Où :

$$R = \frac{\ln\left(\frac{d_i}{d}\right)}{2\pi k_2 L}$$

On va calculer tout d'abord le diamètre « d » :

$$Q = \frac{2\pi k_2 L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{d_i}{d}\right)} \Rightarrow \ln\left(\frac{d_i}{d}\right) = \frac{2\pi k_2 L (T_1 - T_2)}{Q}$$

$$\frac{d_i}{d} = e^{\frac{2\pi k_2 L (T_1 - T_2)}{Q}}$$

$$d = \frac{d_i}{e^{\frac{2\pi k_2 L (T_1 - T_2)}{Q}}}$$

$$d = \frac{0,6}{e^{\frac{2\pi \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot (425 - 200)}{2000}}}$$

$$d = 0,421 \text{ m}$$

L'épaisseur du garnissage égale à :

$$e = \frac{d_i - d}{2}$$

$$e = \frac{0,6 - 0,421}{2}$$

$$e = 0,089 \text{ m} \cong 89 \text{ mm}$$

2. Calcul de la température de la surface extérieure de la cheminée :

$$Q = \frac{2\pi k_1 L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)} \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{Q \cdot \ln\left(\frac{d_e}{d_i}\right)}{2\pi k_1 L}$$

$$T_2 = 200 - \frac{2000 \cdot \ln\left(\frac{1}{0,6}\right)}{2\pi \cdot 1,1 \cdot 1}$$

$$T_2 = 53 \text{ }^\circ\text{C}$$

5.8 Sphère exposée à la convection des deux côtés

Considérons maintenant un flux thermique unidimensionnel régulier à travers une couche sphérique qui est exposée à la convection des deux côtés aux fluides à des températures $T_{\infty 1}$ et

$T_{\infty 2}$ avec des coefficients de transfert de chaleur h_1 et h_2 , respectivement, comme le montre la figure II.13.

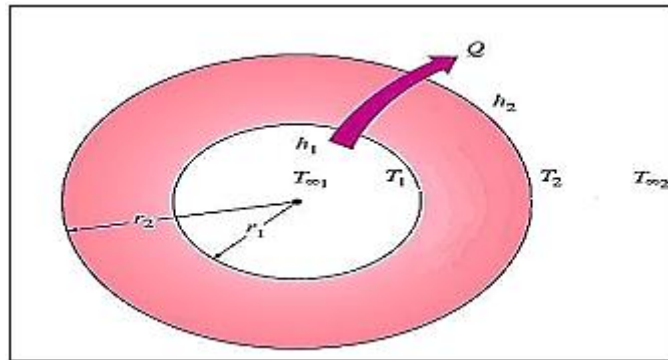


Figure II.13 : Calandre sphérique exposée à la convection des deux côtés

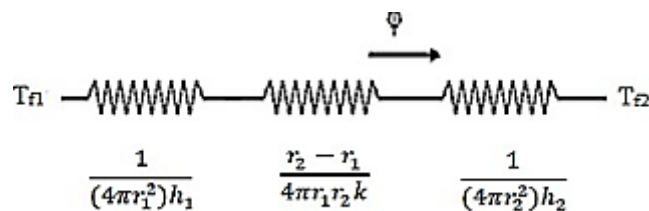
Dans ce cas, le réseau de résistance thermique se compose d'une résistance de conduction et deux résistances de convection en série, tout comme celle de la paroi plane, et l'expression de flux thermique peut être exprimée comme :

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \quad (\text{II. 50})$$

D'où :

$$R_{total} = \frac{1}{(4\pi r_1^2)h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{(4\pi r_2^2)h_2} \quad (\text{II. 51})$$

Le schéma équivalent :

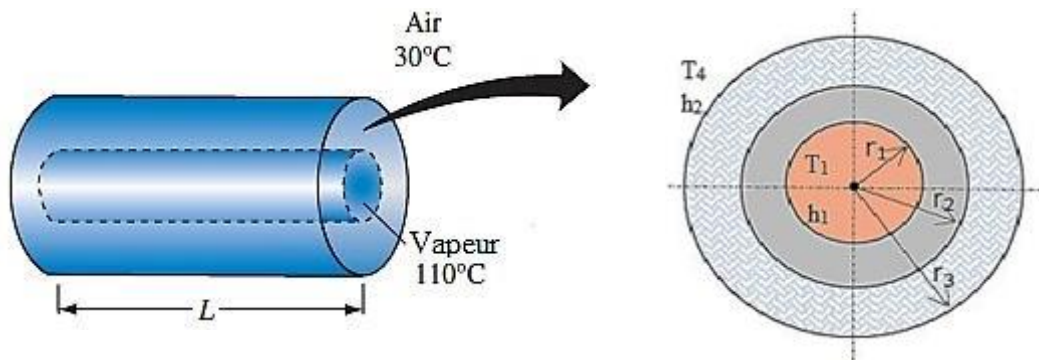


Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

❖ Exercice d'application 10 :

Comparez les pertes de chaleur par unité de longueur d'un tuyau en cuivre isolé et d'un tuyau en cuivre non isolé dans les conditions suivantes. Le tuyau ($k_{\text{tuyau}} = 400 \text{ w/m.k}$) a un diamètre intérieur de 10 cm et un diamètre extérieur de 12 cm. De la vapeur saturée circule à l'intérieur du tuyau à 110°C , son coefficient de transfert de chaleur par convection est $10 \text{ w/m}^2.\text{k}$.

Le tuyau est situé dans un endroit à 30°C et le coefficient de transfert de chaleur sur sa surface extérieure est estimé à $15 \text{ w/m}^2.\text{k}$. L'isolation disponible pour réduire les pertes de chaleur à une épaisseur de 5 cm et sa conductivité est de $0,20 \text{ w/m.k}$.



Solution :

1. La perte de chaleur par unité de longueur du tuyau non isolé :

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{R_{total}}$$

$$R_{total} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi r_1 h_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,05 \cdot 10} = 0,000318 \text{ mk/w}$$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_{\text{tuyau}}} = \frac{\ln\left(\frac{0,06}{0,05}\right)}{2\pi \cdot 400} = 0,00007 \text{ mk/w}$$

$$R_3 = \frac{1}{2\pi r_3 h_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,06 \cdot 15} = 0,177 \text{ mk/w}$$

R_1 et R_2 négligeables devant R_3 donc :

$$R_{total} = R_1 + R_2 + R_3 \cong R_3 = 0,177 \text{ mk/w}$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{110 - 30}{0,177} = 452 \text{ w/m}$$

2. La perte de chaleur par unité de longueur du tuyau isolé :

Pour la conduite isolée, il faut donc ajouter une quatrième résistance entre r_2 et r_3 .

$$R_4 = \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_{\text{isolation}}} = \frac{\ln\left(\frac{0,11}{0,06}\right)}{2\pi \cdot 0,20} = 0,482 \text{ mk/w}$$

De plus, la résistance à la convection externe se change à :

$$R_3 = \frac{1}{2\pi r_3 h_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,11 \cdot 15} = 0,096 \text{ mk/w}$$

$$R_{\text{total}} = R_3 + R_4 = 0,578 \text{ mk/w}$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{110 - 30}{0,578} = 138 \text{ w/m}$$

✚ L'ajout d'une isolation permettra de réduire 70 % de la perte de chaleur de la vapeur.

5.9 Le rayon critique d'isolation (cylindre et sphère)

L'ajout d'un isolant à un tuyau cylindrique ou à une calandre sphérique est toujours pour diminuer le transfert de chaleur. L'isolation supplémentaire augmente la résistance de conduction de la couche d'isolation mais diminue la résistance de convection de la surface en raison de l'augmentation de la surface extérieure de convection.

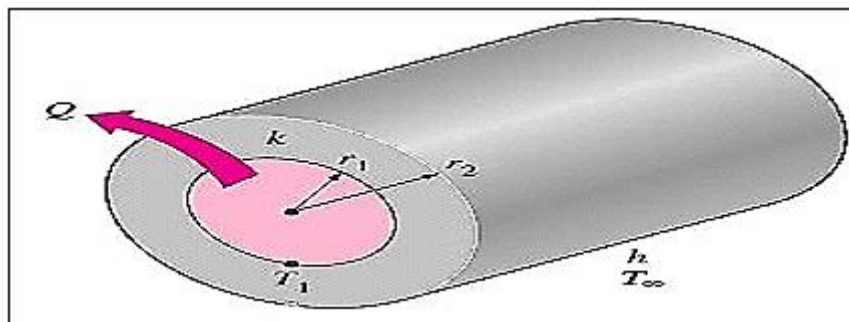


Figure II.14 : Cylindre isolé exposé à la convection de la surface extérieure

Considérons un tube cylindrique de rayon extérieur r_1 dont la température de surface extérieure T_1 (Figure II.14). Le tuyau est maintenant isolé avec un matériau dont la conductivité thermique est k et le rayon extérieur r_2 . La chaleur est perdue du tuyau vers

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

le milieu ambiant à la température T_∞ , avec un coefficient de transfert de chaleur par convection h . Le flux thermique transmis par tuyau isolé vers l'air ambiant peut être exprimé comme suit :

$$Q = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{\text{isolation}} + R_{\text{couverture}}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi r_2 L \cdot h_2}} \quad (\text{II. 52})$$

La valeur de r à laquelle Q atteint un maximum est déterminée à partir de la condition $\frac{dQ}{dr_2} = 0$. En effectuant la dérivation et en déterminant r_2 , on obtient le rayon d'isolation critique pour un corps cylindrique, qui est :

$$r_{\text{critique, Cyl}} = \frac{k}{h} \quad (\text{II. 53})$$

$$[r] \equiv \text{m}$$

Les explications ci-dessus peuvent être appliquées à une sphère, et on peut montrer de la même manière que le rayon critique d'isolation d'une calandre sphérique est :

$$r_{\text{critique, Sph}} = \frac{2k}{h} \quad (\text{II. 54})$$



Observations

- Le rayon critique de l'isolation dépend de la conductivité thermique de l'isolation k et du coefficient de transfert de chaleur par convection externe h .
- Le taux de transfert de chaleur du cylindre (où sphère) augmente avec l'ajout de l'isolation pour $r_2 < r_{cr}$, atteint un maximum lorsque $r_2 = r_{cr}$, et commence à diminuer pour $r_2 > r_{cr}$.

6. Le transfert de chaleur par des surfaces à ailettes

6.1 Principe des ailettes

La quantité de chaleur transmis d'une surface à une température T_s vers le milieu environnant à T_∞ est donnée par la loi de Newton comme suit :

$$Q = h.S.(T_s - T_\infty)$$

Où S est la surface de transfert de chaleur et h est le coefficient de transfert de chaleur par convection. Lorsque les températures T_s et T_∞ sont fixées par des considérations de conception, il existe deux façons d'augmenter le flux de chaleur transmis :

- Par l'augmentation de coefficient de transfert de chaleur par convection h .
- Par l'augmentation de la surface S .

L'augmentation de h peut nécessiter l'installation d'une pompe ou d'un ventilateur, ou remplacer l'existant par un plus grand, mais cette approche n'est pas pratique. La sélection consiste à augmenter la surface en fixant à la surface des surfaces supplémentaires appelées ailettes, faites de matériaux hautement conducteurs tels que l'aluminium.

Les ailettes améliorent la quantité de chaleur transmis à partir de l'augmentation artificiellement de la surface d'échange entre le système et le fluide, en exposant une plus grande surface à la convection et le rayonnement.

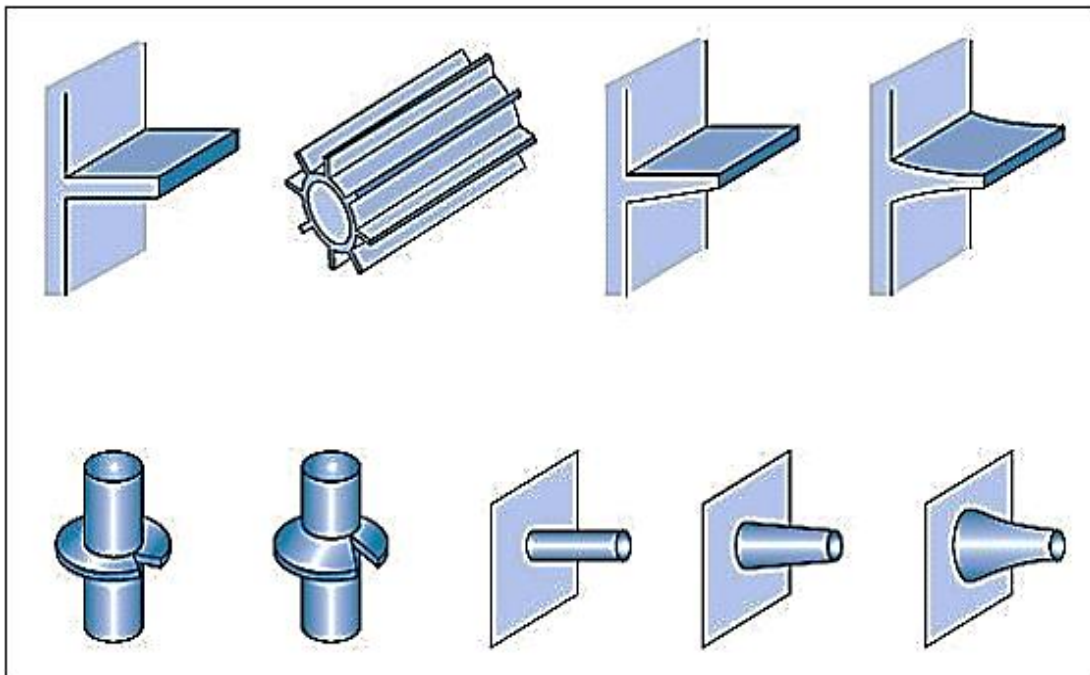


Figure II.15 : Schémas des différents types des ailettes

6.2 Développement de l'équation générale unidimensionnelle

Considérons une ailette ayant la forme d'une tige fixée à la base d'une paroi à la température de surface T_s (Figure II.16). L'ailette est refroidie le long de sa surface par un fluide à la température T_∞ . La tige a un périmètre p et une surface de section latérale uniforme S , est faite d'un matériau ayant une conductivité uniforme k ; le coefficient de transfert de chaleur entre la surface de l'ailette et le fluide est h .

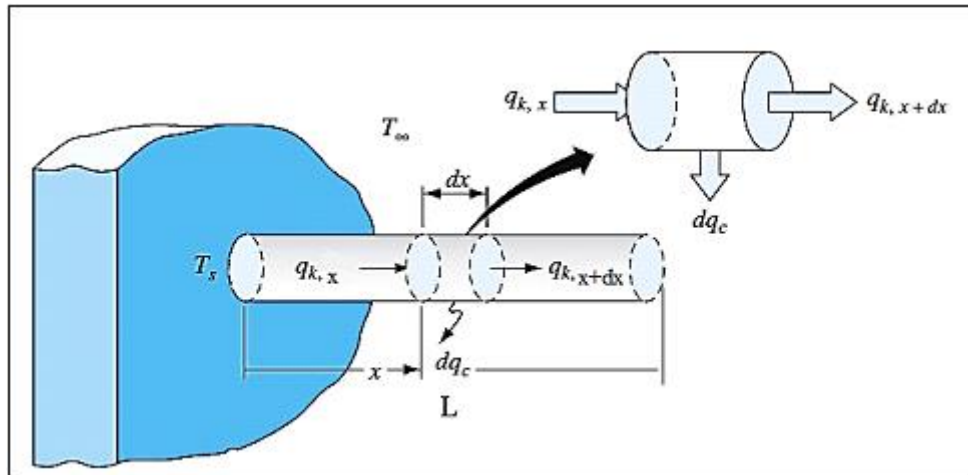


Figure II.16 : Schéma d'une ailette qui a été placée sur un mur

Le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme suit :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Le flux de chaleur} \\ \text{par conduction} \\ \text{dans l'élément à } x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Le flux de chaleur} \\ \text{par conduction} \\ \text{dans l'élément à } x + dx \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Le flux de chaleur} \\ \text{par convection} \\ \text{à partir de la surface entre } x + dx \end{array} \right]$$

Cette équation devient, sous forme symbolique :

$$Q_{cond,x} = Q_{cond,x+dx} + Q_{conv} \quad (II. 55)$$

$$-KS \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = -KS \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} + hpdx[T(x) - T_\infty]$$

$$-KS \left(\frac{dT}{dx} \right)_x + KS \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)_x + \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right)_x dx \right] - hpdx[T(x) - T_\infty] = 0 \quad (II. 56)$$

Supposons les paramètres suivants pour le cas à l'étude :

- ✚ T_s : La température ambiante [k].
- ✚ h : Le coefficient de transfert de chaleur par convection [$w/m^2.k$].
- ✚ K : La conductivité thermique [$w/m.k$].

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

✚ S : La surface de la section droite de la tige $\left(S = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \right)$.

✚ p : Le périmètre de la section droite de la tige ($p = \pi \cdot d$).

En développant et simplifiant cette expression, on arrive à l'équation décrivant le transfert de chaleur à travers la tige comme suit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2[T(x) - T_\infty] = 0 \quad (\text{II.57})$$

Avec :

$$m^2 = \frac{hp}{KS} \quad (\text{II.58})$$

L'équation (II.57) est une équation différentielle linéaire, du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$T(x) - T_\infty = A \cdot \cosh(mx) + B \cdot \sinh(mx) \quad (\text{II.59})$$

Pour évaluer les constantes A et B, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites qui sont :

➤ à $x = 0$; $T(0) = T_s$ remplacées dans l'équation (III.5) donne :

$$T_s - T_\infty = A \cdot \cosh(m \cdot 0) + B \cdot \sinh(m \cdot 0)$$

$$T_s - T_\infty = A$$

➤ à $x = L$; le flux transmis par convection est égal au flux transmis par conduction à travers la section droite, donc :

$$-KS \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = hS(T_L - T_\infty)$$

$$-K \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h(T_L - T_\infty)$$

➤ à $x = 0$

$$T_s - T_\infty = A$$

➤ à $x = L$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_x = A \cdot m \cdot \sinh(mx) + B \cdot m \cdot \cosh(mx)$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = A \cdot m \cdot \sinh(mL) + B \cdot m \cdot \cosh(mL)$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} &= (T_s - T_\infty) \cdot m \cdot \sinh(mL) + B \cdot m \cdot \cosh(mL) \\ -K \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} &= -K \cdot m (T_s - T_\infty) \cdot \sinh(mL) - K \cdot B \cdot m \cdot \cosh(mL) \\ \Rightarrow h(T_L - T_\infty) &= -K \cdot m (T_s - T_\infty) \cdot \sinh(mL) - K \cdot B \cdot m \cdot \cosh(mL) \end{aligned}$$

Et puisque à partir de l'équation (III.5) :

$$\begin{aligned} T_L - T_\infty &= (T_s - T_\infty) \cdot \cosh(mL) + B \cdot \sinh(mL) \\ h(T_L - T_\infty) &= h[(T_s - T_\infty) \cdot \cosh(mL) + B \cdot \sinh(mL)] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} h[(T_s - T_\infty) \cdot \cosh(mL) + B \cdot \sinh(mL)] \\ &= -K \cdot m (T_s - T_\infty) \cdot \sinh(mL) - K \cdot B \cdot m \cdot \cosh(mL) \\ B \cdot [h \cdot \sinh(mL) + K \cdot m \cdot \cosh(mL)] &= -(T_s - T_\infty) \cdot [h \cdot \cosh(mL) + K \cdot m \cdot \sinh(mL)] \\ \Rightarrow B &= \frac{-(T_s - T_\infty) \cdot [h \cdot \cosh(mL) + K \cdot m \cdot \sinh(mL)]}{[h \cdot \sinh(mL) + K \cdot m \cdot \cosh(mL)]} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution est indiquée par :

$$T(x) - T_\infty = A \cdot \cosh(mx) + B \cdot \sinh(mx)$$

Ou :

$$T_s - T_\infty = A$$

Et

$$B = \frac{-(T_s - T_\infty) \cdot [h \cdot \cosh(mL) + K \cdot m \cdot \sinh(mL)]}{[h \cdot \sinh(mL) + K \cdot m \cdot \cosh(mL)]}$$

Donc :

$$T(x) - T_\infty = (T_s - T_\infty) \cdot \left[\cosh(mx) - \frac{\frac{h}{Km} \cosh(mL) + \sinh(mL)}{\frac{h}{Km} \sinh(mL) + \cosh(mL)} \cdot \sinh(mx) \right]$$

On pose :

$$G = \frac{h}{Km}$$

$$\begin{aligned} \frac{T(x) - T_\infty}{(T_s - T_\infty)} &= \left[\cosh(mx) - \frac{G \cdot \cosh(mL) + \sinh(mL)}{G \cdot \sinh(mL) + \cosh(mL)} \cdot \sinh(mx) \right] \\ &= \left[\frac{G \cdot \sinh(mL) \cdot \cosh(mx) + \cosh(mL) \cdot \cosh(mx) - G \cdot \cosh(mL) \cdot \sinh(mx) - \sinh(mL) \cdot \sinh(mx)}{G \cdot \sinh(mL) + \cosh(mL)} \right] \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \sinh[m(L-x)] = \sinh(mL) \cdot \cosh(mx) - \cosh(mL) \cdot \sinh(mx) \\ \cosh[m(L-x)] = \cosh(mx) \cdot \cosh(mL) - \sinh(mL) \cdot \sinh(mx) \end{cases}$$

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{(T_s - T_{\infty})} = \frac{G \cdot \sinh[m(L-x)] + \cosh[m(L-x)]}{G \cdot \sinh(mL) + \cosh(mL)} \quad (\text{II. 60})$$

C'est l'équation générale de la distribution de la température pour le transfert de chaleur par convection des surfaces à ailettes unidimensionnelle.

6.3 Flux dissipé par l'ailette

6.3.1 Flux de transfert de chaleur par convection dissipé par l'ailette

En régime permanent, le flux total évacué par la tige est égal au flux transféré par conduction par la section latérale de l'ailette et au flux évacué par convection par la surface d'extrémité de l'ailette :

$$Q = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_{\infty}) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)} \quad (\text{II. 61})$$

Avec :

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KS}} \quad \text{et} \quad G = \frac{h}{Km}$$

6.3.2 Cas d'une ailette longue ($T_{\text{extrémité ailette}} = T_{\infty}$) :

Pour une ailette suffisamment longue et de section uniforme ($S = \text{constant}$), la température de l'ailette à son extrémité se rapprochera de la température ambiante T_{∞} et donc $(T_s - T_{\infty})$ s'approchera de zéro. La variation de la température le long de l'ailette dans ce cas peut être exprimée comme suit :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{(T_s - T_{\infty})} = e^{-mx} \quad (\text{II. 62})$$

Le flux de transfert de chaleur de cette ailette peut être déterminé à partir de :

$$Q = \sqrt{hpKS}(T_s - T_{\infty}) \quad (\text{II. 63})$$

6.3.3 Cas de transfert de chaleur négligeable à l'extrémité de l'ailette (**Extrémité d'ailette isolée**) ($Q_{\text{extrémité ailette adiabatique}} = 0$) :

Il est peu probable que les ailettes soient trop longues pour que leur température s'approche de la température ambiante à leur extrémité. Une hypothèse plus réaliste est

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

que le transfert de chaleur de l'extrémité de l'ailette est négligeable, car le transfert de chaleur de l'ailette est proportionnel à sa surface, et la surface de l'extrémité de l'ailette est généralement une fraction négligeable de la surface totale de l'ailette. Dans ce cas, on peut supposer que l'extrémité de l'ailette est isolée, c'est-à-dire que l'ailette est adiabatique (ailette n'échange pas de chaleur avec le milieu environnant).

La relation pour la distribution de la température peut être exprimée comme suit :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{(T_s - T_{\infty})} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh(mL)} \quad (\text{II. 64})$$

Le flux de transfert de chaleur de l'ailette peut être déterminé à nouveau à partir de :

$$Q = \sqrt{hpKS}(T_s - T_{\infty}) \tanh(mL) \quad (\text{II. 65})$$

6.4 L'efficacité de l'ailette

Rappelons que les ailettes sont utilisées pour augmenter la quantité de chaleur transmis à partir d'une paroi en augmentant la surface effective. Pour cette raison, l'évaluation de la qualité d'une ailette peut être faite en évaluant l'efficacité des ailettes η . L'efficacité d'une ailette η est définie comme le rapport entre la quantité de chaleur réelle échangée par les ailettes et la quantité de chaleur échangée par convection (maximum). L'efficacité de l'ailette est donnée comme :

$$\eta = \frac{Q_{\text{réel échangé}}}{Q_{\text{maximum}}} \quad (\text{II. 66})$$

Avec :

$$\begin{cases} Q_{\text{réel échangé}} = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_{\infty}) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)} \\ Q_{\text{maximum}} = hpL(T_s - T_{\infty}) \end{cases}$$

Après arrangements mathématiques pour simplification, l'expression finale de l'efficacité est donnée par :

✚ **Ailette longue ($L \rightarrow \infty$) :**

$$\eta = \frac{1}{mL} \quad (\text{II. 67})$$

✚ **Ailette isolée à l'extrémité :**

$$\eta = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (\text{II. 68})$$

✚ **Ailette rectangulaire et circulaire avec transfert de chaleur par convection à l'extrémité :**

$$\eta = \frac{\tanh(mL) + G}{mL + G \cdot \tanh(mL)} \quad (\text{II. 69})$$

Les relations d'efficacité des ailettes sont développées pour des ailettes de différents profils et sont représentées à la Figure II.17 pour des ailettes sur une surface plane et à la Figure II.18 pour des ailettes circulaires d'épaisseur constante. Pour la plupart des ailettes d'épaisseur constante rencontrées dans la pratique, l'épaisseur « t » de l'aillette est trop faible par rapport à la longueur L de l'aillette, et la surface de l'extrémité de l'aillette est donc négligeable.

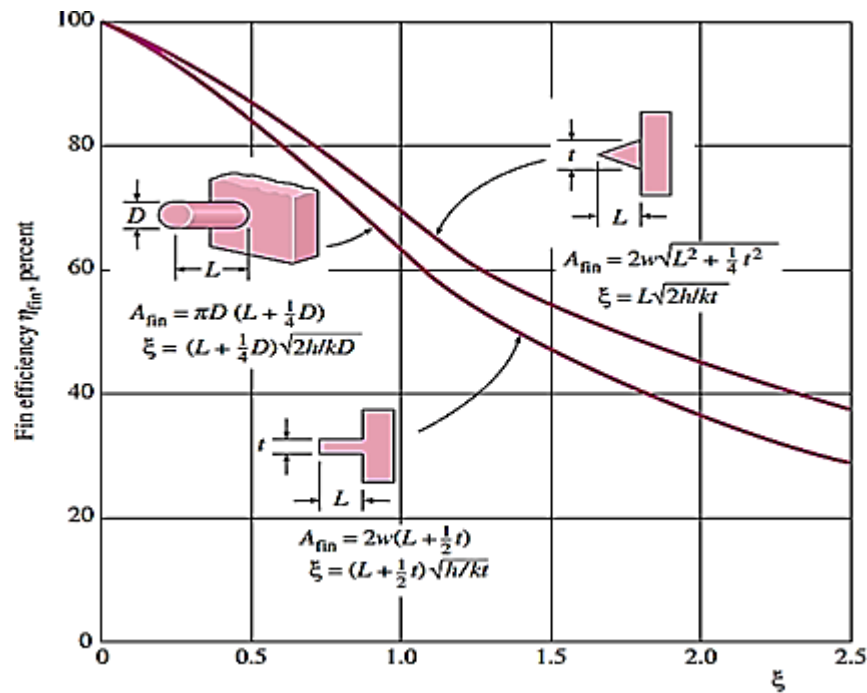


Figure II.17 : Efficacité d'ailettes circulaires, rectangulaires et triangulaires sur une surface plane de largeur w

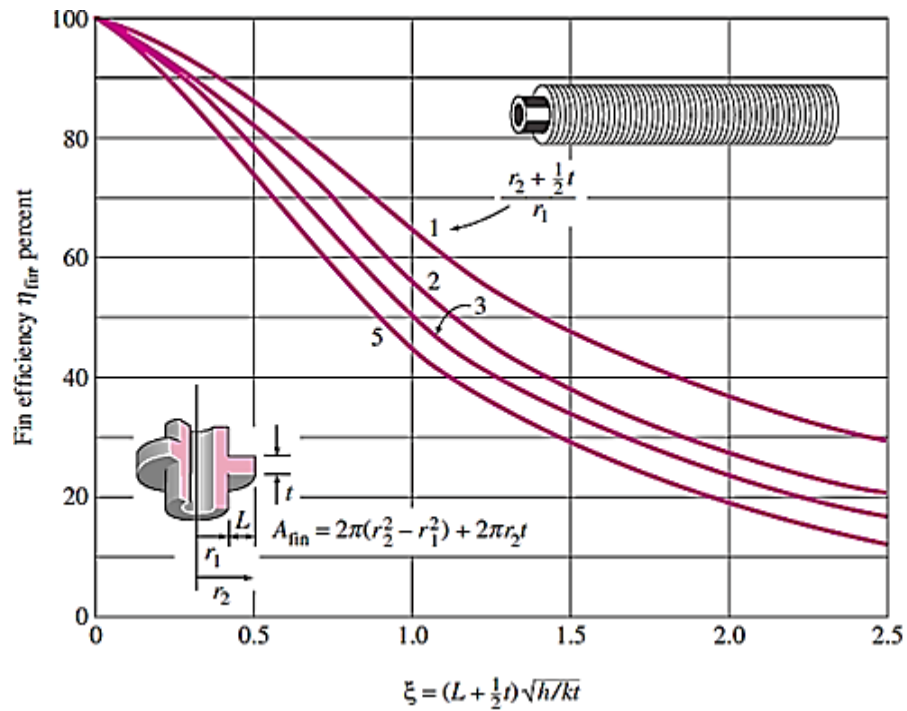
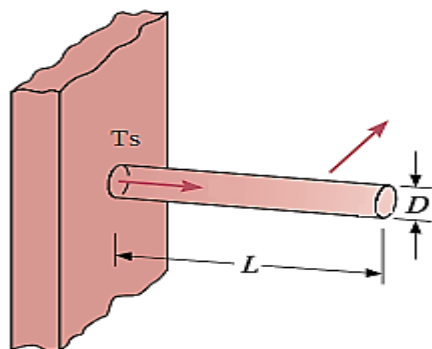


Figure II.18 : Efficacité d'ailettes circulaires de longueur L et d'épaisseur constante t

❖ **Exercice d'application 11 :**

Une tige en aluminium ($K_{Al} = 200 \text{ w/m}$) de 4 cm de diamètre et 13 cm de longueur implantée dans un mur maintenu à une température de 238°C . La tige est exposée à un environnement de 21°C . Le coefficient de transfert de chaleur par convection est 14 w/m^2 .

Calculez le flux de chaleur perdu par cette tige.



Solution :

Le flux de chaleur perdu par la tige :

$$Q = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)}$$

Chapitre II: Transfert de chaleur par conduction

Avec :

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KS}} \quad \text{et} \quad G = \frac{h}{Km}$$

$$T_s = 238 \text{ }^\circ\text{C}; T_\infty = 21 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$L = 13 \text{ cm} = 0,13 \text{ m}; D = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$$

$$p = \pi \cdot D = \pi \cdot 0,04 = 0,125 \text{ m}$$

$$K_{Al} = 200 \text{ w/m}^\circ\text{C}; h = 14 \text{ w/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,04)^2}{4} = 0,00125 \text{ m}^2$$

$$m^2 = \frac{hp}{KS} \rightarrow m = \sqrt{\frac{hp}{KS}}$$

$$m = \sqrt{\frac{14 \cdot 0,125}{200 \cdot 0,00125}} = 2,6464 \text{ m}^{-1}$$

$$G = \frac{h}{Km} = \frac{14}{200 \cdot 2,6464} = 0,0264$$

$$Q = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)}$$

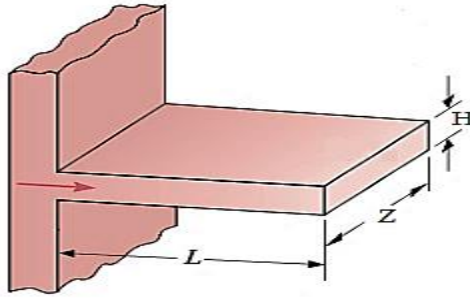
$$Q = \sqrt{14 \cdot 0,125 \cdot 200 \cdot 0,00125} \cdot (238 - 21) \cdot \frac{\sinh(2,6464 \cdot 0,13) + 0,0264 \cdot \cosh(2,6464 \cdot 0,13)}{\cosh(2,6464 \cdot 0,13) + 0,0264 \cdot \sinh(2,6464 \cdot 0,13)}$$

$$Q = 50,5 \text{ W}$$

❖ *Exercice d'application 12 :*

Une ailette en aluminium ($K_{Al} = 200 \text{ w/m}^\circ\text{C}$), avec 4 mm d'épaisseur et 8 cm de longueur, sa base est maintenue à 250 C, la température ambiante est 45 C, avec $h = 10 \text{ w/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$.

Calculez le flux de chaleur échangé entre cette ailette et le milieu environnant ($Z = 1 \text{ m}$, dans le cas où $Z \gg H$).



Solution :

Le flux de chaleur échangé :

$$Q = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)}$$

Avec :

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KS}} \quad \text{et} \quad G = \frac{h}{Km}$$

$$T_s = 250 \text{ °C} ; T_\infty = 45 \text{ °C}$$

$$L = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m} ; H = 4 \text{ mm} = 0,004 \text{ m}$$

$$p = 2 \cdot (Z + H) = 2m$$

$$K_{Al} = 200 \text{ w/m}^\circ\text{C} ; h = 10 \text{ w/m}^2\text{°C}$$

$$S = Z \cdot H = 1 \cdot 0,004 = 0,004 \text{ m}$$

$$m^2 = \frac{hp}{KS} \rightarrow m = \sqrt{\frac{hp}{KS}}$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot 2 \cdot (Z + H)}{K \cdot Z \cdot H}}$$

Où $Z \gg H$ donc :

$$m = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{K \cdot H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{200 \cdot 0,004}} = 5 \text{ m}^{-1}$$

$$G = \frac{h}{Km} = \frac{10}{200.5} = 0,01$$

$$Q = \sqrt{hpKS} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)}$$

$$Q = \sqrt{hpK(Z.H)} \cdot (T_s - T_\infty) \cdot \frac{\sinh(mL) + G \cdot \cosh(mL)}{\cosh(mL) + G \cdot \sinh(mL)}$$

$$Q = \sqrt{10.2.200.0,004} \cdot (250 - 45) \cdot \frac{\sinh(5,0,08) + 0,01 \cdot \cosh(5,0,08)}{\cosh(5,0,08) + 0,01 \cdot \sinh(5,0,08)}$$

$$Q = 317,34 \text{ W}$$

Chapitre III :
Transfert de chaleur par
convection

1. Introduction

La convection est un type de transfert d'énergie entre une surface solide et le liquide ou le gaz en mouvement adjacent, et elle implique les effets combinés de la conduction et du mouvement du fluide. Plus le mouvement du fluide est rapide, plus le transfert de chaleur par convection est important. En l'absence de mouvement du fluide, le transfert de chaleur entre une surface solide et le fluide adjacent se fait par conduction pure.

Il existe deux différents types de convection :

- ✚ La convection est appelée convection forcée si le fluide est forcé de s'écouler sur la surface par des moyens externes tels qu'un ventilateur, une pompe ou le vent.
- ✚ La convection est dite naturelle (ou libre) si le mouvement du fluide est provoqué par les forces de flottabilité résultant des différences de densité dues à la variation de la température du fluide.

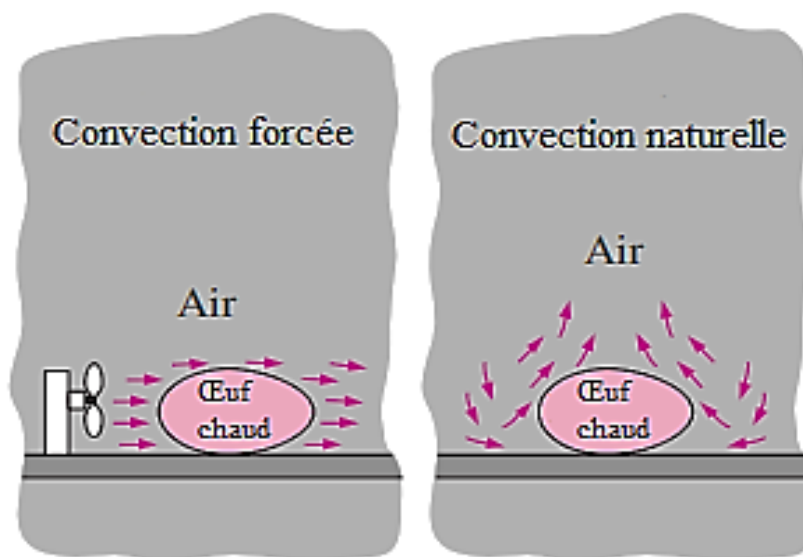


Figure III.1: Schème simplifier la convection naturelle et forcée

De manière plus simplifiée, le principal but de l'étude de la convection est principalement :

- ❖ Développer des méthodes permettant l'évaluation du coefficient de transfert de chaleur par convection « h ».
- ❖ Étudier les différentes formules empiriques utilisées.

2. Développement des équations générales de conservation

Les équations différentielles qui gouvernent l'écoulement d'un fluide à travers une paroi solide seront dérivées pour montrer la similarité entre la quantité de mouvement et le transfert de chaleur et pour introduire des paramètres appropriés sans dimension qui relient les processus. Ensuite, les équations intégrées pour l'écoulement sur une surface plane seront développées et résolues pour illustrer une approche analytique qui sera également utilisée pour obtenir les coefficients de la couche limite. Ces équations différentielles sont basées sur :

- Le principe de conservation de l'énergie.
- Le principe de conservation de la quantité de mouvement.
- Le principe de conservation de la masse.

2.1 Équations de conservation de la masse (équation de continuité)

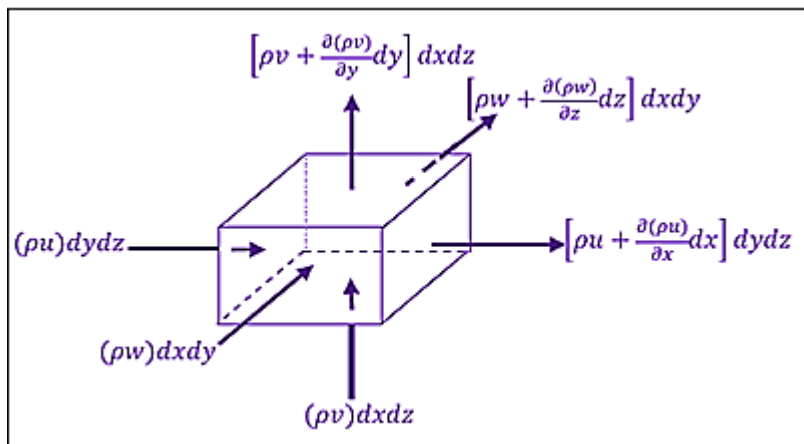


Figure III.2 : Conservation de la masse pour un fluide incompressible en écoulement sur une plaque plane

L'accumulation en quantité de masse dans un volume de contrôle par unité de temps est égale à la quantité de masse qui entre moins celle qui sort du volume par unité du temps. La conservation de la masse d'un volume V nous impose une équivalence entre la variation de la masse dans ce volume et le flux de masse à travers sa surface :

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\vec{V}) = 0 \quad (\text{III. 1})$$

Pour un écoulement stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; et incompressible donc : $\rho = \text{constant}$.

L'équation de conservation de la masse est devenue sous la forme :

$$\text{div}\vec{V} = 0 \quad (\text{III. 2})$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

La conservation de la masse impose que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (\text{III. 3})$$

Et si le flux est bidimensionnel, la conservation de la masse sera :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 4})$$

2.2 Équations de conservation de la quantité de mouvement

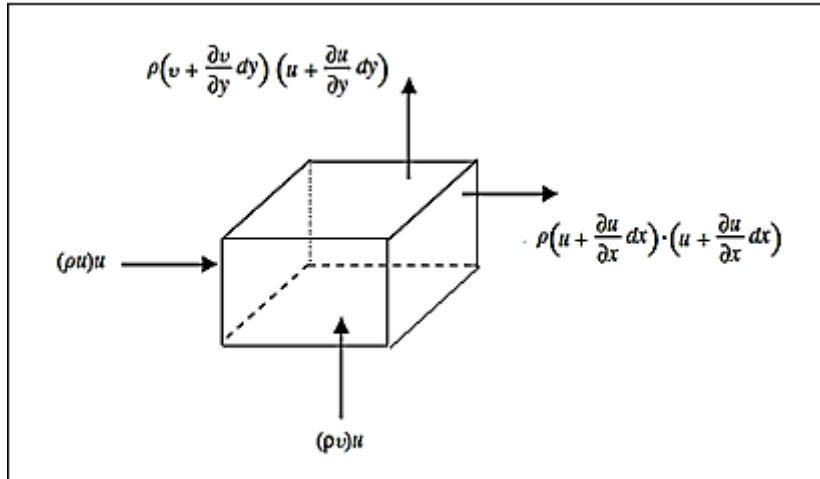


Figure III.3 : Conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible enécoulement sur une plaque plane

En appliquant la loi de la dynamique fondamentale à une molécule de fluide se déplaçant, on obtient les équations de conservation de la quantité de mouvement. Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations de Navier-Stokes sont écrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

Où :

ρ : Densité.

f_x, f_y, f_z : Forces extérieures.

P : Pression.

μ : Viscosité dynamique.

u, v, ω : Composantes du vecteur de la vitesse.

2.3 Équation de conservation de l'énergie

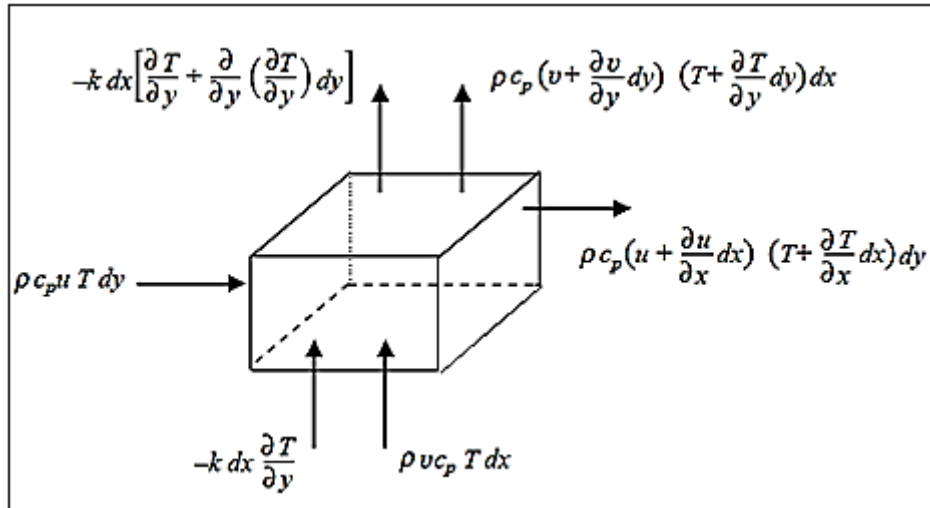


Figure III.4 : Conservation de l'énergie pour un fluide incompressible en écoulement sur une plaque plane

On peut obtenir l'équation d'énergie en appliquant à un élément de fluide en mouvement le premier principe de la thermodynamique. L'équation de conservation de l'énergie relativement au système de coordonnées cartésiennes se présente sous la forme suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III. 5})$$

3. La conception de la couche limite et ses hypothèses

3.1 Conception de la couche limite hydrodynamique

Considérons un écoulement à travers une paroi solide comme le montre la figure (III.5). La vitesse des particules de fluide qui sont au contact de la paroi est nulle. Ces dernières ralentissent les particules adjacentes dans les couches supérieures et ceci sur une épaisseur δ , jusqu'à ce que ce ralentissement soit négligeable. Ce ralentissement s'accompagne de contraintes de cisaillement τ se produisant dans des plans parallèles à la vitesse du fluide. Lorsque la distance à la surface augmente, la vitesse "u" du fluide se rapproche de la vitesse U_∞ .

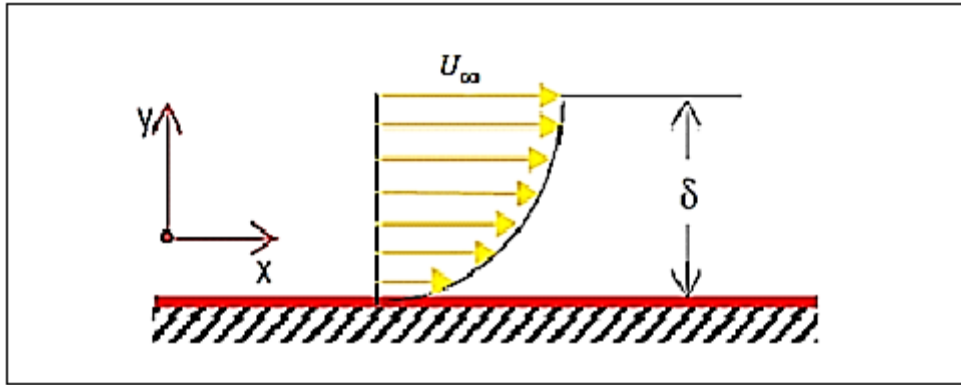


Figure III.5 : Couche limite au voisinage d'une paroi solide

On appelle la grandeur δ l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique. Elle se définit par la distance à la surface qui correspond à la vitesse $u = 0,99 U_\infty$.

Prandtl a constaté que pour la majorité des écoulements, la viscosité n'avait une importance que dans une zone très fine proche de la paroi solide. Par conséquent, on peut considérer que le reste du fluide est non visqueux et donc idéal.

Si le fluide est newtonien, la contrainte tangentielle est représentée par la loi de Newton qui peut être exprimée de la façon suivante :

$$\tau = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \quad (\text{III. 6})$$

Où :

- ❖ τ : La contrainte tangentielle appliquée à un fluide.
- ❖ μ : La viscosité dynamique.
- ❖ U_∞ : La vitesse près de la couche limite.
- ❖ δ : L'épaisseur de la couche limite.

Dans la couche limite, U_∞ est associée à la vitesse u selon la formule ci-dessous :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_\infty}{\delta} \quad (\text{III. 7})$$

La contrainte tangentielle prend donc la forme de la relation suivante :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III. 8})$$

La viscosité cinématique est également donnée par la formule suivante :

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

❖ Exercice d'application 1 :

On place deux plaquettes horizontales écartées de 1,25 cm. Le vide entre elles sont occupé par une huile de viscosité dynamique $\mu=1,4 \text{ Ns /m}^2$.

Déterminez la contrainte tangentielle appliquée par l'huile lorsque la plaquette supérieure est en mouvement à une vitesse de 2,5 m/s.

Solution :

Déterminons la contrainte tangentielle exercée par l'huile :

$$\tau = \mu \frac{U_{\infty}}{\delta}$$
$$\tau = 1,4 \frac{2,5}{0,0125} = 280 \text{ N/m}^2$$

3.2 Hypothèses de la couche limite

Compte tenu également des particularités de l'écoulement des fluides à proximité d'une paroi solide, des hypothèses valables seulement au sein de la couche limite et qui permettent de simplifier les équations du mouvement. Ces hypothèses sont appelées « Hypothèses de la couche limite ».

- Le fluide en contact direct avec la paroi reste immobilisé : on parle de condition d'absence de glissement, exprimée par la formule suivante pour un écoulement bidimensionnel :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(y, 0) = 0 \end{cases}$$

- L'épaisseur de la couche limite notée δ et déterminée par la distance où $u = 0,99 U_{\infty}$ est considérée comme étant petite relativement aux autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Cependant, cette épaisseur est augmentée lorsqu'on se dirige dans la direction de l'écoulement.
- Dans la couche limite, la vitesse (dans le sens de l'écoulement) axiale indiquée u est très élevée par rapport à la vitesse radiale indiquée v , autrement dit quand $y < \delta$ alors $u \gg v$.
- Dans la couche limite, les changements de vitesse dans le sens de l'écoulement relativement à y sont significatifs.

Ces hypothèses ne sont valables que dans la couche limite, permettent de simplifier considérablement les équations du mouvement.

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

Pour un écoulement bidimensionnel stationnaire et laminaire, les équations de l'écoulement s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 9})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III. 10})$$

Avec :

$$\begin{cases} u = v = 0 \text{ à } y = 0 \\ u = U_{\infty}(x) \text{ à } y = \delta \end{cases}$$

Dans ce cas, l'épaisseur de la couche limite est calculée en fonction du nombre de Reynolds non dimensionnel :

$$\delta_{laminaire} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{III. 11})$$

Où :

- ❖ Re_x : Nombre de Reynolds.
- ❖ $\delta_{laminaire}$: L'épaisseur de la couche limite dans le régime laminaire.
- ❖ x : Distance entre le début du corps et le point visé.

4. Régime laminaire et régime turbulent

Afin de résoudre un phénomène de convection, il faut déterminer le régime d'écoulement du fluide : laminaire ou turbulent. Le coefficient de transfert de chaleur par convection est fortement dépendant de ce régime d'écoulement. La zone de transition entre les deux régimes d'écoulement a été prouvée par Reynolds, qui a déterminé avec succès un critère de stabilité qui régit la transition entre ces deux régimes.

Reynolds a effectué des calculs dimensionnels sur des écoulements dans des tuyaux et a constaté que la transition se produisait à partir d'une valeur fixe d'un critère donné, qui peut être représenté par le rapport entre les forces d'inertie et la viscosité. Ce paramètre est appelé aujourd'hui « Nombre de Reynolds ». La démonstration de sa définition physique peut être faite de la manière suivante :

$$Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{\rho U L}{\mu} \quad (\text{III. 12})$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

Le nombre de Reynolds est donné aussi en fonction de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ par la relation suivante :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{III.13})$$

On considère en général que la valeur transitoire de Reynolds déterminant le changement d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent correspond à :

- ❖ $Re = 2300$ pour les écoulements dans les conduites.
- ❖ $Re = 300000$ pour les écoulements sur plaques planes.

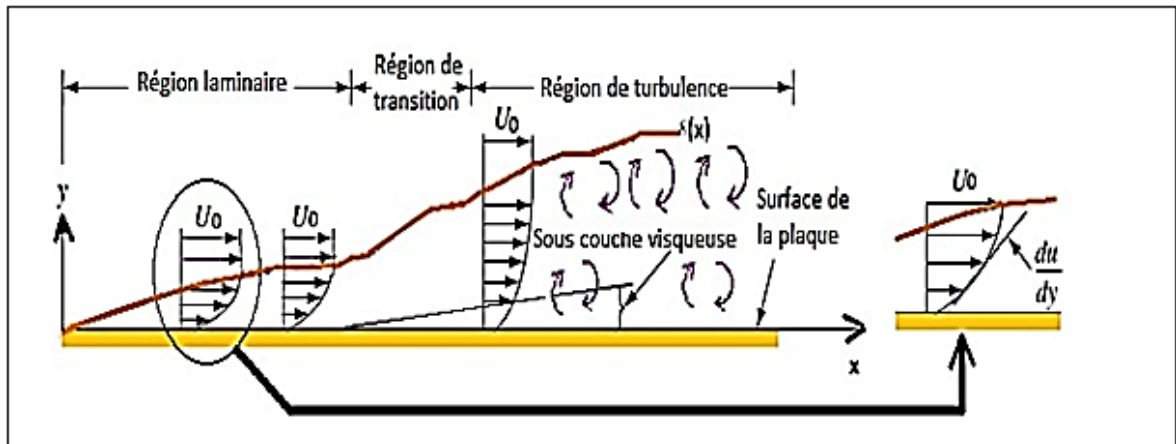


Figure III.6 : Les profils de vitesse dans la couche limite en régime laminaire et turbulent (écoulement sur une plaque plane)

❖ Exercice d'application 2 :

L'eau circule dans un tuyau ayant une section circulaire avec un diamètre intérieur de 10 cm. Calculez la vitesse de l'écoulement à la transition.

Pour cela, on considère :

$$\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2 \text{ et } \rho = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

Solution :

Dans ce cas, la valeur critique de Reynolds est 2300.

Donc :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{\rho UD}{\mu}$$
$$Re = \frac{\rho UD}{\mu} \Rightarrow U = \frac{Re \cdot \mu}{\rho \cdot D}$$

$$U = \frac{2300 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 0,1} = 0,023 \text{ m/s}$$

✚ Expérience de Reynolds

Reynolds a réalisé plusieurs expérimentations classiques concernant des écoulements à l'intérieur de tuyaux. Ces expériences ont fait apparaître la présence de deux régimes différents : un régime dit « laminaire » et un régime dit « turbulent ».

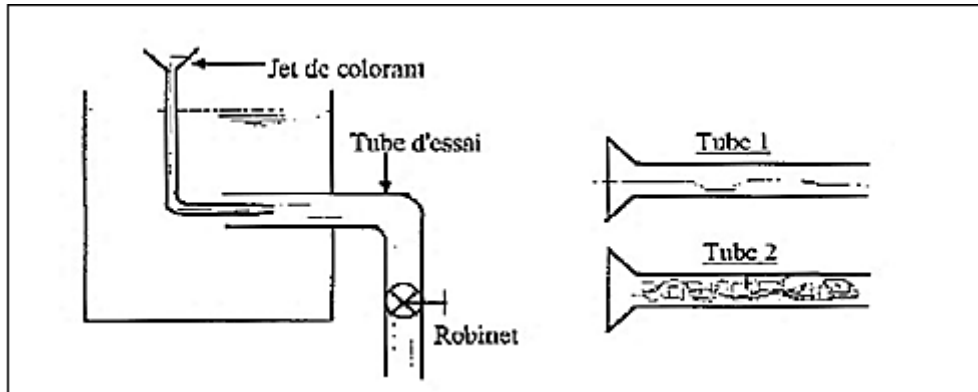


Figure III.7 : Représentation de l'expérience de Reynolds

Pour ce faire, on a injecté un fin filet de teinture dans le tube de test placé dans un récipient contenant un liquide de même densité que la teinture. Lorsque le débit est peu élevé, le flux de colorant restera mince et parallèlement aux lignes d'écoulement dans le tube : c'est le régime laminaire (Tube 1 de la Figure III.7). Quand on augmente le débit au-delà d'une certaine valeur critique, le filet de teinture devient ondulant puis on observe très rapidement un éclatement de ce filet qui paraît alors occupé tout le tube : c'est le régime turbulent (tube 2 de la figure III.7).

❖ Exercice d'application 3 :

On maintient une plaque carrée, lisse et plate de 2cm de longueur de côté plongée dans de l'eau de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ qui s'écoule avec une vitesse de $U = 30 \text{ cm/s}$. On cherche à connaître la nature de l'écoulement à une distance de 50cm du côté de la plaque et l'épaisseur de la couche limite à ce même point.

Solution :

Le nombre de Reynolds à $x = 50 \text{ cm}$:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{0,30 \cdot 0,50}{10^{-6}} = 150000$$
$$150000 < 300000$$

L'écoulement est donc laminaire.

L'épaisseur à cette distance est exprimée par l'équation :

$$\delta_{laminaire} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$
$$\delta_{laminaire} = \frac{5,0,50}{\sqrt{150000}} = 0,0064 \text{ m}$$

5. Nombres adimensionnels

Les nombres sans dimension couramment appliqués lors de la présence de convection forcée ou naturelle sont récapitulés dans le prochain paragraphe :

5.1 Le nombre de Reynolds

Reynolds a découvert que le régime d'écoulement dépend principalement du rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses dans le fluide. Ce rapport est appelé « Nombre de Reynolds », qui est une quantité sans dimension, et est exprimé pour un écoulement comme :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{III. 13})$$

- ❖ L : Longueur caractéristique.
- ❖ U : La vitesse de l'écoulement.

Le nombre de Reynolds permet de caractériser la nature du régime d'écoulement en convection forcée (laminaire ou turbulent).

5.2 Le nombre de Nusselt

Le nombre de *Nusselt* représente l'augmentation du transfert de chaleur à travers une couche de fluide du fait de la convection par rapport à la conduction à travers la même couche de fluide. Plus le nombre de *Nusselt* est élevé, plus la convection est efficace. Un nombre de *Nusselt* de ($Nu = 1$) pour une couche de fluide représente un transfert de chaleur à travers la couche par conduction pure. Le nombre de *Nusselt* (Nu) défini par :

$$Nu = \frac{Q_{\text{échangée par convection}}}{Q_{\text{échangée par conduction}}}$$
$$Nu = \frac{hS\Delta T}{K \frac{S}{L} \Delta T} = \frac{hL}{K} \quad (\text{III. 14})$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

5.3 Le nombre de *Prandtl*

Le nombre de *Prandtl* correspond au rapport de la diffusion moléculaire de la quantité de mouvement par la diffusivité thermique, autrement dit le milieu dans lequel s'effectue le transfert, il est déterminé par :

$$Pr = \frac{\text{Diffusion moléculaire de la quantité de mouvement}}{\text{Diffusivité thermique}}$$

$$Pr = \frac{\text{viscosité cinématique}}{\text{diffusivité thermique}}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{K} \quad (\text{III. 15})$$

❖ C_p : Chaleur massique à pression constante.

On donne ici les valeurs typiques de nombre de Prandtl pour les fluides couramment utilisées :

Tableau III.1 : Valeurs typiques de nombre de Prandtl pour les fluides

Fluides	Pr
Liquides	
Métaux liquides	0,004-0,030
Eau	1,7-13,7
liquides organiques légers	5-50
Huiles	50-100000
Glycérine	2000-100000
Gaz	
CO ₂	0.75
CO	0.72
Ar	0.66
Air	0.69
He	0.71
N ₂	0.70
H ₂	0.69
O ₂	0.70
H ₂ O (vapeur)	1.06

5.4 Le nombre de *Grashof*

Le nombre de *Grashof* correspond aux forces de flottabilité par rapport aux forces de viscosité et est exprimé comme suit :

$$Gr = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (\text{III. 16})$$

- ❖ g : L'accélération de la force de gravité m/s^2 .
- ❖ β : Coefficient de dilatation volumique : $\beta = \frac{1}{T(k)}$
- ❖ L : longueur caractéristique (m).
- ❖ T_s : Température de la surface ($^{\circ}\text{C}$).
- ❖ T_{∞} : Température du fluide suffisamment éloignée de la surface ($^{\circ}\text{C}$).
- ❖ ν : viscosité cinématique du fluide (m^2/s).

5.5 Le nombre de Rayleigh

Remplace le nombre de Reynolds en convection naturelle.

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (\text{III. 17})$$

6. Equations expérimentales fréquemment rencontrées

Il existe de nombreuses équations pour la détermination du coefficient de transfert de chaleur par la convection à partir de la formule du nombre de Nusselt. Ces corrélations varient en fonction de la nature de la convection (naturelle ou forcée), de la nature du régime d'écoulement (turbulent ou laminaire) et de la localisation de l'écoulement (plaque plane ou conduite).

6.1 Convection naturelle ou libre

Nous avons mentionné dans les paragraphes précédents que la convection forcée est gouvernée par le nombre de Reynolds, qui correspond au rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité agissant sur le fluide. Le régime des écoulements en convection naturelle est gouverné par le nombre de Rayleigh, qui représente le rapport entre la force de flottabilité et la force de viscosité du fluide (Figure III.8).

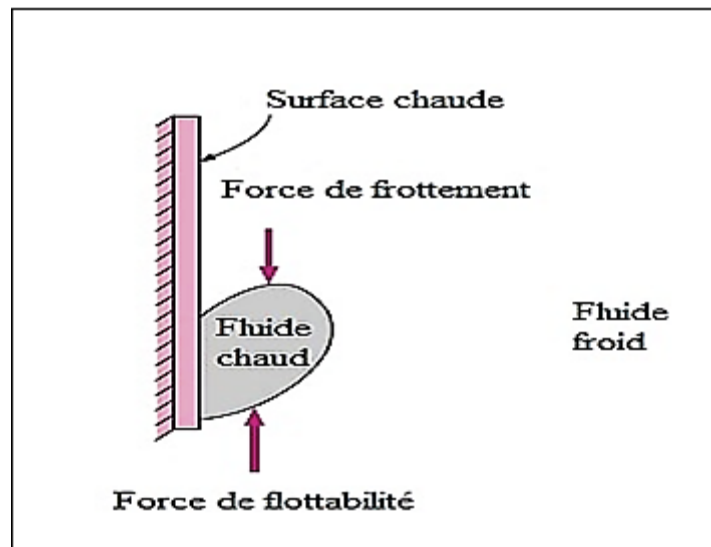


Figure III.8 : Schéma simplifié représente la force de flottabilité et de la force de viscosité opposée du fluide

Le rôle joué par le nombre de Reynolds dans la convection forcée est joué par le nombre de Rayleigh dans la convection naturelle. En conséquence, le nombre de Rayleigh constitue le principal critère pour connaître si l'écoulement de fluide est laminaire ou turbulent en convection naturelle.

Ce paragraphe expose les relations qui permettent de définir un mécanisme de transfert de chaleur par convection libre sur les parois isothermes.

Les relations responsables des analyses empiriques du transfert de chaleur par convection libre sont habituellement de la forme suivante :

$$Nu = A (Ra)^m \quad (\text{III. 18})$$

Les quantités physiques impliquées dans les nombres de Grashof et de Prandtl sont calculées en fonction de la température du fluide, que l'on prend égale à celle du film près de la paroi.

$$T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2} \quad (\text{III. 19})$$

La constante m aura les valeurs suivantes :

- $m = 1/4$: Quand la convection est laminaire
- $m = 1/3$: Quand la convection est turbulente

La constante A est fonction du régime de convection, de la pente et de la géométrie de la paroi.

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

Tableau III.2 : Corrélations empiriques couramment utilisées dans la convection naturelle

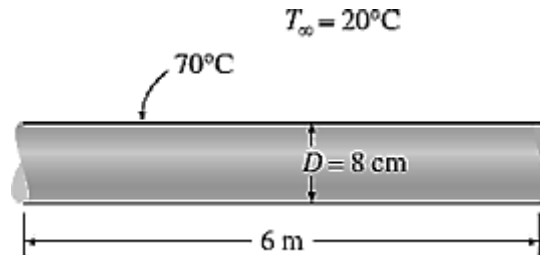
Géométrie	Ra	Corrélations empiriques	
		gaz quelconque	Cas de l'air
Plaques et cylindres verticaux	Régime laminaire : $Ra = [10^4 - 10^9]$	$Nu = 0,59 Ra^{1/4}$	$Nu = 0,54 Ra^{1/4}$
	Régime turbulent : $Ra = [10^9 - 10^{11}]$	$Nu = 0,13 Ra^{1/3}$	$Nu = 0,12 Ra^{1/3}$
Plaque horizontale	Régime laminaire : $Ra = [10^5 - 10^7]$	$Nu = 0,59 Ra^{1/4}$	$Nu = 0,54 Ra^{1/4}$
	Régime turbulent : $Ra = [10^7 - 10^{13}]$	$Nu = 0,13 Ra^{1/3}$	$Nu = 0,12 Ra^{1/3}$
Cylindres horizontaux	Régime laminaire : $Ra = [10^4 - 10^9]$	$Nu = 0,53 Ra^{1/4}$	$Nu = 0,49 Ra^{1/4}$
	Régime turbulent : $Ra = [10^9 - 10^{13}]$	$Nu = 0,13 Ra^{1/3}$	$Nu = 0,12 Ra^{1/3}$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

❖ Exercice d'application 4 :

Un morceau de 6 m de longueur d'un tuyau d'eau chaude horizontal de 8 cm de diamètre, illustré à la figure, traverse une grande pièce dont la température est de 20 °C. Si la température de la surface extérieure du tuyau est de 70°C, déterminez la perte calorifique du tuyau par convection naturelle. Sachant que :

$k = 0,02699 \text{ w/m}$; $\nu = 1,749 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $Pr = 0,7241$.



Solution :

Déterminons tout d'abord la nature de l'écoulement : Les propriétés de l'air à la température du film à :

$$T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{70 + 20}{2} = 45 \text{ °C}$$

Donc :

$$\beta = \frac{1}{T(k)}$$

$$\beta = \frac{1}{45 + 273} = 0,0031 \text{ k}^{-1}$$

Le nombre de Rayleigh devient :

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Gr = \frac{\beta g D^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2}$$

$$Ra = \frac{\beta g D^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2} \cdot Pr$$

$$Ra = \frac{0,0031 \cdot 9,81 \cdot (0,08)^3 (70 - 20)}{(1,749 \cdot 10^{-5})^2} \cdot (0,7241)$$

$$Ra = 1,869 \cdot 10^6$$

Le régime donc est laminaire.

$$Nu = 0,53 Ra^{1/4} = \frac{hD}{k}$$

$$h = \frac{k}{D} [0,53 Ra^{1/4}]$$

$$h = \frac{0,02699}{0,08} \left[0,53 (1,869 \cdot 10^6)^{1/4} \right]$$

$$h = 5,869 \text{ w/m}^2\text{°C}$$

$$Q = hS(T_1 - T_2)$$

$$Q = h(\pi DL)(T_1 - T_2)$$

$$Q = 5,869 (\pi \cdot 0,08 \cdot 6)(70 - 20)$$

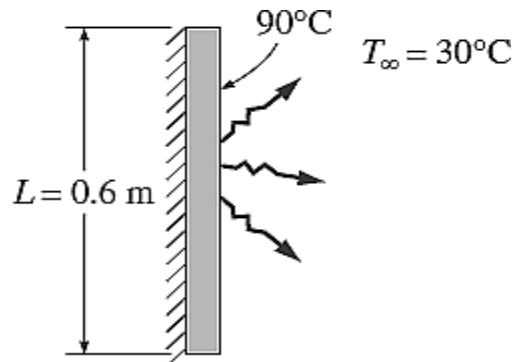
$$Q = 443 \text{ w}$$

❖ Exercice d'application 5 :

Une pièce carrée de 0,6 m de côté posée verticalement dans une pièce à 30°C. Une face de la plaque est tenue à une température de 90°C, tandis que l'autre face est isolée, comme le montre la figure. Déterminez le flux de chaleur de la plaque par convection naturelle.

Sachant que :

$$k = 0,02808 \text{ w/m} ; \nu = 1,896 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} ; Pr = 0,7202.$$



Solution :

Les propriétés de l'air à la température du film à :

$$T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{90 + 30}{2} = 60 \text{ °C}$$

Donc :

$$\beta = \frac{1}{T(k)}$$

$$\beta = \frac{1}{60 + 273} = 0,0030 \text{ k}^{-1}$$

Le nombre de Rayleigh devient :

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Gr = \frac{\beta g L^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2}$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

$$Ra = \frac{\beta g L^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2} \cdot Pr$$
$$Ra = \frac{0,0030.9,81. (0,6)^3 (90 - 30)}{(1,896. 10^{-5})^2} \cdot (0,7202)$$
$$Ra = 7,656. 10^8$$

Le régime donc est laminaire.

$$Nu = 0,54 Ra^{1/4} = \frac{hL}{k}$$
$$h = \frac{k}{L} [0,54 Ra^{1/4}]$$
$$h = \frac{0,02808}{0,6} [0,54 (7,656. 10^8)^{1/4}]$$
$$h = 5,306 \text{ w/m}^2\text{°C}$$
$$Q = hS(T_1 - T_2)$$
$$Q = h(L.H)(T_1 - T_2)$$
$$Q = 5,306. (0,6.0,6)(90 - 30)$$
$$Q = 115 \text{ w}$$

❖ Exercice d'application 6 :

Calculez la quantité de chaleur perdue par unité de temps et par unité de surface d'un échangeur de chaleur horizontal pour lequel un courant d'air libre de 30°C refroidit la calandre. Le diamètre extérieur du tube est de 400 mm et la température de ses parois est de 200°C.

Sachant que :

$$\rho = 0,885 \text{ kg / m}^3 ; \mu = 2,2.10^{-5} \text{ kg / ms} ; k = 0,033 \text{ w / mk} ; C_p = 1013 \text{ J / kgk}.$$

Solution :

Calculons d'abord la température du film de fluide :

$$T_m = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{200 + 30}{2} = 115 \text{ °C}$$

Donc :

$$\beta = \frac{1}{T(k)}$$
$$\beta = \frac{1}{115 + 273} = 0,00257 \text{ k}^{-1}$$

Le nombre de Rayleigh devient :

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 (T_s - T_\infty)}{\mu^2}$$

$$Gr = \frac{0,00257 \cdot 9,81 \cdot (0,885)^2 (0,4)^3 (90 - 30)}{(2,2 \cdot 10^{-5})^2} = 4,43 \cdot 10^8$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} = \frac{2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 1013}{0,033} = 0,675$$

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Ra = 4,43 \cdot 10^8 \cdot 0,675$$

$$Ra = 3 \cdot 10^8 < 10^9$$

Le régime donc est laminaire.

$$Nu = 0,49 Ra^{1/4} = \frac{hL}{k}$$

$$h = \frac{k}{L} [0,49 Ra^{1/4}]$$

$$h = \frac{0,033}{0,4} [0,49 (3 \cdot 10^8)^{1/4}]$$

$$h = 5,320 \text{ w/m}^2 \text{ k}$$

$$Q = hS(T_1 - T_2)$$

$$\frac{Q}{S} = h(T_1 - T_2)$$

$$\frac{Q}{S} = 5,320(200 - 30)$$

$$\frac{Q}{S} = 904 \text{ w/m}^2$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

6.2 Convection forcée

En pratique, on rencontre très souvent des cas de convection forcée dans les échangeurs de chaleur de toutes sortes. Ce sont notamment les récupérateurs de chaleur dans les capteurs solaires, le refroidissement des centrales nucléaires, la circulation de liquides cryogéniques dans les systèmes de refroidissement des appareils à usage thermique. Dans ces installations, il y a deux sortes d'écoulement :

- ❖ Extérieur : la circulation du fluide ne se limite pas à un espace.
- ❖ Intérieur : le fluide circule dans un espace limité (conduit, canalisation, etc.).

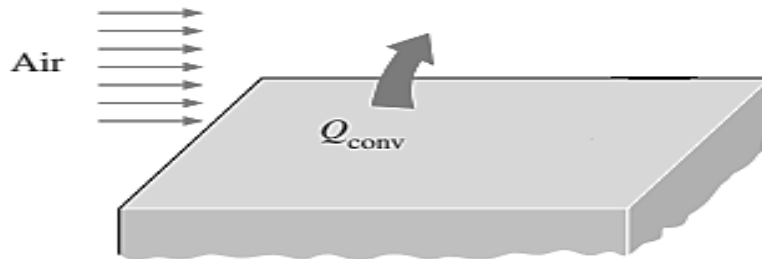
6.2.1 Echange de chaleur le long d'une plaque plane

- ❖ *Régime laminaire* : $Re \leq 3.10^5$

$$Nu = 0,66(Re)^{1/2}(Pr)^{1/3} \quad (\text{III. 20})$$

- ❖ *Régime turbulent* : $Re > 3.10^5$

$$Nu = 0,036(Re)^{4/5}(Pr)^{1/3} \quad (\text{III. 21})$$



- ❖ *Exercice d'application 7 :*

Une fine plaque ayant une longueur de 2m et une largeur de 1,5m est soumise à un flux d'air avec une vitesse de 1,5 m/s et une température de 20°C dans le sens longitudinal. La température sur la surface de la plaque est de 90°C. On recherche à déterminer :

1. le coefficient de transfert de chaleur par convection dans le sens longitudinal.
2. la quantité de chaleur transmis par la plaque vers l'air.

Sachant que :

$$C_P = 1006 \text{ J / kgk} ; k = 0,026 \text{ W / mk} ; \mu = 1,8.10^{-5} \text{ kg / ms} ; \rho = 1,175 \text{ kg / m}^3.$$

Solution :

1. Calculons le coefficient de transfert de chaleur par convection:

À 20°C, les caractéristiques de l'air sont :

$$C_P = 1006 \text{ J / kgk} ; k = 0,026 \text{ W / mk} ; \mu = 1,8.10^{-5} \text{ kg / ms} ; \rho = 1,175 \text{ kg / m}^3.$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

Déterminons tout d'abord la nature de l'écoulement :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

$$Re = \frac{1,175 \cdot 1,5 \cdot 2}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1,96 \cdot 10^5$$

$$1,96 \cdot 10^5 < 3 \cdot 10^5$$

Il est donc laminaire et on applique l'équation :

$$Nu = 0,66(Re)^{1/2}(Pr)^{1/3}$$

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

$$Nu = 0,66(Re)^{1/2}(Pr)^{1/3} = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = 0,66 \cdot \frac{k}{L} (Re)^{1/2} (Pr)^{1/3}$$

$$h = 0,66 \cdot \frac{k}{L} (Re)^{1/2} \left(\frac{\mu C_p}{k} \right)^{1/3}$$

D'où :

$$h = 0,66 \cdot \frac{0,0260}{2} (1,96 \cdot 10^5)^{1/2} \left(\frac{1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 1006}{0,026} \right)^{1/3}$$

$$h = 3,36 \text{ w/m}^2 \text{ k}$$

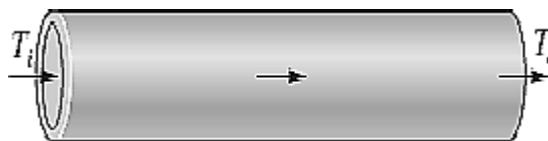
1. la quantité de chaleur transmis par la plaque vers l'air est :

$$Q = 2 \cdot h \cdot S(T_1 - T_2)$$

$$Q = 2 \cdot 3,36 \cdot (2 \cdot 1,5) (90 - 20)$$

$$Q = 1411 \text{ w}$$

6.2.2 Ecoulement à l'intérieur de tubes cylindriques



❖ *Régime laminaire : $Re \leq 2300$*

μ_m, μ_p : Viscosités dynamiques définies à T_m et T_p

T_p : Température de la paroi interne du tube

$T_m = \frac{T_p + T_f}{2}$: Température moyenne

D : Diamètre intérieur du tube

✚ Corrélation de Haussen :

$$Nu = 3,66 + \frac{0,0668 \cdot Re \cdot Pr \cdot (D/L)}{1 + 0,04[Re \cdot Pr \cdot (D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \quad (\text{III. 22})$$

✚ Corrélation de Sieder et Tate :

$$Nu = 1,86(Re \cdot Pr)^{1/3} (D/L)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \quad (\text{III. 23})$$

- Pour : $[Re \cdot Pr \cdot (D/L)] > 100$ toutes les propriétés sont définies à T_m sauf μ_p

✚ Corrélation de Kays :

$$Nu = 3,66 + \frac{0,104 \cdot Re \cdot Pr \cdot (D/L)}{1 + 0,016[Re \cdot Pr \cdot (D/L)]^{0,8}} \quad (\text{III. 24})$$

❖ Régime turbulent : $Re > 2300$

✚ Corrélation de Colburn :

$$Nu = 0,023(Re)^{0,8}(Pr)^{1/3} \quad (\text{III. 25})$$

Pour :

$$\begin{cases} L/D > 60 \\ 0,7 \leq Pr < 100 \\ 10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5 \end{cases}$$

✚ Corrélation de Sieder et Tate :

$$Nu = 0,023(Re)^{0,8}(Pr)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \quad (\text{III. 26})$$

✚ Corrélation de Mc-Adams :

$$Nu = 0,023(Re)^{1/5}(Pr)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \left[1 + (D/L)^{0,7}\right] \quad (\text{III. 27})$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

❖ Exercice d'application 8 :

Déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection et la quantité de chaleur produite par une huile qui s'écoule à une vitesse de 0,5 m/s à travers une conduite de 10 mm de diamètre et de 1 m de longueur lorsque les températures moyennes de l'huile et de la conduite sont de 80°C et de 20°C respectivement. Les propriétés de l'huile employée à la température à laquelle elle circule, soit 80°C, sont les suivantes :

$$C_p = 1,846 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C} ; k = 0,108 \text{ W/m}^\circ\text{C} ; \mu = 30,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms} ; \rho = 844 \text{ kg / m}^3.$$

La viscosité de l'huile à 20°C est :

$$\mu_p = 198,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms.}$$

Solution :

Calculons le coefficient de de transfert de chaleur par convection :

Déterminons d'abord le régime d'écoulement :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$
$$Re = \frac{844 \cdot 0,5 \cdot 0,01}{30,8 \cdot 10^{-4}} = 1370$$
$$1370 < 2300$$

Donc le régime d'écoulement est laminaire.

On peut appliquer dans ce cas la relation de Haussen comme suit :

$$Nu = 3,66 + \frac{0,0668 \cdot Re \cdot Pr \cdot (D/L)}{1 + 0,04 [Re \cdot Pr \cdot (D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$$

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

$$h = \frac{k}{D} \left[3,66 + \frac{0,0668 \cdot Re \cdot Pr \cdot (D/L)}{1 + 0,04 [Re \cdot Pr \cdot (D/L)]^{2/3}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \right]$$

Calculons le produit :

$$Re \cdot Pr \cdot (D/L) = Re \cdot \left(\frac{\mu C_p}{k} \right) \cdot (D/L) = 1370 \cdot \left(\frac{30,8 \cdot 10^{-4} \cdot 1,846}{0,108} \right) \cdot \left(0,01/1 \right) = 721$$

$$h = \frac{0,108}{0,01} \left[3,66 + \frac{0,0668 \cdot (721)}{1 + 0,04 [721]^{2/3}} \left(\frac{30,8}{198,2} \right)^{0,14} \right]$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

$$h = 134,6 \text{ w/m}^2\text{°C}$$

2. Calculons la quantité de chaleur produite par une huile :

$$Q = hS(T_1 - T_2)$$

$$Q = h(\pi DL)(T_1 - T_2)$$

$$Q = 134,6 (\pi \cdot 0,01 \cdot 1)(80 - 20)$$

$$Q = 253,6 \text{ w}$$

❖ *Exercice d'application 9 :*

Il est nécessaire de déterminer la quantité de chaleur produite par de l'eau qui se déplace de façon forcée à travers un tube de diamètre 18mm. La vitesse de l'eau est 1m/s ainsi que sa température égale à 120°C. La température de la paroi intérieure du tube de 3m de longueur est supposée constante est égale à 110°C.

Pour une température de 120°C, les propriétés de l'eau sont égales à :

$$C_p = 4250 \text{ J/kgK} ; k = 0,685 \text{ w/mK} ; \mu = 2,34 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms} ; \rho = 945,3 \text{ kg/m}^3.$$

Solution :

Calculons la quantité de chaleur produite par de l'eau :

Calculons d'abord le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu}$$

$$Re = \frac{945,3 \cdot 1 \cdot 0,018}{2,34 \cdot 10^{-4}} = 7,3 \cdot 10^4$$

$$7,3 \cdot 10^4 > 2300$$

L'écoulement est donc turbulent.

Appliquons la relation de Colburn :

$$Nu = 0,023(Re)^{0,8}(Pr)^{1/3}$$

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

$$h = \frac{k}{D} \left[0,023(Re)^{0,8}(Pr)^{1/3} \right]$$

Pour cela, il faudra vérifier les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} L/D > 60 \\ 0,7 \leq Pr < 100 \\ 10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5 \end{array} \right.$$

$$\frac{L}{D} = \frac{3}{0,018} = 167 > 60 \rightarrow \text{Vérifier}$$

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{2,34 \cdot 10^{-4} \cdot 4250}{0,685} = 1,45$$

$$0,7 \leq Pr < 100 \rightarrow \text{Vérifier}$$

$$10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5 \rightarrow \text{Vérifier}$$

Donc :

$$h = \frac{0,685}{0,018} \left[0,023(7,3 \cdot 10^4)^{0,8}(1,45)^{1/3} \right]$$

$$h = 7702 \text{ w/m}^2 \text{ k}$$

La quantité de chaleur produite par de l'eau sera :

$$Q = hS(T_1 - T_2)$$

$$Q = h(\pi DL)(T_1 - T_2)$$

$$Q = 7702 (\pi \cdot 0,018 \cdot 3)(120 - 110)$$

$$Q = 13000 \text{ w}$$

6.2.3 Ecoulement dans les espaces annulaires

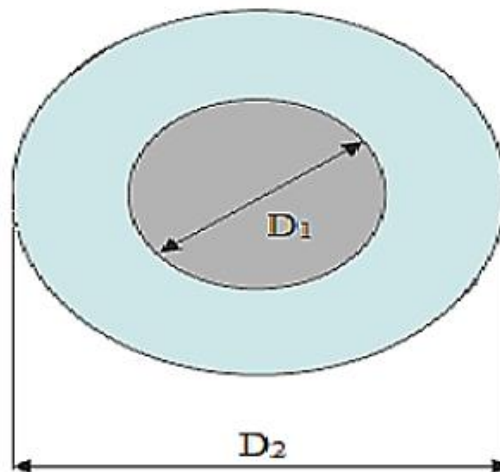


Figure III.9 : Ecoulement dans l'espace annulaire (deux conduites)

$$Nu = 0,023(Re)^{0,8}(Pr)^n \quad (\text{III. 28})$$

Avec :

- $Re = \frac{U_m DH}{\nu}$ et $Nu_{DH} = \frac{h \cdot DH}{k}$

- DH : Diamètre hydraulique, dans ce cas : $DH = D_2 - D_1$

- $n = 0,4$ pour chauffage ($T_1 > T_2$)
- $n = 0,3$ pour refroidissement ($T_1 < T_2$)

6.2.4 Ecoulement perpendiculaire à un tube

✚ Corrélation de Hilpert :

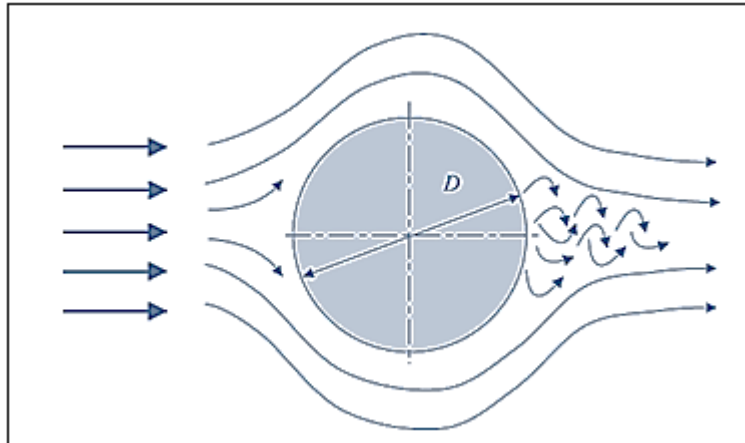


Figure III.10 : Ecoulement perpendiculaire à une conduite

$$Nu = C. (Re)^m \quad (\text{III. 29})$$

Avec :

Tableau III.3 : Valeurs des constantes C et m en fonction de nombre de Reynolds

Re	C	m
1-4	0.891	0.330
4-40	0.821	0.385
40-4000	0.615	0.466
4000-40000	0.174	0.618
40000-250000	0.0239	0.805

6.2.5 Écoulement perpendiculaire à une rangée de tubes

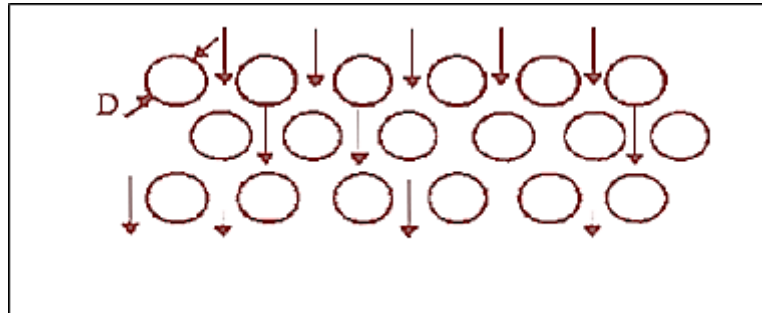


Figure III.11 : Écoulement dans le sens perpendiculaire à une série de tuyaux

✚ Corrélation de Colburn :

$$Nu = 0,33(Re)^{0,6} \cdot (Pr)^{1/3} \quad (\text{III. 30})$$

❖ Exercice d'application 10 :

Une tige de section cylindrique ayant un diamètre égal à 15 mm est refroidie par un courant d'air croisé à une vitesse de 1 m/s et à une température de 20°C. Calculez la quantité de chaleur transférée vers l'air par unité de longueur de tige lorsque la température de la paroi de la tige est de 80°C.

Les propriétés de l'air à une température de 20°C sont les suivantes :

$$C_p = 1006 \text{ J/kgK} ; k = 0,0259 \text{ W/mK} ; \mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms} ; \rho = 1,2 \text{ kg/m}^3.$$

Solution :

L'écoulement étant courant croisé à la tige, donc la relation de Hilpert est appliquée. Calculons le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

$$Re = \frac{1,2 \cdot 1 \cdot 0,015}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1000$$

D'après le tableau, $Re = 1000$, donc :

$$C = 0,615 ; m = 0,466$$

$$Nu = C \cdot (Re)^m = \frac{hD}{k}$$

$$h = \frac{k}{D} [C \cdot (Re)^m]$$

Chapitre III : Transfert de chaleur par convection

$$h = \frac{0,0259}{0,015} [0,615 \cdot (1000)^{0,466}]$$

$$h = 26,55 \text{ w/m}^2 \text{ k}$$

Finalement la quantité de chaleur transférée vers l'air par unité de longueur sera :

$$Q = hS(T_1 - T_2)$$

$$Q = h(\pi DL)(T_1 - T_2)$$

$$Q/L = 26,55 (\pi \cdot 0,015)(80 - 20)$$

$$Q/L = 75 \text{ w/m}$$

Chapitre IV :
Transfert de chaleur par
rayonnement

1. Nature de rayonnement

Le rayonnement diffère des deux autres mécanismes de transfert de chaleur en ce qu'il n'exige pas la présence d'un support matériel pour avoir lieu. Dans la plupart des applications pratiques, les trois modes de transfert de chaleur se produisent simultanément à des degrés divers. Mais le transfert de chaleur à travers un l'espace ne peut se faire que par rayonnement.

Les radiations de type électromagnétique sont émises par chaque corps, peu importe son état : liquide, solide ou gazeux. En fait, l'énergie de transfert par rayonnement est le plus rapide (à la vitesse de la lumière) qui est : $C_0 = 2.9979 \times 10^8$ m/s. Les ondes électromagnétiques sont caractérisées par leur fréquence ν ou leur longueur d'onde λ . Ces deux propriétés dans un milieu sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \quad (\text{IV. 1})$$

C : la vitesse de propagation d'une onde.

La vitesse de propagation dans un milieu est liée à la vitesse de la lumière dans le vide par :

$$C = \frac{C_0}{n} \quad (\text{IV. 2})$$

n : Indice de réflexion du milieu (pour l'air et la plupart des gaz $n = 1$, pour le verre $n = 1.5$, et pour l'eau $n = 1.33$). L'unité de longueur d'onde couramment utilisée est le micromètre (μm) ou $1 \mu\text{m} = 10^{-6}$ m.

Considérons le rayonnement électromagnétique comme la propagation d'un ensemble de faisceaux d'énergie appelés photons, comme il a été proposé par Max Planck en 1900 que chaque photon de fréquence est considéré comme ayant une énergie de :

$$e = h\nu = \frac{hC}{\lambda} \quad (\text{IV. 3})$$

h : Constant de Planck égal à 6.6256×10^{-34} j.s

En effet, l'énergie du photon est liée inversement à sa longueur d'onde. Par conséquent, les rayonnements de courte longueur d'onde possèdent des énergies de photons plus importantes.

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

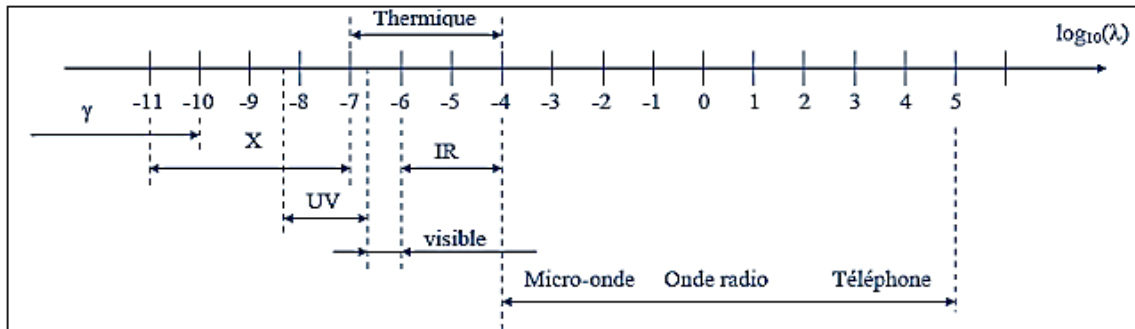


Figure IV.1 : Spectre des ondes électromagnétiques

Le rayonnement thermique se produit dans la gamme des longueurs d'onde $0.1 < \lambda < 100 \mu m$. Pour les surfaces solides, le rayonnement thermique est absorbé et émis dans un rayon d'environ $1 \mu m$ de la surface. Les propriétés qui régissent l'absorption et l'émission de rayonnement thermique dépendent des caractéristiques de la surface (une couche de peinture ou autre peut par exemple modifier de manière significative les propriétés radiatives).

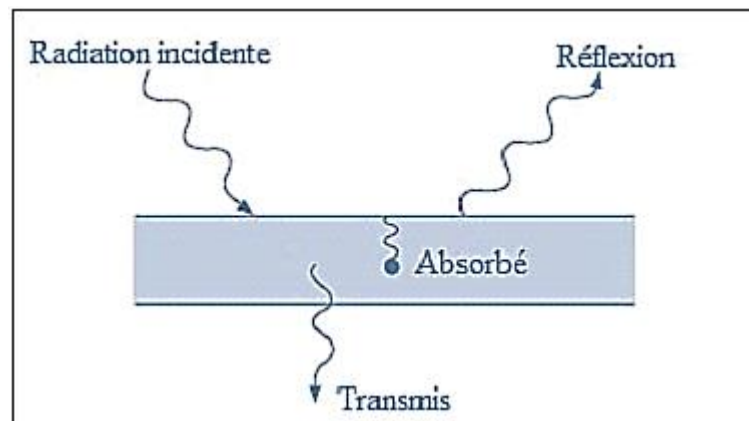


Figure IV.2 : Schéma montrant les effets du rayonnement incident

2. Définitions

Dans ce qui suit on prend les définitions suivantes :

- ✚ Quantité monochromatique : elle concerne uniquement un intervalle spectral étroit ($d\lambda$), au voisinage d'une longueur d'onde (λ).
- ✚ Quantité hémisphérique : elle est liée à toutes les orientations de l'espace.
- ✚ Grandeur directionnelle : elle est caractéristique d'une direction de propagation donnée.
- ✚ Corps émetteur : lorsqu'il envoie un rayonnement proportionnel à sa propre température.
- ✚ Corps récepteur : lorsqu'il capte les rayonnements envoyés ou réfléchis par les corps qui l'entourent.

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

- ✚ Corps opaque : corps qui ne laisse passer à travers lui aucun rayonnement, il stoppe la diffusion de tout type de rayonnement depuis sa surface.
- ✚ Corps transparent : un corps qui laisse passer tout le rayonnement incident.
- ✚ Corps noir : un corps qui absorbe tout le rayonnement reçu, il se caractérise par un pouvoir absorbant ($\alpha_{\lambda T} = 1$). Les corps noirs rayonnent tous de la même manière, les corps noirs rayonnent plus que les corps non noirs à même température.
- ✚ Emittance : Il correspond au flux total qui est émis par une unité de surface de la source.
- ✚ Corps gris : c'est le cas du corps réel. Il absorbe une part de l'énergie et réfléchit et diffuse le reste. Le corps gris est un corps pour lequel le pouvoir d'absorption $\alpha_{\lambda T}$ ne dépend pas de la longueur d'onde λ du rayonnement reçu. Ce pouvoir est déterminé par : $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$
- ✚ L'angle solide $d\omega$: correspond à l'angle par lequel le profil d'une petite surface dS est observé depuis un point O. Il peut être calculé par la formule suivante :

$$d\omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (\text{IV.4})$$

3. Lois du rayonnement

3.1 Loi de Lambert

L'intensité du rayonnement (θ, ϕ) est le taux auquel le rayonnement est émis dans les directions (θ, ϕ) par unité de surface émettrice, et par unité d'angle solide $d\omega$ centré autour des angles (θ, ϕ) dans le système de coordonnées sphériques de la figure (IV.3).

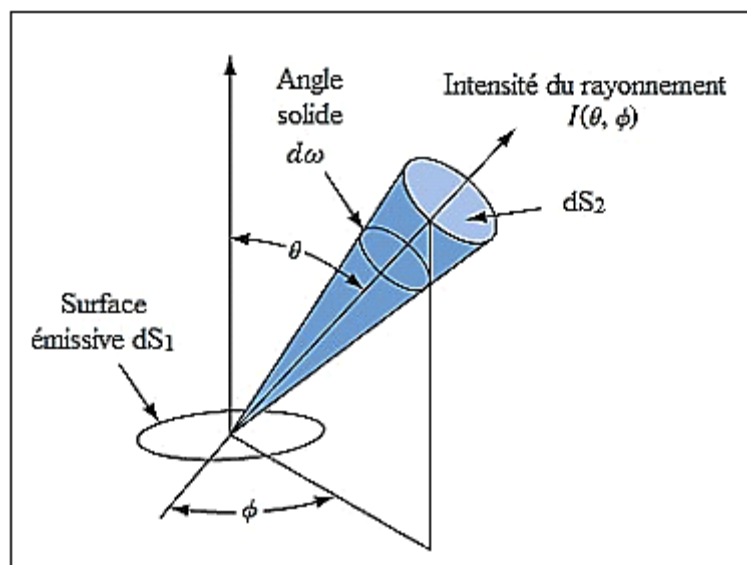


Figure IV.3 : Schéma illustrant l'intensité du rayonnement

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

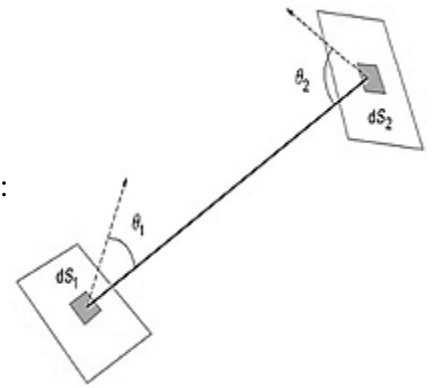
Soient deux éléments noirs de surface dS_1 et dS_2 échangeant un rayonnement :

L'élément dS_1 est vu du centre de dS_2 sous l'angle solide :

$$d\omega_1 = \frac{dS_1 \cos \theta_1}{r^2} \quad (\text{IV. 5})$$

De même l'élément dS_2 est vu du centre de dS_1 sous l'angle solide :

$$d\omega_2 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r^2} \quad (\text{IV. 6})$$



Où r est la distance entre les centres de dS_1 et dS_2 .

✚ L'unité de l'angle solide est le stéradian (sr).

Le flux Q rayonné par dS_1 par unité d'angle solide porte le nom d'intensité I_1 du rayonnement et le débit (vitesse) de la chaleur rayonné par la surface dS_1 vers dS_2 est donné par la loi de Lambert :

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = I_1 \cdot dS_1 \cdot d\omega_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (\text{IV. 7})$$

En tenant compte de la relation donnant $d\omega_2$:

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = I_1 \cdot \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \quad (\text{IV. 8})$$

La symétrie de cette relation permet d'écrire que le débit net (vitesse) de chaleur échangé entre les éléments dS_1 et dS_2 est égal à :

$$dQ_{1 \leftrightarrow 2} = (I_1 - I_2) \cdot \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \quad (\text{IV. 9})$$

Le pouvoir émissif d'une surface, soit E , est par définition, le flux émis par cette surface sur une surface hémisphérique située en avant de la surface émettrice.

Pour une surface émissive, l'intensité du rayonnement émis est indépendante de la direction et donc I est constant. La relation de pouvoir émissif dans ce cas pour un corps noir est :

$$E_b = \pi \cdot I_b \quad (\text{IV. 10})$$

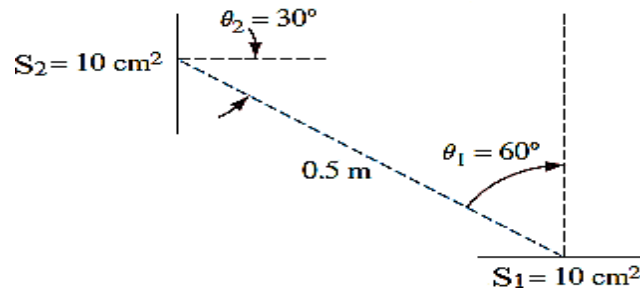
Où $E_b = \sigma \cdot T^4$ est le pouvoir émissif du corps noir. Par conséquent, l'intensité du rayonnement émis par un corps noir à la température T est :

$$I_b(T) = \frac{E_b(T)}{\pi} = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} \quad [\text{w/m}^2 \cdot \text{sr}] \quad (\text{IV. 11})$$

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

❖ Exercice d'application 1 :

Une surface S_1 plane et noire émet $1000 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ dans la direction du rayonnement. Une petite surface S_2 ayant la même surface que S_1 est placée par rapport à S_1 à une distance de $0,5 \text{ m}$, comme indiqué sur la figure. Déterminez l'angle solide soumis par S_2 et la vitesse à laquelle S_2 est rayonnée par S_1 .



Solution :

Comme les deux surfaces sont assez petites, elles peuvent être considérées comme des surfaces différentielles et l'angle solide peut être calculé à partir de la relation :

$$d\omega_2 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r^2} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 30}{(0,5)^2} = 0,00346 \text{ sr}$$

Le rayonnement de la surface S_2 par S_1 est :

$$\begin{aligned} dQ_{1 \rightarrow 2} &= I_1 \cdot dS_1 \cdot d\omega_2 \cdot \cos \theta_1 \\ dQ_{1 \rightarrow 2} &= 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 0,00346 \cdot \cos 60 \\ dQ_{1 \rightarrow 2} &= 0,00173 \text{ w} \end{aligned}$$

3.2 Propriétés de rayonnement

La définition des propriétés du rayonnement total est illustrée à la figure IV.4. Lorsque le rayonnement est incident sur une surface au flux G , une partie de ce rayonnement total est absorbée dans le matériau, une partie est réfléchiée par la surface, et le reste est transmis par le corps. Le pouvoir absorbant, la réflectivité et la transmissivité décrivent comment le rayonnement total est distribué.

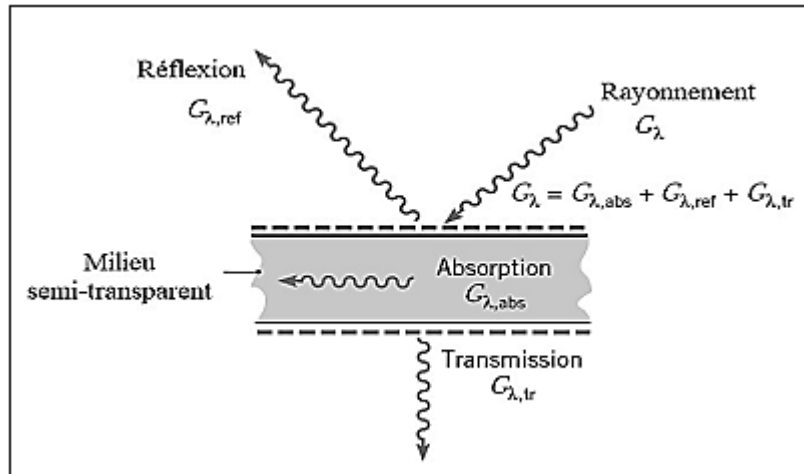


Figure IV.4 : Schéma illustrant le rayonnement incident, réfléchi et absorbé

Le pouvoir absorbant d'une surface α est la fraction de rayonnement absorbée par le corps. La réflexion d'une surface ρ est définie comme la fraction de rayonnement qui est réfléchi par la surface. La transmittance d'un corps τ est la fraction du rayonnement qui est transmise. Si un bilan énergétique est réalisé sur une surface, comme illustré dans la figure (IV.5), on obtient :

$$\alpha G + \rho G + \tau G = G \quad (\text{IV. 12})$$

G : Taux de rayonnement

Il est évident que la somme de pouvoir absorbant, le pouvoir réfléchissant et le pouvoir transmettant doit être égale à l'unité :

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (\text{IV. 13})$$

Lorsqu'un corps est opaque, il ne transmet aucun des rayonnements incidents, c'est-à-dire $\tau = 0$, donc la relation précédente est réduite à :

$$\alpha + \rho = 1 \quad (\text{IV. 14})$$

Une autre propriété importante du rayonnement des surfaces réelles est l'émissivité. L'émissivité d'une surface s , est définie comme le rayonnement émis divisé par le rayonnement qui serait émis par un corps noir à la même température, comme suit :

$$\varepsilon = \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{E(T)}{\sigma \cdot T^4} \quad (\text{IV. 15})$$

Pour les corps noirs :

$$E(T) = E_b(T) \text{ et } \varepsilon_b = \alpha_b = 1$$

3.3 Loi de Kirchoff

Les propriétés du rayonnement peuvent être obtenues à partir des propriétés monochromatiques, qui ne s'appliquent qu'à une seule longueur d'onde. En désignant E_λ comme le pouvoir émissif monochromatique d'une surface quelconque, l'émissivité hémisphérique monochromatique ε_λ de la surface, est donnée par :

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda(T)}{E_{b\lambda}(T)} \quad (\text{IV. 16})$$

En d'autres termes, ε_λ est la fraction du rayonnement du corps noir émis par la surface à la longueur d'onde λ . De même, le pouvoir absorbant monochromatique hémisphérique d'une surface α_λ , est définie comme la fraction de rayonnement qui est absorbée par la surface à la longueur d'onde λ .

❖ Cas des corps gris

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser l'équation (IV. 16) ce qui facilite l'application.

En effet pour un corps gris $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda = \alpha_g = \varepsilon_g$, nous obtenons :

$$E_T = \varepsilon_g \cdot E_{bT} = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{IV. 17})$$

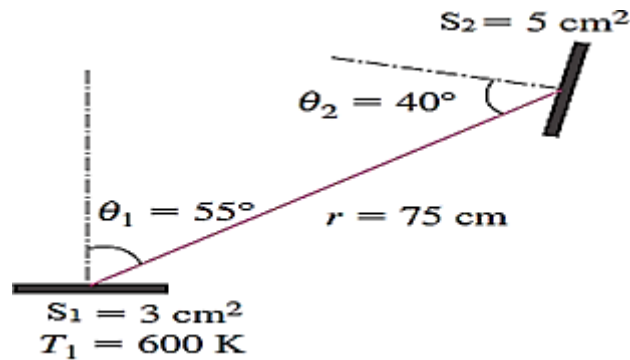
g : Indice pour les corps gris

L'émittance totale E_T d'un corps gris à la température T est égal au produit de son pouvoir émissive ε_T (ou pouvoir absorbant α_T) par l'émittance totale E_{bT} du corps noir à la même température.

❖ Exercice d'application 2 :

Une petite surface $S_1 = 3 \text{ cm}^2$ sous forme de corps noir émet un rayonnement à $T_1 = 600 \text{ K}$. Une partie du rayonnement émis par S_1 touche une autre petite surface $S_2 = 5 \text{ cm}^2$ comme indiqué sur la figure. Déterminez :

1. l'angle solide sous tendu par S_2 lorsqu'il est vu de S_1 .
2. L'intensité de rayonnement émis par S_1 qui atteint S_2 .
3. le taux d'énergie de rayonnement émis par S_1 .



Solution :

1. l'angle solide sous-tendu par S_2 lorsqu'il est vu de S_1 peut être déterminé à partir de la relationsuivante :

$$d\omega_2 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r^2} = \frac{0,05 \cdot \cos 40}{(0,75)^2} = 6,81 \cdot 10^{-4} \text{ sr}$$

2. l'intensité de rayonnement émis par S_1 :

$$I_1 = \frac{E}{\pi} = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (600)^4}{\pi} = 2339 \text{ w/m}^2 \cdot \text{sr}$$

3. le taux de flux de rayonnement émis par S_1 vers S_2 :

$$\begin{aligned} dQ_{1 \rightarrow 2} &= I_1 \cdot dS_1 \cdot d\omega_2 \cdot \cos \theta_1 \\ dQ_{1 \rightarrow 2} &= 2339 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 6,81 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 55 \\ dQ_{1 \rightarrow 2} &= 2,74 \cdot 10^{-4} \text{ w} \end{aligned}$$

4. Rayonnement du corps noir

4.1 L'emittance monochromatique

L'emittance monochromatique du corps noir $E_{b\lambda}$, caractérise la puissance émise par unité de surface et par unité de longueur d'onde, La quantité $E_{b\lambda}$ est généralement appelée le pouvoir émissif monochromatique du corps noir. Une relation montrant comment le pouvoir émissif d'un corps noir est réparti entre les différents Les longueurs d'onde ont été dérivées par Max Planck grâce à sa théorie quantique. La loi de Planck s'exprime par :

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \right]} \quad (\text{IV. 18})$$

Avec :

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

E_b : Pouvoir émissif monochromatique d'un corps noir à température absolue en w/m^3 .

λ : Longueur d'onde en (m).

T : température absolue du corps en (K).

$$\begin{cases} C_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} & [w/m^2] \\ C_2 = 1,4385 \cdot 10^{-2} & [w \cdot k] \end{cases}$$

Cette relation permet de tracer la variation de $E_{b\lambda}$ avec la longueur d'onde pour différentes températures. Les courbes ainsi obtenues qui sont présentées ci-dessous (Figure IV.6), indiquent donc que l'émission monochromatique augmente avec la température et que pour chaque température, il existe une longueur d'onde pour laquelle l'émission monochromatique est maximale. Le lieu des maximums est donné par la loi de Wien :

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{T} \quad [\mu m] \quad (IV. 19)$$

La loi de Wien permet d'exprimer les longueurs d'ondes correspondantes à l'émission monochromatique maximale en fonction de la température.

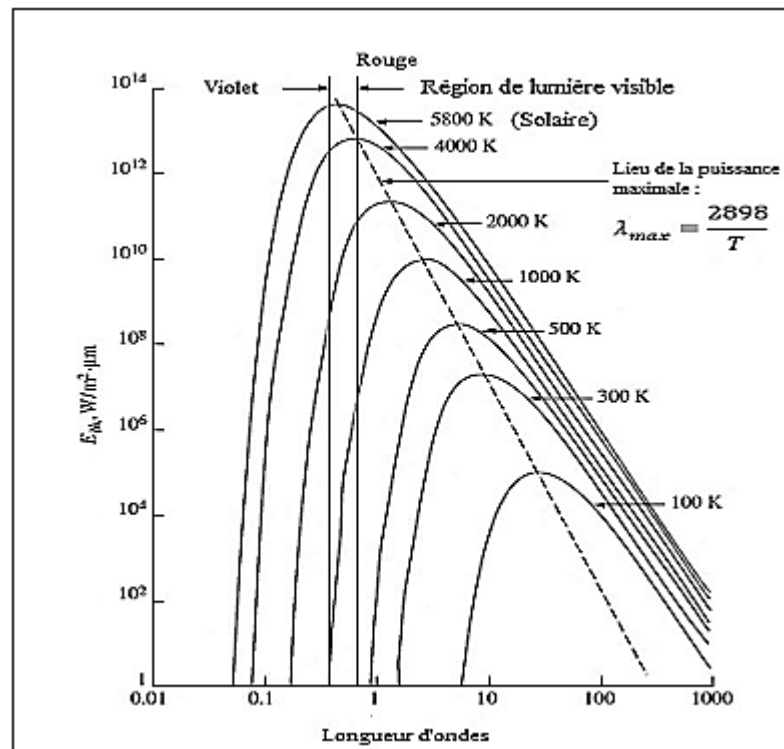


Figure IV.5 : La variation du pouvoir émissif du corps noir en fonction de la longueur d'onde pour plusieurs températures

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

❖ Exercice d'application 3 :

Calculez les longueurs d'onde qui correspondent au maximum d'émission du spectre des surfaces suivantes : surface métallique à 60 K ; peau à 305 ; surface métallique à 1500 K ; flamme de tungstène à 2500 K et soleil à 5800 K refroidie avec de l'azote liquide.

Solution :

D'après la loi de Wien

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{T}$$

On obtient :

surface	Métal	Peau	Métal	Tungstène	Soleil
Température (K)	60	305	1500	2500	5800
λ_{max} (μm)	48.30	9.50	1.93	1.16	0.50

4.2 L'émission totale

En appliquant la relation de Planck à chaque longueur d'onde, on obtient l'émission totale E_b de rayonnement par unité de temps et par unité de surface du corps noir qui seulement liée à la quatrième puissance de la température T , on obtient la loi de Stefan-Boltzmann qui donne l'émission totale du corps noir, la loi de Stefan-Boltzmann est comme suit :

$$E_b(T) = \frac{Q}{S} = \sigma \cdot T^4 \quad [w/m^2] \quad (IV.20)$$

S : la surface du corps noir émettant les radiations en (m^2).

T : température absolue de la surface S en (K).

σ : Constant de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5.675 \cdot 10^{-8}$ [$w/m^2 \cdot K^4$].

La puissance émissive totale donnée par l'équation. (IV.20) représente le rayonnement thermique total émis sur l'ensemble du spectre des longueurs d'onde.

4.3 Fonctions de rayonnement et émission de bande

Les calculs numériques pour connaître l'énergie rayonnée à une longueur d'onde donnée, ou dans une bande limitée entre les longueurs d'onde spécifiques λ_1 et λ_2 sont facilités par l'utilisation des fonctions de rayonnement. La dérivation de ces fonctions et leur application sont illustrées ci-dessous.

A une température donnée, le pouvoir émissif monochromatique est un maximum à la

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

longueur d'onde $\lambda_{max} = 2,898.10^{-3}/T$, selon l'équation (IV.19).

La substitution de λ_{max} par l'équation (IV.18) donne le pouvoir émissif monochromatique maximum $E_{b\lambda_{max}}(T)$:

$$E_{b\lambda_{max}}(T) = \frac{C_1 \cdot T^5}{(0,002898)^5 \left[e^{\frac{C_2}{0,002898}} - 1 \right]} = 12,87.10^{-6} \cdot T^5 \quad (IV.21)$$

$$E_{b\lambda} \equiv [w/m^3]$$

Si l'on divise le pouvoir émissif monochromatique d'un corps noir, $E_{b\lambda}(T)$ par son pouvoir émissif maximum à la même température, $E_{b\lambda_{max}}(T)$ on obtient le rapport sans dimension :

$$\frac{E_{b\lambda}(T)}{E_{b\lambda_{max}}(T)} = \left(\frac{2,898.10^{-3}}{\lambda T} \right)^5 \left(\frac{e^{4,965} - 1}{e^{0,014388/\lambda T} - 1} \right) \quad (IV.22)$$

Où λ est en micromètres et T est en kelvin.

❖ Exercice d'application 4 :

Déterminer (a) la longueur d'onde à laquelle le pouvoir émissif monochromatique d'un filament de tungstène à 1400 K est maximal, (b) le pouvoir émissif monochromatique à cette longueur d'onde, et (c) le pouvoir émissif monochromatique à $5 \mu m$.

Solution :

(a) la longueur d'onde à laquelle le pouvoir émissif est maximal est :

$$\lambda_{max} T = 2,898.10^{-3} \Rightarrow \lambda_{max} = 2,898.10^{-3}/T$$

$$\lambda_{max} = 2,898.10^{-3}/1400 = 2,07.10^{-6} \text{ m}$$

(b) le pouvoir émissif monochromatique à cette longueur d'onde est :

$$E_{b\lambda_{max}}(T) = 12,87.10^{-6} \cdot T^5$$

$$E_{b\lambda_{max}}(T) = 12,87.10^{-6} \cdot (1400)^5 = 6,92.10^{10} \text{ w/m}^3$$

(c) le pouvoir émissif monochromatique à $5 \mu m$:

$$\frac{E_{b\lambda}(T)}{E_{b\lambda_{max}}(T)} = \left(\frac{2,898.10^{-3}}{\lambda T} \right)^5 \left(\frac{e^{4,965} - 1}{e^{0,014388/\lambda T} - 1} \right)$$

$$\frac{E_{b\lambda}(T)}{E_{b\lambda_{max}}(T)} = \left(\frac{2,898.10^{-3}}{5.10^{-6} \cdot 1400} \right)^5 \left(\frac{e^{4,965} - 1}{e^{0,014388/5.10^{-6} \cdot 1400} - 1} \right)$$

$$\frac{E_{b\lambda}(T)}{E_{b\lambda_{max}}(T)} = 0,254$$

$$E_{b\lambda} = 0,254 \cdot E_{b\lambda_{max}}$$

$$E_{b\lambda} = 0,254 \cdot 6,92 \cdot 10^{10}$$

$$E_{b\lambda} = 1,75 \cdot 10^{10} \text{ w/m}^3$$

5. Rayonnement des corps non noirs

5.1 Emissivités (facteurs d'émission)

Les propriétés émissives par rapport aux corps réels sont déterminées en fonction des propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions (longueur d'onde et température) et sont caractérisées par un coefficient appelé émissivité. Ce coefficient monochromatique défini par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{E_{\lambda T}}{E_{b\lambda T}} \text{ et } \varepsilon_T = \frac{E_T}{E_{bT}}$$

Selon la loi de Kirchoff, nous montrons que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T}$$

❖ Cas des corps gris

Ils sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_T$ et d'après ce qui précède : $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Donc :

$$E_T = \varepsilon_T \sigma \cdot T^4 \quad (\text{IV. 23})$$

$$E_T \equiv [\text{w/m}^2]$$

❖ Exercice d'application 5 :

Pour chauffer une pièce d'un appartement, il suffit d'un radiateur de forme cylindrique ayant un diamètre de 2,5 cm et une longueur de 60 cm. Le rayonnement de ce radiateur est celui d'un corps noir et il émet une puissance de 1,5 kW.

1. Déterminez donc sa température.
2. A quelle longueur d'onde sa luminance est-elle maximale ?
3. Pour que la longueur d'onde soit de 2,3 μm , quelle devrait être sa température ?
4. Que devrait donc être sa puissance d'émission à cette température ?

Solution :

$D = 0,025 \text{ m}$; $L = 0,60 \text{ m}$; $Q = 1500 \text{ w}$.

1. Calcul de la température :

$$Q = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{Q}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot S}} = \sqrt[4]{\frac{1500}{1,5,675 \cdot 10^{-8} \cdot (\pi \cdot 0,025 \cdot 0,60)}} = 865,6 \text{ K}$$

2. Longueur d'onde dans laquelle la luminance est maximale :

Pour que « L » soit maximal il faut :

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{T} = \frac{2898}{865,6} = 3,34 \mu\text{m}$$

3. La température dans laquelle la longueur d'onde soit $2,3\mu\text{m}$:

$$\lambda_{max} = \frac{2898}{T} \Rightarrow T = \frac{2898}{\lambda_{max}} = \frac{2898}{2,3} = 1260 \text{ K}$$

4. La puissance dégagée à cette température :

$$Q = \epsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 = 1.5,675 \cdot 10^{-8} \cdot (\pi \cdot 0,025 \cdot 0,60) \cdot (1260)^4$$

$$Q = 6734,5 \text{ w}$$

6. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces

6.1 Le facteur de forme du rayonnement

Dans la plupart des surfaces industrielles peuvent être traitées comme des émetteurs et des récepteurs de rayonnement, le calcul de la quantité de transfert de chaleur par rayonnement entre les surfaces doit déterminer la fraction totale de rayonnement qui quitte une surface et est intercepté par une autre surface et vice versa. La fraction du rayonnement diffusé qui quitte une surface S_i et atteint la surface S_j est appelé le facteur de forme du rayonnement F_{i-j} qui sont définis comme :

F_{1-2} : facteur de forme du rayonnement qui quitte la surface 1 pour être envoyée à la surface 2.

F_{2-1} : facteur de forme du rayonnement qui quitte la surface 2 pour être envoyée à la surface 1.

F_{i-j} : facteur de forme du rayonnement qui quitte la surface i pour être envoyée à la surface j .

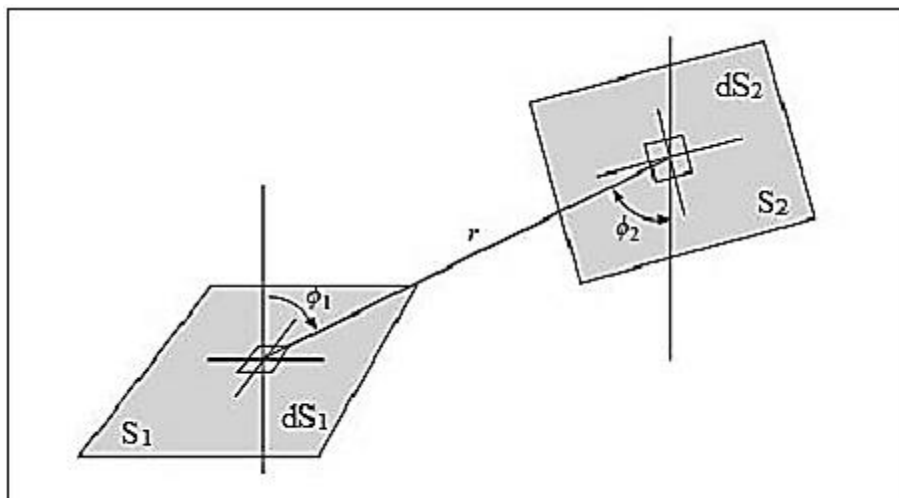


Figure IV.6 : Schéma montrant les éléments de surface utilisés pour dériver le facteur

de forme durayonnement

Considérons deux surfaces noires S_1 et S_2 , comme indiqué dans la figure (IV.6). Le rayonnement quittant S_1 et arrivant à S_2 est :

$$q_{1 \rightarrow 2} = E_1 \cdot S_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{IV.24})$$

Et le rayonnement quittant S_2 et arrivant à S_1 est :

$$q_{2 \rightarrow 1} = E_2 \cdot S_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \quad (\text{IV.25})$$

Comme les deux surfaces sont noires, tout le rayonnement incident sera absorbé et le taux net d'échange d'énergie, $q_{1 \leftrightarrow 2}$ est :

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = E_1 \cdot S_1 \cdot F_{1 \rightarrow 2} - E_2 \cdot S_2 \cdot F_{2 \rightarrow 1} \quad (\text{IV.26})$$

Si les deux surfaces sont à la même température, il ne peut y avoir de flux thermique net entre elles. C'est pourquoi, $q_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ et puisque ni les surfaces ni les facteurs de forme ne sont fonction de la température :

$$S_1 F_{1 \rightarrow 2} = S_2 F_{2 \rightarrow 1} \quad (\text{IV.27})$$

L'équation (IV.27) est appelé le théorème de réciprocité. Le taux de transfert net entre deux surfaces noires quelconques, S_1 et S_2 , peut donc s'écrire sous deux formes :

$$q_{1 \leftrightarrow 2} = S_1 F_{1 \rightarrow 2} (E_1 - E_2) = S_2 F_{2 \rightarrow 1} (E_1 - E_2) \quad (\text{IV.28})$$

l'équation (IV.28) montre que le taux net de flux thermique entre deux corps noirs peut être déterminé en évaluant le rayonnement de l'une des surfaces vers l'autre et en remplaçant son pouvoir émissif par la différence entre les pouvoirs émissifs des deux surfaces.

6.2 Échange de rayonnement entre deux surfaces parallèles infinies

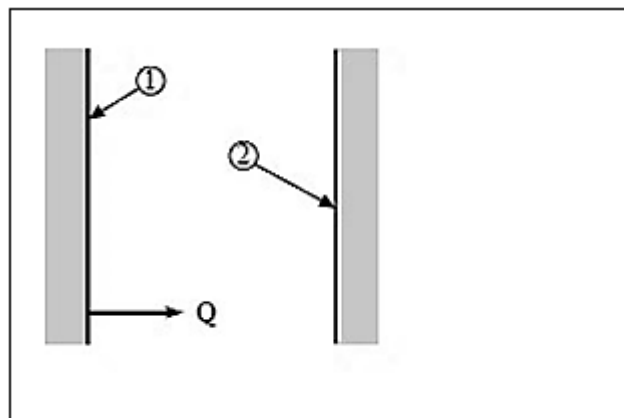


Figure IV.7 : Échange de rayonnement entre deux surfaces parallèles infinies

Si l'on considère deux plans parallèles infinis comme le montre la figure (IV.7), S_1 et S_2 sont égaux ; et le facteur de forme du rayonnement est identique puisque tout le rayonnement sortant d'un plan atteint l'autre. Le flux thermique par unité de surface peut

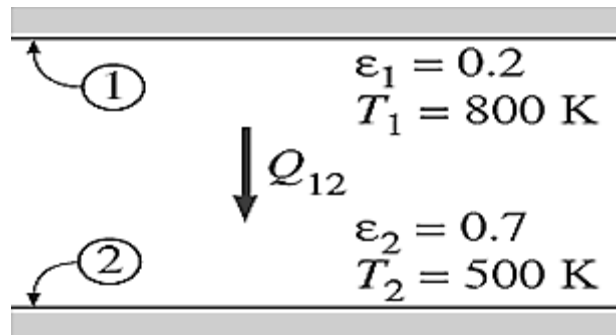
Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

être obtenu en laissant $S_1 = S_2$ et $F_{1 \rightarrow 2} = 1$. Comme suit :

$$\frac{Q}{S} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (\text{IV.29})$$

❖ Exercice d'application 6 :

Deux très grandes plaques parallèles sont maintenues à des températures uniformes $T_1 = 800 \text{ K}$ et $T_2 = 500 \text{ K}$ et ont des émissivités respectives de $\varepsilon_1 = 0,2$ et $\varepsilon_2 = 0,7$, comme le montre la figure. Déterminez le flux de transfert de chaleur par rayonnement entre les deux surfaces par unité de surface des plaques.



Solution :

Le flux de transfert de chaleur par rayonnement entre les deux surfaces par unité de surface est :

$$\frac{Q}{S} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$\frac{Q}{S} = \frac{\sigma[(800)^4 - (500)^4]}{\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,7} - 1}$$

$$\frac{Q}{S} = 3625 \text{ w/m}^2$$

6.3 Échange de rayonnement entre deux surfaces cylindriques concentriques

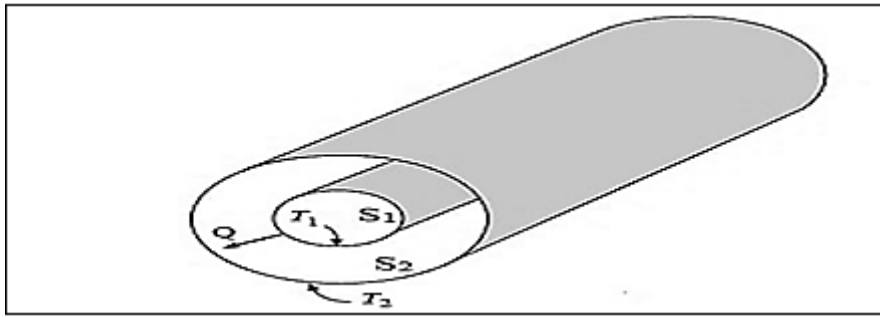


Figure IV.8 : Échange de rayonnement entre deux surfaces cylindriques

Lorsque deux longs cylindres concentriques, comme le montre la figure (IV.8), échangent de la chaleur, et noter que $F_{12} = 1$, nous pouvons écrire l'équation de transfert de chaleur par rayonnement comme suit :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{S_1}{S_2}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \quad (\text{IV. 30})$$

Le rapport de surface $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ peut être remplacé par le rapport de diamètre $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ lorsqu'il s'agit de corps cylindriques.

6.4 Échange de rayonnement entre deux surfaces sphériques concentriques

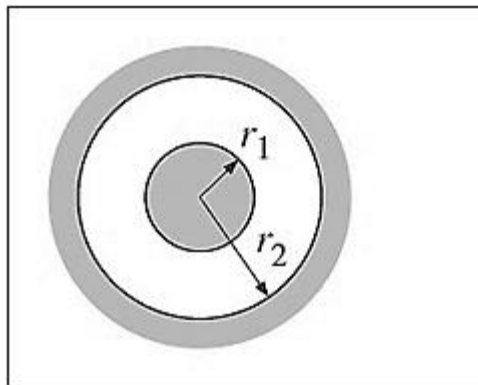


Figure IV.9 : Échange de rayonnement entre deux surfaces sphériques

Lorsque deux sphériques concentriques, comme indiqué dans la figure (IV.9), échangent de la chaleur, et noter que $F_{12} = 1$, nous pouvons écrire l'équation de transfert de chaleur par rayonnement comme suit :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \quad (\text{IV. 31})$$

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

Le rapport de surface $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ peut être remplacé par le rapport de diamètre $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ lorsqu'il s'agit de corps sphériques.

6.5 Les écrans de protection contre les rayonnements et ses effets

Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces peut être considérablement réduit en insérant une fine feuille de matériau à haute réflectivité (faible émissivité) entre les deux surfaces. Le rôle des écrans antiradiation est de réduire le flux de transfert de chaleur par rayonnement, en plaçant des résistances supplémentaires sur le trajet du flux de rayonnement. Plus l'émissivité des écrans est faible, plus la résistance est élevée.

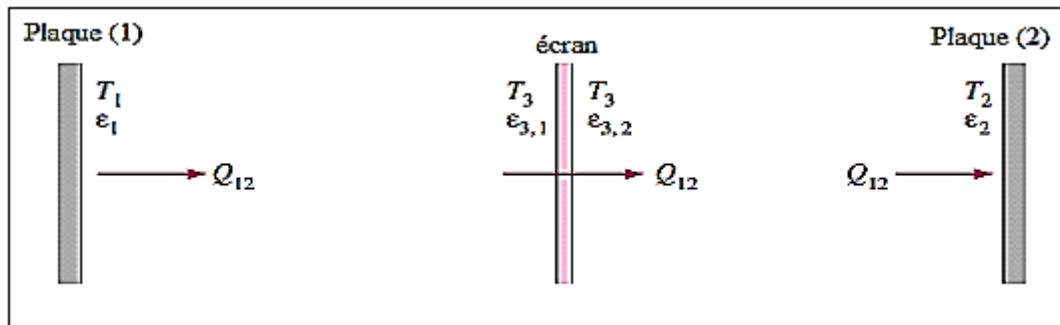


Figure IV.10 : L'écran antiradiation placé entre deux plaques parallèles

La quantité de chaleur transmise par rayonnement entre deux grandes plaques parallèles d'émissivité S_1 et S_2 maintenues à des températures uniformes T_1 et T_2 est donné par la relation :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{3,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{3,2}} - 1\right)} \quad (\text{IV. 32})$$

Notant que $S = S_1 = S_2$ pour les plaques parallèles infinies.

La quantité de chaleur transmise par rayonnement à travers les grandes plaques parallèles séparées par N écrans de protection contre les rayonnements devient alors :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{3,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{3,2}} - 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{\varepsilon_{N,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{N,2}} - 1\right)} \quad (\text{IV. 33})$$

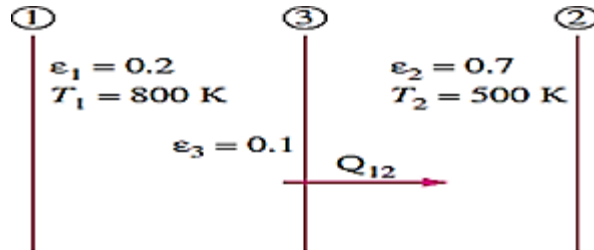
Si les émissivités de toutes les surfaces sont égales l'équation (IV.33) devient :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{(N + 1) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1\right)} \quad (\text{IV. 34})$$

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

❖ Exercice d'application 7 :

Une fine feuille d'aluminium d'une émissivité de 0,1 sur les deux faces est placée entre deux grandes plaques parallèles qui sont maintenues à des températures uniformes $T_1 = 800 \text{ K}$ et $T_2 = 500 \text{ K}$ et qui ont des émissivités de $s_1 = 0,2$ et $s_2 = 0,7$, respectivement, comme le montre la figure.



Déterminez :

1. la quantité de chaleur transmis par rayonnement entre les deux plaques par unité de surface.
2. la quantité de chaleur transmis par rayonnement entre les deux surfaces par unité de surfacesans écran.
3. comparez les résultats des deux premières questions.

Solution :

1. la quantité de chaleur transmis par rayonnement entre les deux plaques par unité de surface :

$$\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{S} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_{3,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{3,2}} - 1\right)}$$

$$\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{S} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} [(800)^4 - (500)^4]}{\left(\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,7} - 1\right) + \left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,1} - 1\right)}$$

$$\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{S} = 806 \text{ w/m}^2$$

2. la quantité de chaleur transmis par rayonnement entre les deux surfaces par unité de surfacesans écran est :

$$\frac{Q}{S} = \frac{\sigma [T_1^4 - T_2^4]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Chapitre IV : Transfert de chaleur par rayonnement

$$\frac{Q}{S} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} [(800)^4 - (500)^4]}{\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,7} - 1}$$

$$\frac{Q}{S} = 3625 \text{ w/m}^2$$

3. comparaison des résultats des deux premières questions :

$$\frac{3625}{4} = 906 \text{ w/m}^2$$

✚ Il faut noter que la quantité de chaleur transmis par rayonnement se réduit à environ un quart dans le cas où on place d'un écran anti-rayonnement entre les deux plaques parallèles.

Références

- [1] Kreith, F., Manglik, R. M., & Bohn, M. S. (2012). Principles of heat transfer. NelsonEducation.
- [2] Bergman, T. L., Incropera, F. P., DeWitt, D. P., & Lavine, A. S. (2011). Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons.
- [3] Rohsenow, W. M., Hartnett, J. P., & Cho, Y. I. (1998). Handbook of heat transfer (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.
- [4] John, H. L. I. V., Lienhard, I. V., & Lienhard, V. (2008). A heat transfer textbook. Phlogiston Press, Cambridge.
- [5] Holman, J. P. (2010). Heat transfer tenth edition.
- [6] Jannot, Y., & Moyne, C. (2012). Transferts thermiques. Ecole des mines Nancy, 161.
- [7] Ozisik, M. N. (1985). Heat transfer: a basic approach (Vol. 1). New York: McGraw-Hill.
- [8] Haddad, A. (2001). Transferts thermiques. Dar-El-Djazairia, Alger.