

Chapitre 4 : STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES

4- 1 - Notion de stabilité d'un système

4- 1.1 - Définition de la stabilité

On dira qu'un système linéaire est stable si, après avoir soumis son entrée à une brusque variation (échelon unité, par exemple) :

- le mouvement amorcé par sa sortie reste borné en amplitude (c'est à dire que la sortie garde une valeur finie)*
- ce mouvement s'amortit plus ou moins vite et la sortie tend vers un état d'équilibre.*

Les réponses indicielles des figures 4–1 et 4–2 correspondent à celles de systèmes stables. Nous retrouvons les critères cités ci-dessus.

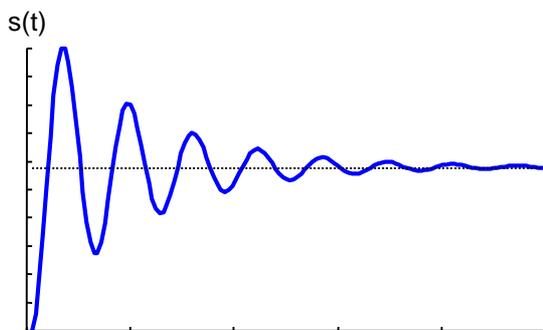


Fig 4–1: Système oscillatoire amorti (stable)

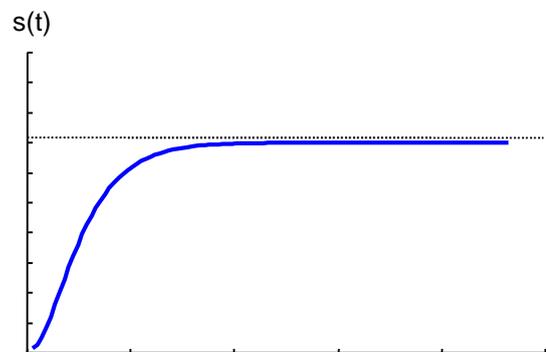


Fig 4–2 : Système non oscillatoire amorti (stable)

La figure 4–3 est un cas de système instable. Les oscillations sont de plus en plus importantes et le système ne retrouve pas son état d'équilibre.

Physiquement, un système instable dont la réponse croît sans limite peut se causer des dommages ou en causer à autrui (danger pour l'être humain). En pratique, la majorité des systèmes sont conçus avec des dispositifs de limitation.

Si on considère le cas où des oscillations persistent indéfiniment (cas du pompage de la figure 4–4), on peut considérer le système comme stable (système marginalement stable) puisque sa sortie garde une valeur finie, à condition que l'amplitude ne soit pas trop grande.

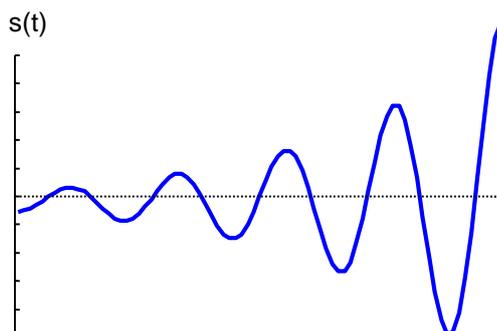


Fig 4–3: Système oscillatoire divergent (instable)

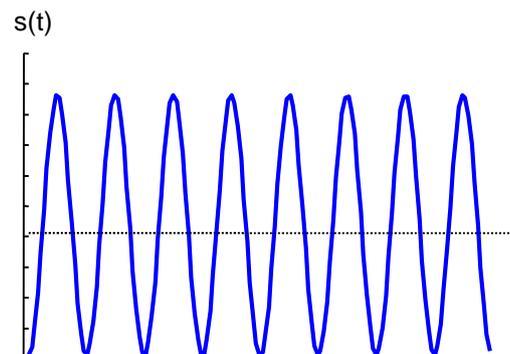


Fig 4–4: Système oscillatoire (marginalement stable)

La stabilité est une condition impérative. Pour que les systèmes soient utilisables en asservissement, il est absolument nécessaire que les fonctions de transfert en boucle fermée FTBF soient stables. Ceci n'implique toutefois pas que les FTBO soient stables.

4- 1.2 - Aspect mathématique de la stabilité

Considérons un système asservi quelconque dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Si on envoie sur l'entrée un échelon unité $E(p)=1/p$, alors :

$$S(p) = \frac{1}{p} \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Nous avons vu au chapitre 3, que $S(p)$ pouvait se mettre sous la forme d'un quotient de polynômes du type $\frac{N(p)}{D(p)}$ et que celui-ci pouvait se décomposer en une somme de fractions rationnelles :

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{C_1}{p - p_1} + \dots + \frac{C_n}{p - p_n}$$

où les p_i sont les racines réelles ou complexes de $D(p)$.

Prenons, par exemple, le cas où le dénominateur contient des racines nulles (pôles multiples), des racines réelles (pôles réels) et des racines complexes. C'est-à-dire qu'il est de la forme :

$$D(p) = p^{n_0} (p - p_1) \dots (p - p_{n_1}) [(p - \alpha_1)^2 + \omega_1^2] \dots [(p - \alpha_{n_2})^2 + \omega_{n_2}^2]$$

La décomposition de $S(p)$ en fractions rationnelles sera :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{i=n_0} \frac{A_i}{p^i} + \sum_{k=1}^{k=n_1} \frac{B_k}{p - p_k} + \sum_{j=1}^{j=n_2} \frac{C_j p + D_j}{(p - \alpha_j)^2 + \omega_j}$$

Les racines complexes étant $\alpha_j \pm j \omega_j$ (α_j partie réelle, ω_j partie imaginaire), cherchons l'original $s(t)$ de $S(p)$ qui est la réponse du système à un échelon unité. On trouve :

$$s(t) = A_1 + \sum_{i=2}^{i=n_0} \frac{A_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=1}^{k=n_1} B_k \cdot e^{p_k t} + \sum_{j=1}^{j=n_2} F_j \cdot e^{\alpha_j t} \cdot \sin(\omega_j t + \phi_j)$$

On constate donc que la sortie garde une valeur finie quand $t \rightarrow \infty$, si les conditions suivantes sont remplies :

- Les p_k et les α_j doivent être négatifs pour que les exponentielles correspondantes soient décroissantes.
- Les A_i doivent être nuls sauf A_1 .

Nous verrons dans la suite que pour certaines fonctions de transfert, la présence de pôles multiples nuls n'entraîne pas forcément une augmentation infinie de la sortie.

En effet, les termes en $1/p$ ont une action d'intégration, leur influence peut être combattue par des actions de dérivation provenant de terme en p au numérateur. S'il n'en est pas ainsi, le système possédant des

pôles multiples à l'origine au dénominateur de sa fonction de transfert est dit " intrinsèquement instable ", c'est-à-dire qu'aucune modification des coefficients ne peut le rendre stable.

4- 1.3 - Conditions de stabilité

Un système linéaire est stable si aucune des racines du dénominateur de sa fonction de transfert n'a de partie réelle positive.

Cela exclut :

- Les racines réelles positives.
- Les racines complexes à parties réelles positives.

On peut formuler ceci autrement :

- Un système asservi bouclé est stable si tous les pôles de la FTBF sont localisés dans le demi-plan gauche du plan complexe.
- Un système asservi bouclé est instable si sa FTBF comprend, au moins, un pôle localisés dans le demi-plan droit du plan complexe et/ou des pôles de multiplicité > 1 sur l'axe imaginaire.
- Si le système comprend une seule paire de pôle sur l'axe imaginaire ou un pôle unique à l'origine, le système est dit marginalement stable. Sa réponse sera oscillatoire non amortie ou non oscillatoire à variation constante lorsque $t \rightarrow \infty$.

La figure 4–5 récapitule les cas possibles suivant le signe et la nature des racines.

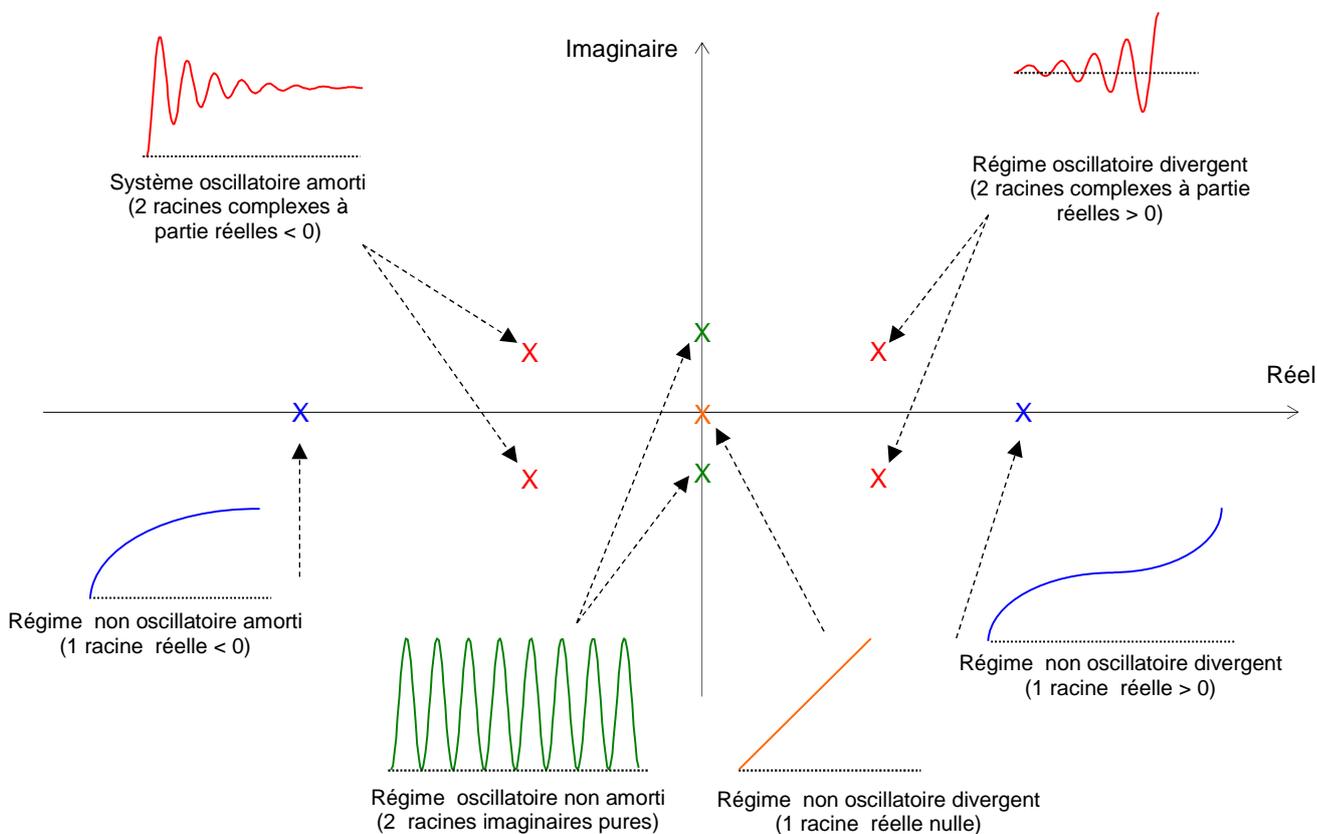


Fig. 4–5 : Récapitulatif des comportements des systèmes selon la position et le signe des pôles (selon les réponses indicielles).

Mais les conditions de stabilité ainsi définies ne sont pas suffisantes pour caractériser un système asservi : **un système très mal amorti sera inutilisable**, il faudra donc **toujours définir des marges dites de sécurité sur les coefficients d'amortissement**.

Remarque à propos des systèmes instables :

Quand on a affaire à un système instable, sa sortie tend théoriquement vers l'infini si on soumet son entrée à une brusque variation. En réalité, sa sortie ne tend pas vers l'infini, mais vers une valeur qui correspond à la saturation. Cette valeur peut être très grande et conduire à la destruction du système. En tout état de cause, dans le cas où la fonction de transfert a des pôles à parties réelles positives, le système sort rapidement de son domaine de linéarité et ses équations ne sont plus valables.

4- 1.4 - Etude de la stabilité d'un système bouclé

Le système asservi bouclé de la figure 4-6 a pour fonction de Transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

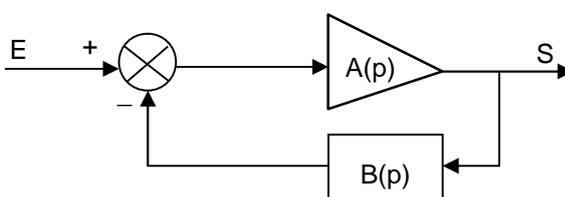


Fig. 4-6 : Schéma fonctionnel d'un système asservi bouclé

Sa stabilité est conditionnée par le signe des parties réelles des racines du dénominateur.

Il suffira, donc, d'étudier l'équation : $1 + A(p).B(p) = 0$, et de chercher le signe de ses racines.

Plusieurs moyens sont possibles pour y arriver :

a) 1^{er} moyen : Calculer les racines de $1 + A(p).B(p) = 0$

Cette méthode est bonne puisqu'elle nous donne également les valeurs des racines en plus de leurs signes. Mais elle est pratiquement inapplicable à cause de la grande difficulté qu'elle présente si le degré du polynôme est important. L'usage d'un ordinateur peut simplifier le travail, car il peut aussi tracer le lieu des racines quand on fait varier les paramètres. C'est une méthode très puissante.

b) 2^{ème} moyen : Discuter le signe des racines sans les calculer, à partir des coefficients du dénominateur (critère de Routh-Hurwitz)

Malheureusement, si le système trouvé est instable, on ne sait pas sur quel paramètre il faut agir pour le rendre stable. Il faut en plus connaître la fonction sous sa forme mathématique.

c) 3^{ème} moyen : Utiliser le critère de Nyquist (méthode graphique).

Cette méthode est intéressante car elle n'a pas les inconvénients du critère de Routh. A savoir, on peut utiliser directement les résultats expérimentaux sans connaître les équations du système et elle montre graphiquement sur quels paramètres on peut agir pour rendre le système stable.

4- 2 - Critère de Routh - Hurwitz

4- 2.1 - Enoncé du critère

Soit $P(p)$ le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée. $P(p)$ peut être écrit sous la forme :

$$P(p) = 1 + A(p). B(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

(Équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée)

Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les racines de $P(p)$ n'aient pas de parties réelles positives.

4- 2.1.a - Critère d'Hurwitz

Ce critère (nécessaire mais pas suffisant) indique que le système est instable si les a_i sont de signes différents ou certains sont nuls.

4- 2.1.b - Critère de Routh-Hurwitz

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors que tous les termes de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh soient de même signe.

On construit le tableau de Routh de la manière suivante :

Pour $P(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$, le tableau de Routh est simplement une matrice carrée avec une ligne pour chaque puissance de p dans le polynôme de l'équation caractéristique.

p^n	:	•	1 ^{ère} ligne :	coefficients des termes en p^{n-2k}	(avec $k = 0, 1, 2, \dots$)
p^{n-1}	:	•	2 ^{ème} ligne :	coefficients des termes en $p^{n-(2k+1)}$	(avec $k = 0, 1, 2, \dots$)
p^{n-2}	:	•	3 ^{ème} ligne :	combinaison des 2 lignes précédentes	
p^{n-3}	:	•	4 ^{ème} ligne :	combinaison des 2 lignes précédentes	
\vdots					
\vdots					
p^0	:	•	dernière ligne :	combinaison des 2 lignes précédentes	

Si, par exemple, $P(p) = a_0 p^7 + a_1 p^6 + a_2 p^5 + a_3 p^4 + a_4 p^3 + a_5 p^2 + a_6 p + a_7$, alors le tableau de Routh se construit comme suite :

$p^7 :$	a_0	a_2	a_4	a_6
$p^6 :$	a_1	a_3	a_5	a_7
$p^5 :$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	
$p^4 :$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1}$	$c_5 = \frac{b_1 a_7 - a_1 \cdot 0}{b_1} = a_7$	
$p^3 :$	$d_1 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 b_5 - b_1 c_5}{c_1}$		
$p^2 :$	$e_1 = \frac{d_1 c_3 - c_1 d_3}{d_1}$	$e_3 = \frac{d_1 c_5 - c_1 \cdot 0}{d_1} = c_5$		
$p^1 :$	$f_1 = \frac{e_1 d_3 - d_1 e_3}{e_1}$			
$p^0 :$	$g_1 = \frac{f_1 e_3 - e_1 \cdot 0}{f_1} = e_3$			

Routh a démontré que le nombre de " pôles instables " (c'est-à-dire le nombre de pôles à partie réelle positive) de la fonction de transfert en boucle fermée est égal au nombre de changement de signe que comporte la 1^{ère} colonne, lue de haut en bas.

Si ce nombre est différent de zéro, alors le système est instable.

Remarques :

Cette méthode a l'avantage d'être rapide et exacte, mais elle ne donne pas une mesure de la stabilité comme les autres critères ; car elle se borne à dire si le système est stable ou non. De plus, elle est inapplicable si on ne connaît pas l'expression mathématique de la fonction de transfert.

Le critère de Routh est intéressant pour connaître le nombre de racines réelles positives, mais il est incapable de donner des renseignements sur l'amortissement du système quand celui-ci est stable.

La méthode est cependant en défaut dans les 2 cas suivants :

- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls.
- Si un terme de la 1^{ère} colonne de gauche est nul à l'exclusion des autres termes de la même ligne.

4- 2.2 - Exemple 1

$$P(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K \quad (K \text{ gain variable})$$

$$1^{\text{ère}} \text{ condition (critère d'Hurwitz)} : \quad 1 + K > 0 \quad \rightarrow \quad K > -1$$

$$2^{\text{ème}} \text{ condition (critère de Routh-Hurwitz)} : \quad \text{tableau de Routh}$$

$p^3 :$	1	3
$p^2 :$	3	1+K
$p^1 :$	$\frac{9 - (1 + K)}{3}$	
$p^0 :$	1+K	

$$\text{Pour que le système soit stable, il faudrait que : } \begin{cases} \frac{9 - (1 + K)}{3} > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire : $-1 < K < 8$ (condition nécessaire et suffisante de stabilité)

Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, si :

- $K < -1$, il y a 1 seul changement de signe dans la 1ère colonne; donc un seul pôle instable.
- $K > 8$, il y a 2 changement de signe dans la 1ère colonne; donc 2 pôles instables.
- Si ($K = -1$ ou $K = 8$), (frontière entre la stabilité et l'instabilité) on dit que le système est oscillant (marginale stable).

4- 2.3 - Exemple 2 (ligne complète de zéros)

Nous avons dit que si une ligne complète était composée de zéro, la méthode était en défaut. En fait, il est quand même possible d'en tirer des conclusions moyennant certains aménagements.

$$\text{Si } P(p) = p^5 + 7p^4 + 6p^3 + 42p^2 + 8p + 56$$

Alors, le tableau de Routh est :

$p^5 :$	1	6	8	
$p^4 :$	7→1	42→6	56→8	Division de la ligne par 7
$p^3 :$	0	0		
$p^2 :$	-	-		
$p^1 :$	-			
$p^0 :$	-			

La 3^{ème} ligne est nulle. On substitue alors à cette ligne les coefficients obtenus en différenciant une fonction fictive, appelée polynôme auxiliaire, construite sur la ligne précédant la ligne nulle. Le polynôme auxiliaire pour l'exemple en cours s'écrit :

$$Q(p) = p^4 + 6p^2 + 8$$

Si nous le dérivons, par rapport à p, nous obtenons alors :

$$\frac{dQ(p)}{dp} = 4p^3 + 12p + 0$$

Les coefficients de ce polynôme remplacent ceux de la ligne nulle dans le tableau initial. Le tableau devient alors :

p ⁵ :	1	6	8
p ⁴ :	1	6	8
p ³ :	4→1	12→3	
p ² :	3	8	
p ¹ :	1/3		
p ⁰ :	8		

Il n'y a aucun changement de signe sur la 1^{ère} colonne du tableau, donc aucune racine à partie réelle positive. Le système est donc stable.

4- 2.4 - Exemple 3 (un zéro sur la première colonne)

Si le premier élément de la ligne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro. Pour éviter cela, on utilise un nombre de valeur très faible ε (epsilon) pour remplacer le zéro de la première colonne. ε peut tendre vers zéro par valeur positive ou négative, pour permettre par la suite le calcul du nombre de changement de signe de la première colonne.

Considérons le système dont la FTBF $G(p) = \frac{10}{p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3}$

$$P(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$$

Alors, le tableau de Routh est :

p ⁵ :	1	3	5
p ⁴ :	2	6	3
p ³ :	0→ε	7/2	
p ² :	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	
p ¹ :	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$		
p ⁰ :	3		

Considérons uniquement le changement de signe dans la première colonne et calculons le signe de chaque ligne dans les 2 cas ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $\varepsilon \rightarrow 0^-$) :

	1ère colonne	$v \rightarrow 0^+$	$v \rightarrow 0^-$
p^5 :	1	+	+
p^4 :	2	+	+
p^3 :	$0 \rightarrow \varepsilon$	+	-
p^2 :	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	-	+
p^1 :	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	+	+
p^0 :	3	+	+

Si ε est choisi positif, il y a 2 changements de signe. S'il est choisi négatif, il y a également 2 changements de signe. Le système a donc 2 pôles dans le demi-plan droit du plan complexe (2 pôles instables) et ce n'est pas important si nous choisissons d'approcher le zéro par valeur positive ou négative. Ceci est toujours le cas.

4- 3 - Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de déterminer la *stabilité d'un système bouclé* sur la base de sa réponse harmonique en *boucle ouverte*.

4- 3.1 - Énoncé du critère de Nyquist

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système asservi linéaire est que son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de $\tilde{S} = -\varrho$ à $\tilde{S} = +\varrho$, entoure le point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Étant donné un système asservi, défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p) = A(p).B(p)$.

La relation : $Z = P - N$ donne le nombre Z de zéros instables de l'équation caractéristique $1 + FTBO(p) = 0$ et donc de pôles instables de la $FTBF(p)$, avec :

- P : Nombre de pôles instables de la $FTBO(p)$,
- N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (\tilde{S} variant de $-\varrho$ à $+\varrho$) autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique (sens anti-horaire).

En particulier, le système asservi est stable, à condition que : $Z = 0 \rightarrow P = N$

En pratique, on retiendra les étapes suivantes pour appliquer le critère de Nyquist :

- Étudier la stabilité de la FTBO → P: nombre de pôles instables de la FTBO.
- Tracer le lieu de Nyquist complet de la FTBO (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$).
- Calculer le nombre de tours (comptés algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N, que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$), autour du point critique $(-1,0)$.
- En déduire $Z = P - N =$ nombre de pôles instables de la FTBF.

4- 3.2 - Exemple

Soit un système asservi à retour unitaire dont la FTBO est :

$$G(p) = \frac{K}{1 - Tp} \quad (T > 0)$$

Discutons sa stabilité suivant les valeurs de K.

- **$K > 0$** (fig. 4-7)

- ✓ La FTBO(p) a un pôle instable $p = +1/T$.
→ $P = 1$
- ✓ Le nombre de tours autour du point $(-1,0)$ est :
→ $N = 0$
 $Z = P - N = 1 \neq 0$
1 pôle instable de la FTBF
→ Système instable en boucle fermée.
- ✓ Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

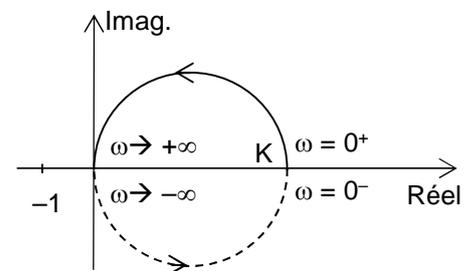


Fig. 4-7

- **$K < -1$** (fig. 4-8)

- ✓ $P = 1$
- ✓ $N = +1$
- ✓ $Z = P - N = 0$
- ✓ Pas de pôle instable de la FTBF
→ Système stable en boucle fermée.
- ✓ Ce système est instable en boucle ouverte et stable en boucle fermée.

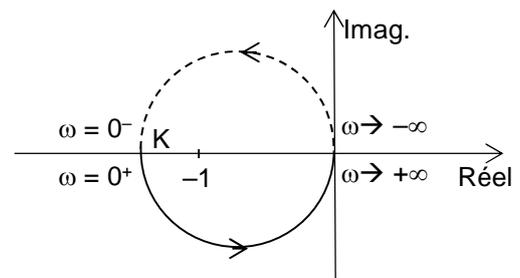


Fig. 4-8

- **$-1 < K < 0$** (fig. 4-9)

- ✓ $P = 1$
- ✓ $N = 0$
- ✓ $Z = P - N = 1$
- ✓ 1 pôle instable de la FTBF
→ Système instable en boucle fermée.
- ✓ Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

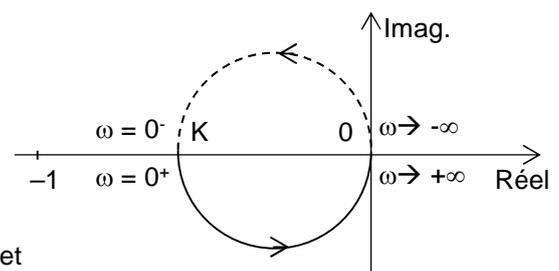


Fig. 4-9

Vérification la stabilité par le critère de Routh :

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 - Tp} \quad \rightarrow \quad FTBF(p) = \frac{K}{1 + K - Tp} \quad (\text{retour unitaire})$$

Équation caractéristique : $-Tp + 1 + K = 0$

$$\begin{array}{l} p^1 : \quad -T \\ p^0 : \quad 1+K \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faudrait que : $1 + K < 0 \quad \rightarrow \quad K < -1$

4- 3.3 - Critère de Nyquist simplifié (critère du Revers)

Il est déduit du critère de Nyquist :

Un système stable en Boucle Ouverte, est stable en Boucle Fermée, si le tracé du lieu de Nyquist de la FTBO, décrit dans le sens des pulsations croissantes (ω variant de 0 à $+\infty$), laisse le point critique $(-1,0)$ à sa gauche. Il est instable dans le cas contraire.

Le critère du Revers est d'un emploi plus commode que le critère de Nyquist, car il ne met en œuvre que le lieu physique de la FTBO (correspondant aux pulsations positives)

Par contre, le critère du Revers est moins général, et il ne peut s'appliquer sans danger que lorsque la notion de "gauche" n'est pas ambiguë (Fig. 4-10).

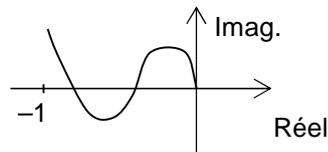


Fig. 4-10 : Cas d'ambiguïté dans l'application du critère du revers

4- 4 - Marges de stabilité

Pour un système stable en *Boucle Ouverte*, nous venons de voir que la stabilité en *Boucle Fermée* dépend de la position du lieu de Nyquist de la FTBO par rapport au point critique $(-1,0)$.

Le critère de Nyquist spécifie que le lieu de Nyquist doit laisser le point -1 à gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens croissant des ω . Le cas où il existerait une pulsation à laquelle le lieu traverserait exactement ce point est un cas limite correspondant à un système en boucle fermée dont la stabilité serait marginale.

Mais la tendance vers l'instabilité est graduelle : plus le lieu de Nyquist est proche du point critique, moins le degré de stabilité est bon, et plus on aura par exemple d'oscillations avant stabilisation en boucle fermée.

De façon à quantifier le degré de stabilité d'un système asservi, il est donc utile de chiffrer la distance entre le lieu de Nyquist et le point critique $(-1, 0)$. La mesure effective de la distance minimum n'étant pas chose aisée d'un point de vue mathématique, on préfère, de manière traditionnelle, évaluer indirectement cette distance par les mesures des *marges de phases* $U\phi$ et de *gain* UG . Ces marges représentent des marges de sécurité par rapport à l'état instable.

Ces grandeurs sont définies de la manière suivante :

- La marge de phase $U\{\}$ d'un système est mathématiquement la différence entre la phase de $FTBO(\check{S}c0)$ c'est-à-dire $\{\check{S}c0\}$, et -180° : $U\{\} = \{\check{S}c0\} + 180^\circ$

La marge de phase permet de préserver la stabilité en dépit de la présence de retards parasites – par exemple dus à la transmission des signaux – dont on n'a pas tenu compte au moment de l'étude de la stabilité.

- La marge de gain UG a pour expression :

$$UG = \frac{1}{|FTBO(\omega_\pi)|}$$

Elle permet de préserver la stabilité en dépit des fluctuations de gain, qui affectent, en particulier, les amplificateurs de la chaîne de puissance.

Pour qu'un système soit stable, il faudrait que : $U\{\} > 0$ et $UG > 0$

Ces marges sont illustrées sur le lieu de Nyquist des figures 4-11 et 4-12.

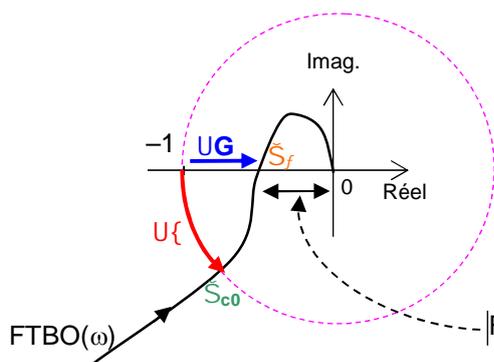


Fig. 4-11 : Illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système stable)

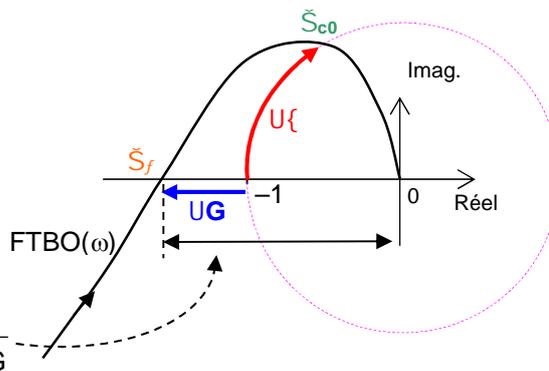


Fig. 4-12 : Illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist (cas d'un système instable)

4- 4.1 - Valeurs usuelles de $U\{\}$ et UG

Les marges définies ci-dessus permettent d'évaluer la distance entre le point critique et le lieu de Nyquist en boucle ouverte. Imposer leurs valeurs revient à s'assurer que l'on ait jamais $FTBO(\omega) = -1$, c'est-à-dire jamais simultanément (pour la même pulsation) :

$$\begin{cases} |FTBO(\omega)| = 1 \\ \angle FTBO(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

L'expérience montre que pour des systèmes classiques (notamment à phase minimale), un bon degré de stabilité en boucle fermée est obtenu si l'on est capable d'imposer :

$$\begin{cases} \Delta\varphi \approx 45 \wedge 60^\circ \\ \Delta G > 8 \wedge 15 \text{ dB} \end{cases}$$

Avec ces valeurs, on obtient dans la plupart des cas une paire de pôles dominants en boucle fermée caractérisés par un coefficient d'amortissement ξ **0,5 ... 0,707**.

Pour régler la stabilité d'un système, il est souvent délicat de raisonner en tenant compte des deux marges à la fois. Dans ce cas, on privilégie, en général, la marge de phase $\Delta\varphi$.

4- 4.2 - Critère de Stabilité utilisant les courbes de Bode et de Black

Les marges de gain et de phase définies précédemment peuvent également être représentées sur le diagramme de Bode (figures 4–13 et 4–14) et sur le lieu de Black-Nichols (fig. 4–15 et 4–16).

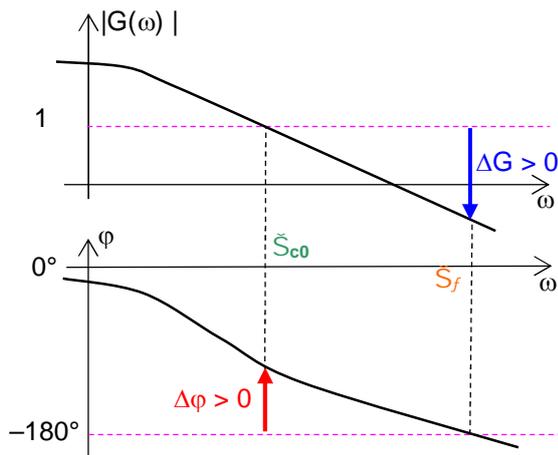


Fig. 4–13 : illustration des marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode (cas d'un système stable : $\Delta G > 0$ et $\Delta\varphi > 0$)

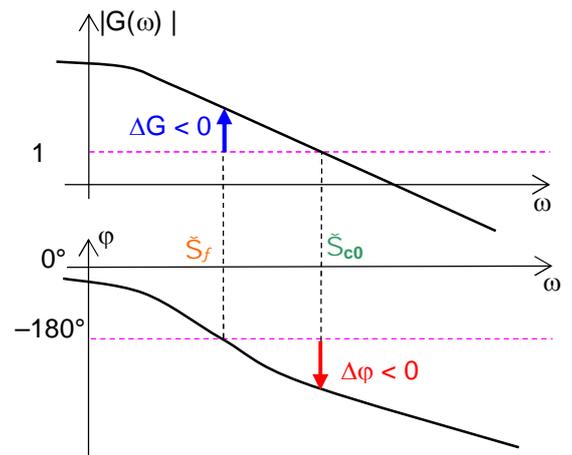


Fig. 4–14 : illustration des marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode (cas d'un système instable : $\Delta G < 0$ et $\Delta\varphi < 0$)

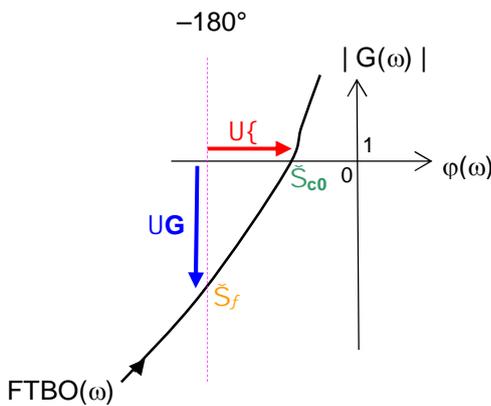


Fig. 4–15 : illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Black-Nichols (cas d'un système stable : $\Delta G > 0$ et $\Delta\varphi > 0$)

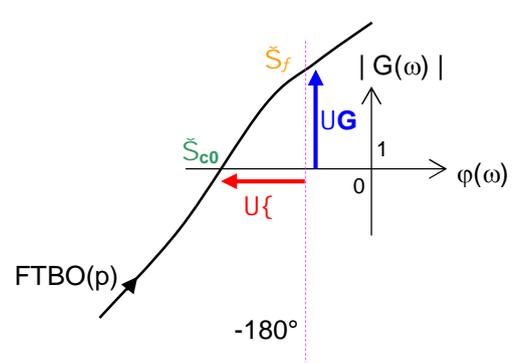


Fig. 4–16 : illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Black-Nichols (cas d'un système instable : $\Delta G < 0$ et $\Delta\varphi < 0$)

4- 4.3 - Marge de stabilité appliquée à la position des pôles de la FTBF

La notion de marge de stabilité appliquée à la FTBF conduit à s'interdire un domaine pour la position des pôles dans le plan complexe.

On s'impose, en général, $\beta \approx 60^\circ$ (ce qui correspond à un système du deuxième ordre avec $\xi = \cos \beta = 0.5$) (fig. 4–17).

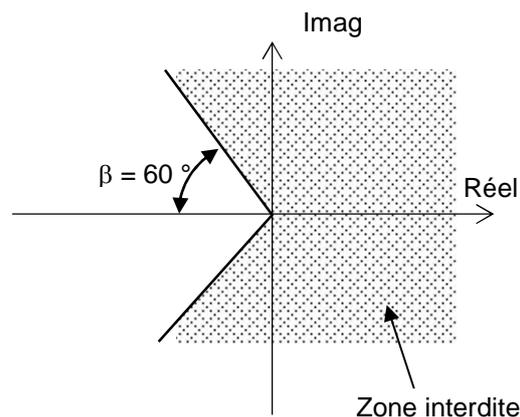


Fig. 4–17 : illustration de la marge de stabilité imposée sur la position des pôles dans le plan complexe.

Chapitre 5 : PERFORMANCES DES ASSERVISSEMENTS

5- 1 - Introduction

Nous supposons dans l'étude qui suit que les **systèmes asservis étudiés sont stables**.

La précision d'un système est définie à partir de l'erreur ε entre la grandeur de consigne E et la grandeur de sortie S (fig. 5–1). Nous distinguerons la précision statique qui caractérise la limite de l'erreur au bout d'un temps infini pour une entrée donnée, c'est-à-dire le régime permanent, et la précision dynamique qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus en régime transitoire.

5- 2 - Performances Statiques des Systèmes bouclés

5- 2.1 - Erreur statique

La précision d'un asservissement, en régime permanent, est définie par l'écart permanent $V(t)$ qui existe entre la sortie réelle et celle que l'on désire obtenir.

Par définition, on dira qu'un système est d'autant plus précis que le signal d'erreur $V(t)$ est plus faible.

L'idéal serait que l'on ait : $V(t) = 0, \forall t$

En pratique, il en est autrement, car :

- La consigne peut varier : la recherche de la minimisation de $\varepsilon(t)$, en dépit de ces variations, constitue un problème de **suivi** (ou de **poursuite**).
- Un signal de perturbation aléatoire (exemple : un bruit) peut venir se superposer au signal utile en un point de la chaîne : le maintien de $\varepsilon(t)$, en dépit de la perturbation, constitue un problème de **régulation**.

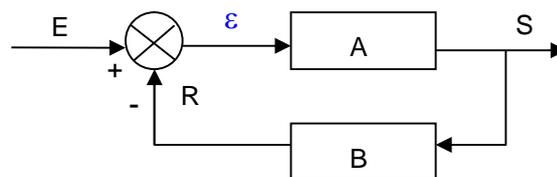


Fig. 5–1 : Schéma général d'un asservissement

Calculons l'erreur statique :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)$$

$$\text{Or } R(p) = S(p) \cdot B(p) \text{ et } S(p) = \varepsilon(p) \cdot A(p)$$

$$\rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p) \cdot A(p) \cdot B(p)$$

$$\rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} \quad (5-1)$$

D'après le théorème de la valeur finale $\{ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p) \}$, l'erreur statique ε_s (ou encore ε_∞) est

donnée par la relation :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

$$V_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) \quad \text{Erreur statique} \quad (5-2)$$

ε_s dépend donc à la fois :

- ❖ du système considéré {présence de $A(p) \cdot B(p)$ },
- ❖ du signal d'entrée appliqué {présence de $E(p)$ }.

Adoptons la notation suivante :

- **n : le nombre d'intégrateurs que comporte la FTBO(p)**

$$FTBO(p) = A(p) \cdot B(p) = \frac{K}{p^n} \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} \quad n = \text{entier} \geq 0$$

n est appelé classe du système

- **m : l'ordre du signal d'entrée canonique**

$$E(p) = \frac{E_0}{p^m} \quad m = \text{entier} \geq 1$$

Si $m = 1$ → échelon

Si $m = 2$ → rampe

Si $m = 3$ → Accélération

5- 2.1.a - Erreur statique pour une entrée échelon

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse indicielle (fig. 5-2).

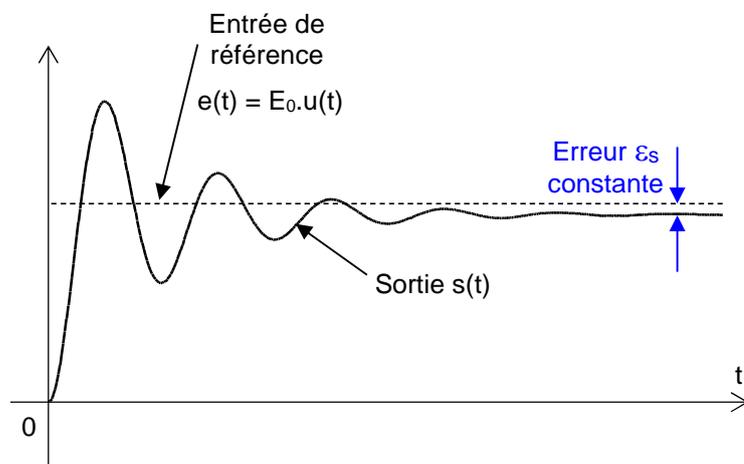


Fig. 5-2 : Erreur statique pour une entrée échelon

Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = \frac{E_0}{1 + \lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_e}$$

Avec $K_e = \lim_{p \rightarrow 0} FTBO(p) = \text{Constante d'erreur statique d'échelon}$

ou gain statique en Boucle ouverte

- Pour les systèmes de classe 0 : $K_e = \lim_{p \rightarrow 0} K \cdot \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots} = K \rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K} = \text{cte}$
- Pour les systèmes de classe $n > 0$: $K_e = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^n} \cdot \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots} = \infty \rightarrow \varepsilon_s = 0$

5- 2.1.b - Erreur statique (ou erreur de traînage) pour une entrée rampe (ou vitesse)

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse à une rampe (fig. 5–3).

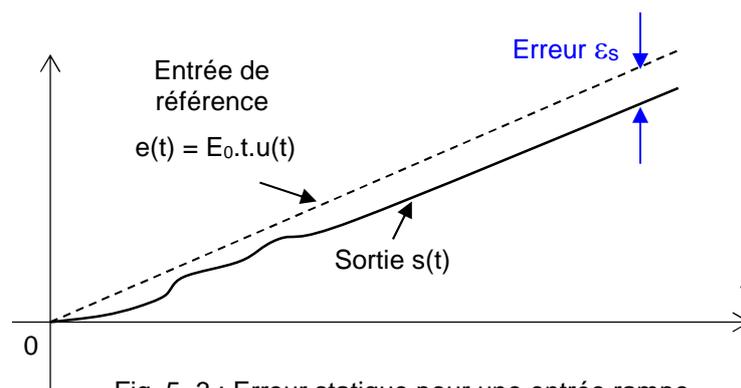


Fig. 5–3 : Erreur statique pour une entrée rampe

Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{p + p \cdot FTBO(p)} \right) = \frac{E_0}{\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot FTBO(p)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v}$$

Avec $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot FTBO(p) = \text{Constante d'erreur statique de vitesse}$

- Pour les systèmes de classe 0 : $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot K \cdot \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots} = 0 \rightarrow \varepsilon_s = \infty$
- Pour les systèmes de classe 1 : $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K}{p^1} \cdot \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots} = K \rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{K} = \text{cte}$
- Pour les systèmes de classe $n > 1$: $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K}{p^n} \cdot \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots}{1 + b_1p + b_2p^2 + \dots} = \infty \rightarrow \varepsilon_s = 0$

5- 2.1.c - Erreur statique pour une entrée parabolique (ou accélération)

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse à une entrée accélération (fig. 5-4).

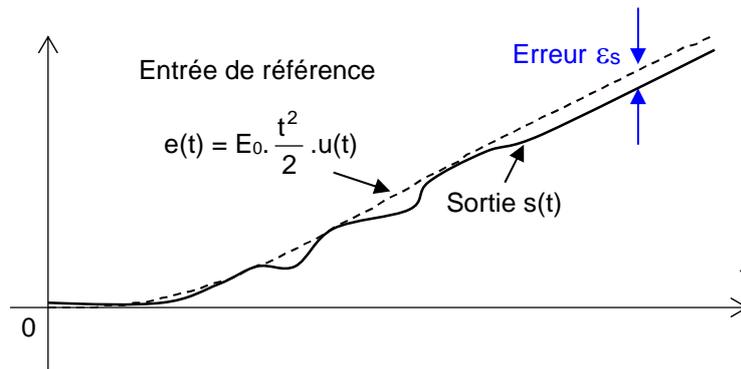


Fig. 5-4 : Erreur statique pour une entrée accélération

Si l'entrée vaut : $E(p) = \frac{E_0}{p^3}$

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{p^2 + p^2 \cdot \text{FTBO}(p)} \right) = \frac{E_0}{\lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot \text{FTBO}(p)}$$

$$\epsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = \text{cte} \quad \text{Avec } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot \text{FTBO}(p) = \text{Constante d'erreur statique d'accélération}$$

- Pour les systèmes de classe 0 : $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot K \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} = 0 \quad \rightarrow \epsilon_s = \infty$
- Pour les systèmes de classe 1 : $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot \frac{K}{p^1} \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} = 0 \quad \rightarrow \epsilon_s = \infty$
- Pour les systèmes de classe 2 : $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot \frac{K}{p^2} \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} = K \quad \rightarrow \epsilon_s = \frac{E_0}{K} = \text{cte}$
- Pour les systèmes de classe $n > 2$: $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot \frac{K}{p^n} \cdot \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots} = \infty \quad \rightarrow \epsilon_s = 0$

5- 2.1.d - Récapitulatif des erreurs statiques

Le tableau 5-1 récapitule les valeurs de l'erreur statique en fonction :

- de la classe n du système
- de l'ordre du signal d'entrée canonique
- du gain K de la FTBO du système

Classe du système	Constantes d'erreur statique			Erreur statique V_s		
	K_e	K_v	K_a	Entrée Echelon $\frac{E_0}{1 + K_e}$	Entrée Vitesse $\frac{E_0}{K_v}$	Entrée accélération $\frac{E_0}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{E_0}{1 + K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{E_0}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{E_0}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0
N	∞	∞	∞	0	0	0

Tableau 5–1 : Récapitulatif des erreurs statiques

Remarques importantes:

Les constantes d'erreurs K_e , K_v , et K_a décrivent l'aptitude du système asservi à réduire ou éliminer l'erreur statique. Elles renseignent, par conséquent, sur les performances du système en régime permanent.

Il est généralement préférable d'accroître les constantes d'erreurs, tout en maintenant la réponse transitoire dans des proportions acceptables ; En effet, l'erreur statique, lorsqu'elle est finie et non nulle, décroît lorsque le gain en boucle ouverte croît. Mais cette croissance du gain peut détériorer la stabilité du système. Cette propriété est connue sous le nom de " **Dilemme Stabilité – Précision** ", qui nécessite souvent un compromis.

Il est à noter également que pour améliorer les performances en régime statique, nous pouvons augmenter la classe du système en ajoutant un ou des intégrateur(s) dans la chaîne directe du système. Ceci peut, cependant, engendrer des problèmes de stabilité supplémentaires.

5- 2.2 - Gain statique en boucle fermée

Pour un système stable, le gain statique en boucle fermée est défini par :

$$K_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{e(t)} = \lim_{p \rightarrow 0} FTBF(p)$$

5- 2.3 - Exemple

Soit le système asservi de la figure 5–5. Calculons ses différentes erreurs statiques pour différentes entrées canoniques :

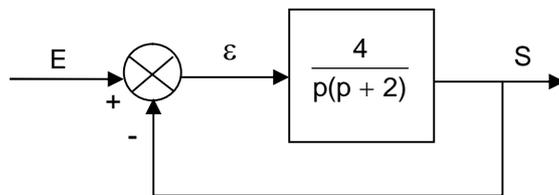


Fig. 5-5 : Exemple d'un système asservi

Il faut s'assurer, tout d'abord, de la stabilité du système. Utilisons pour cela le critère de Routh :

$$FTBO(p) = \frac{4}{p(p+2)} = \frac{2}{p(1+\frac{p}{2})} \quad \rightarrow \quad FTBF(p) = \frac{2}{p(1+\frac{p}{2})} = \frac{1}{1+\frac{2}{p(1+\frac{p}{2})}} = \frac{1}{\frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} + 1}$$

$$\begin{array}{l} p^2 : \quad 1/4 \quad 1 \\ p^1 : \quad 1/2 \quad 0 \\ p^0 : \quad 1 \end{array}$$

Tous les termes de la 1^{ère} colonne sont de même signe
 → système stable

- Gain statique en boucle fermée : $K_s = \lim_{p \rightarrow 0} FTBF(p) = 1$
- Entrée échelon : $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = 0$ avec $E(p) = 1/p$ ($E_0 = 1$)
 Ou alors : $K_e = \infty$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_e} = 1/\infty = 0$
- Entrée vitesse : $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = 1/2$ avec $E(p) = 1/p^2$ ($E_0 = 1$)
 Ou alors : $K_v = K = 2$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v} = 1/2$
- Entrée accélération : $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \right) = \infty$ avec $E(p) = 1/p^3$ ($E_0 = 1$)
 Ou alors : $K_a = 0$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = \infty$

5- 3 - Performances Dynamiques des Systèmes bouclés

Dans la majorité des cas pratiques, les caractéristiques de performances désirées pour les asservissements sont exprimées relativement au temps. Les systèmes qui emmagasinent de l'énergie ne peuvent répondre instantanément et présentent des réponses transitoires à chaque fois qu'ils sont soumis à des entrées ou perturbations.

Généralement, le comportement dynamique d'un système peut être entièrement caractérisé par la réponse temporelle de ce système suite à une entrée échelon puisqu'elle est facile à générer (Fig 5-6).

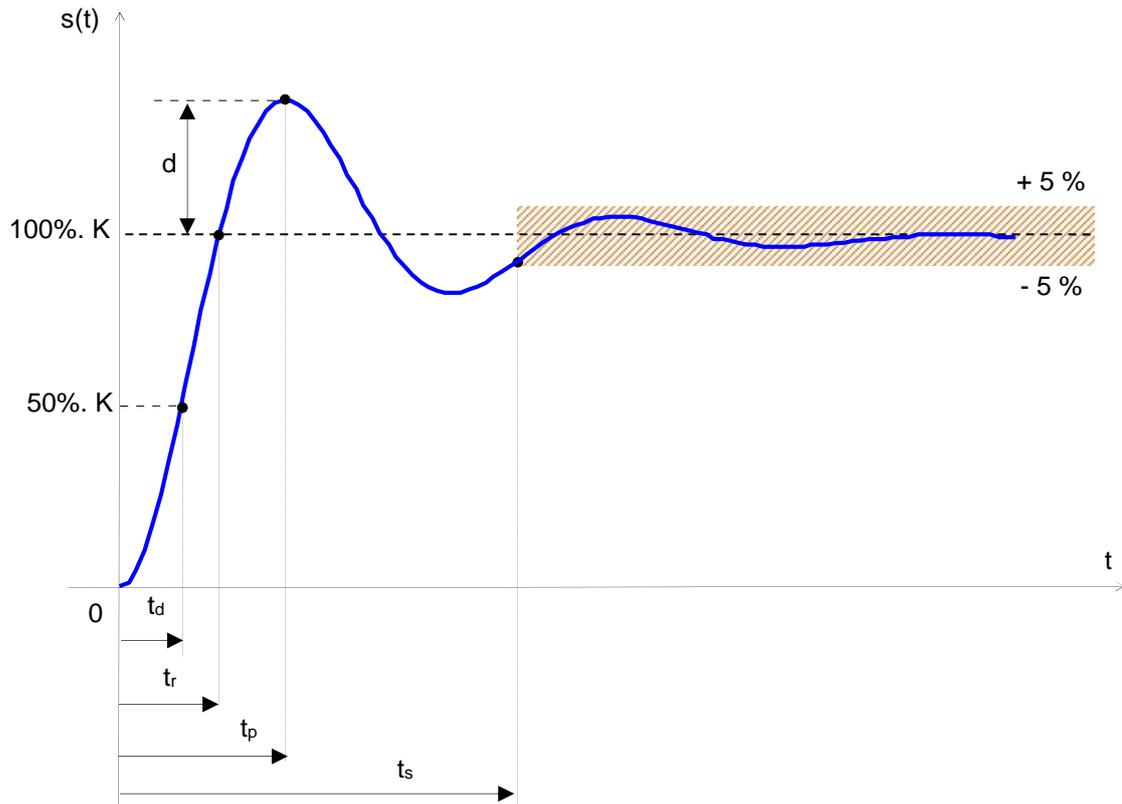


Fig 5-6 : caractéristiques de la réponse transitoire

La réponse transitoire d'un système suite à une entrée échelon dépend des conditions initiales. Par commodité dans la comparaison des réponses transitoires de différents systèmes, il est plus pratique d'utiliser les conditions initiales standards (système au repos à l'instant initial et toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles). Les caractéristiques des réponses peuvent alors être comparées.

La réponse transitoire des systèmes asservis pratiques présente souvent des oscillations amorties avant d'atteindre le régime permanent. Les critères de performances, communément utilisés pour la caractérisation des systèmes asservis linéaires dans le domaine temporel, sont définis comme suit :

- **Temps de retard (time delay), t_d** : il est défini comme étant le temps nécessaire pour que la réponse atteigne la moitié de sa valeur finale.
- **Temps de montée (rise time), t_r** : temps nécessaire à la réponse pour évoluer de 10 à 90%, de 5 à 95%, ou de 0 à 100% de sa valeur finale. Pour les systèmes du 2nd ordre peu amorti, le temps de montée de 0 à 100% est plus généralement utilisé. Pour les systèmes très amortis, l'évolution de 10 à 90% est plus souvent choisie.

- **Temps de pic (peak time), t_p** : temps nécessaire pour atteindre le 1^{er} pic de dépassement.
- **Dépassement maximum, d** : c'est la valeur du pic maximal de la réponse mesurée relativement à l'unité. Si la valeur finale du régime permanent diffère de l'unité, on utilise plus souvent le dépassement maximal exprimé en pourcentage. Il est défini par :

$$d \% = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100 \% \quad (5-3)$$

L'importance de ce dépassement maximum (en %) est qu'il renseigne directement sur la relative stabilité du système.

- **Temps de réponse ou d'établissement (settling time), t_s** : c'est le temps requis pour que la courbe de sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une bande, exprimée en pourcentage (généralement 5%), relativement à sa valeur finale.

Ces 5 grandeurs donnent une mesure directe de la caractéristique transitoire du système asservi relativement à sa réponse indicielle. Cela veut dire que le système doit être modifié jusqu'à ce que la réponse transitoire soit satisfaisante.

Il est à noter que ses grandeurs ne sont pas toutes, nécessairement, applicables à n'importe quel système. Pour un système très amorti (non oscillant), t_p et d ne sont pas définis.

5- 3.1 - Remarques sur les caractéristiques de la réponse transitoire

Excepté pour certaines applications pour lesquelles les oscillations ne sont pas tolérables, il est préférable que la réponse soit suffisamment rapide et suffisamment amortie. Ainsi, pour une réponse transitoire acceptable d'un système du 2nd ordre, le coefficient d'amortissement doit avoir une valeur **$0.4 \frac{1}{2} < \zeta < \frac{1}{2} 0.8$** :

- De faibles valeurs de ζ ($\zeta < 0.4$) produisent un dépassement excessif de la réponse transitoire.
- Des valeurs importantes de ζ ($\zeta > 0.8$) donnent une réponse très lente.

Nous verrons, plus loin, que le dépassement maximum et le temps de montée ne peuvent pas être faibles tous les deux, simultanément. Si l'un d'eux est diminué, le second croît nécessairement.

5- 3.2 - Caractéristiques de la réponse transitoire des systèmes du 2nd ordre

Dans la suite, nous allons déterminer le temps de montée, le temps de pic, le dépassement et le temps de réponse ou d'établissement d'un système du 2nd ordre en fonction de ζ et de ω_n . Le système est considéré comme étant peu amorti.

5- 3.2.a - Temps de montée t_r (rise time)

Le système considéré présente une sortie $s(t)$ telle que (voir § 3-6-2) :

$$s(t) = K \left(1 - \left[\cos(t \cdot \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(t \cdot \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] e^{-\zeta \omega_n t} \right) \quad (5-4)$$

Pour t_r , la sortie vaut : $s(t_r) = K$

$$\rightarrow \cos(t.\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(t.\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) = 0 \text{ puisque } e^{-\xi\omega_n t_r} \neq 0$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}(t_r.\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\rightarrow t_r = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (5-5)$$

Avec ω_p , β et σ définis sur la figure 5-7, il vient :

$$\rightarrow t_r = \frac{1}{\omega_p} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_p}{-\sigma}\right) \quad \rightarrow \quad t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_p} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5-6)$$

Il est clair que pour de faibles valeurs de t_r , ω_p doit être importante.

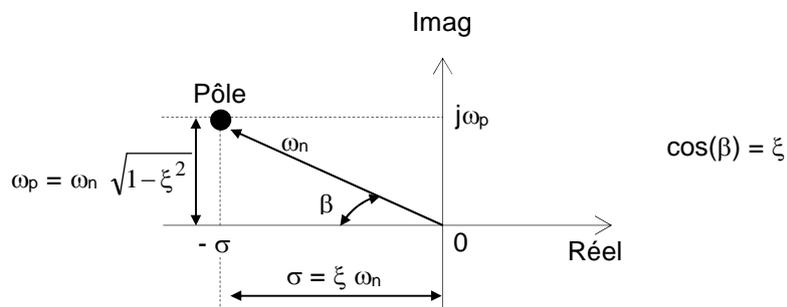


Fig 5-7 : définition de ω_p , β et σ

A partir de l'équation 5-6, la figure 5-8 montre les variations de $(\omega_n.t_r)$ en fonction de ξ .

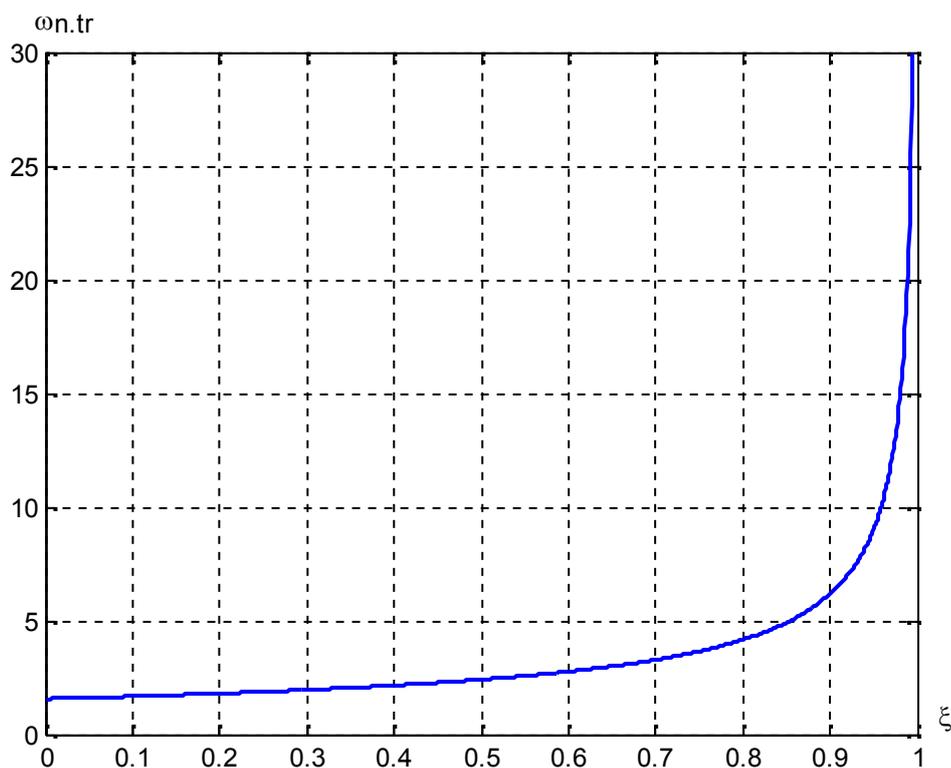


Fig 5-8 : Variations de $\omega_n.t_r$ en fonction de ξ .

5- 3.2.b - Temps de pic t_p (peak time)

Le temps de pic correspond au maximum de la sortie $s(t)$. Il est obtenu en écrivant que la dérivée de $s(t)$ par rapport au temps est nulle en ce point.

$$s(t) = K \left(1 - \left[\cos(t \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(t \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \right] e^{-\xi \omega_n t} \right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \left\{ \xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos(\omega_p \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p \cdot t) \right) + e^{-\xi \omega_n t} \left(\omega_p \cdot \sin(\omega_p \cdot t) - \frac{\xi \omega_p}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_p \cdot t) \right) \right\}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_p \cdot t) \right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \text{ si :}$$

1. $t = \infty$ (cette solution correspond au maximum uniquement lorsque $\xi \geq 1$)
2. $\sin(\omega_p \cdot t) = 0$

$$\sin(\omega_p \cdot t) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_p \cdot t = n \cdot \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{n \pi}{\omega_p} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5-7)$$

Le temps de pic correspond au premier dépassement ($n = 1$), donc :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5-8)$$

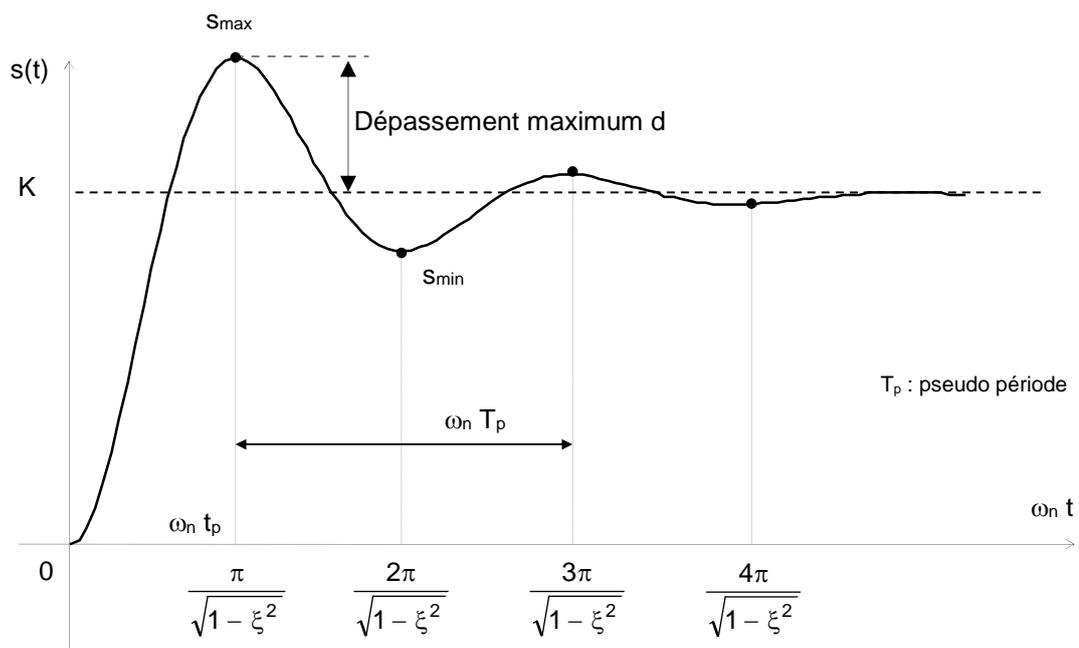


Fig. 5-9 : Périodicité des maxima et minima de la réponse indicielle

En se référant à l'équ.(5-7) et à la fig. (5-9), les maxima de la réponse transitoire apparaissent aux valeurs impaires de n. Les minima, à celles paires.

Remarque :

Il est à noter que bien que la réponse indicielle pour $\xi \neq 0$ ne soit pas périodique, les maxima et les minima de la réponse apparaissent à des intervalles périodiques de période T_p (fig. 5-9).

5- 3.2.c - Dépassement maximum d (maximum overshoot)

Ce dépassement apparaît à $t = t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$:

$$d = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} = \frac{s(t_p) - K}{K}$$

$$= - \left(\cos(t_p \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(t_p \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \right) e^{-\xi \omega_n t_p}$$

$$= - \left(\cos(\pi) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\pi) \right) e^{-\xi \omega_n (\pi / \omega_p)}$$

$$d = e^{-(\xi / \sqrt{1 - \xi^2}) \pi} \quad \rightarrow \quad d \% = e^{-(\xi / \sqrt{1 - \xi^2}) \pi} \times 100 \% \quad (5-9)$$

La figure 5-10 donne les variations du dépassement d (exprimé en pourcentage) relativement au coefficient d'amortissement ξ .

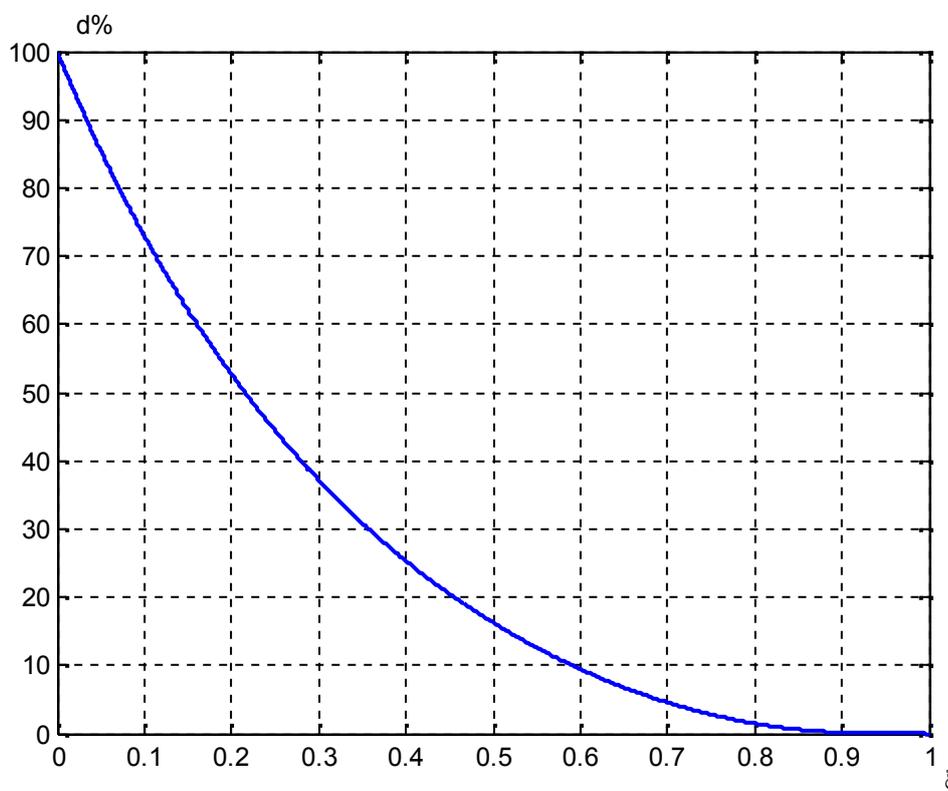


Fig. 5-10 : Dépassement d% en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

5- 3.2.d - Temps de réponse ou d'établissement t_s (settling time)

La sortie $s(t)$ du système considéré peut être écrite sous la forme suivante (voir § 3-6-2) :

$$s(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[t.\omega_p + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \right) \quad (5-10)$$

Les courbes $1 \pm \left(\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$ sont les courbes enveloppes de la réponse indicielle (fig. 5-11). La sortie demeure toujours à l'intérieur de cette paire d'enveloppes. La constante de temps de ces enveloppes est $T = \frac{1}{\xi\omega_n}$.

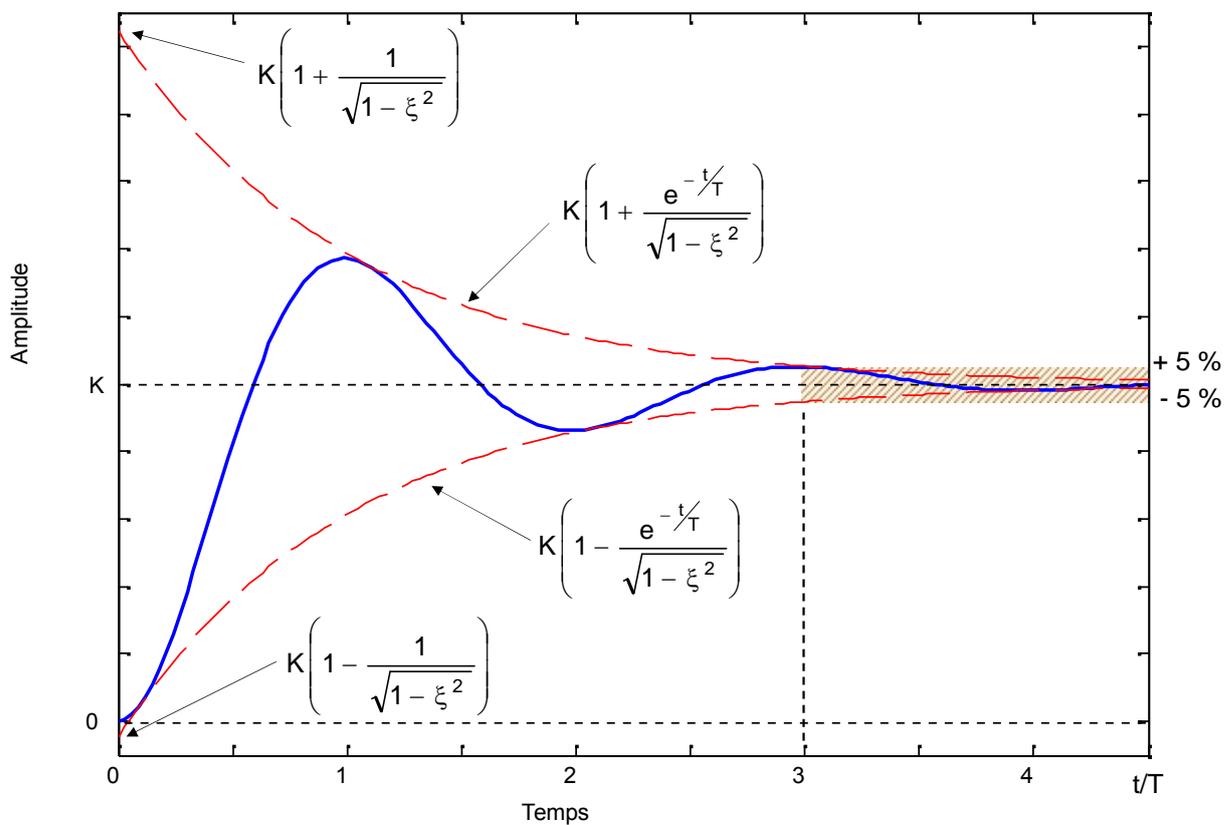


Fig. 5-11 : Paire d'enveloppes de la réponse indicielle d'un système du 2nd ordre

La vitesse de décroissance de la réponse transitoire dépend de la constante de temps T . Pour un ω_n donné, le temps d'établissement t_s est une fonction du coefficient d'amortissement ξ . Les systèmes très légèrement amortis, présentent un t_s plus important que celui pour les systèmes correctement amortis. Pour les systèmes très amortis ($\xi > 1$), le temps d'établissement devient important à cause du départ très lent de la réponse (voir réponses indicielles en fonction de ξ , § 3-6-2).

La description analytique exacte du temps d'établissement est difficile à obtenir. Il est cependant démontré que, pour un critère de $\pm 5\%$ et $0 < \xi < 0.9$, ce temps t_s varie légèrement et reste approximativement égal à 3 fois la constante de temps T . Il atteint un minimum autour de $\xi \approx 0.68$ puis augmente, presque linéairement, pour les grandes valeurs de ξ .

Par convention dans la comparaison des réponses transitoires des systèmes, on adopte généralement le temps d'établissement suivant :

$$t_s = 3.T = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (\text{critère de } \pm 5\%) \quad (5-11)$$

A titre d'information, si le critère adopté est celui de $\pm 2\%$, alors : $t_s = 4.T$

Il faudrait noter que t_s est inversement proportionnel au produit du coefficient d'amortissement ξ par la pulsation propre non amortie ω_n . Puisque la valeur de ξ est généralement déterminée compte-tenu des exigences sur le dépassement maximum admissible, t_s est déterminé essentiellement par la pulsation propre non amortie ω_n . Cela veut dire que la durée du transitoire peut être variée en ajustant uniquement ω_n , sans modifier le dépassement maximum.

A partir de cette analyse, il devient évident que pour une réponse rapide, ω_n doit être important. Pour limiter le dépassement maximum d et pour réduire t_s , le coefficient d'amortissement ξ ne doit pas être trop faible (fig. 5-10).

Si $0.4 < \xi < 0.8$, alors $25\% > d > 2.5\%$

5- 3.2.e - Exemple

Considérons le système asservi à retour unitaire de la figure 5-12 dont les paramètres sont :

$$\xi = 0.6$$

$$\omega_n = 5 \text{ rd/s}$$

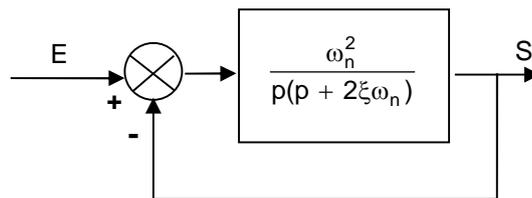


Fig. 5-12 : Système de 2nd ordre

Déterminer t_r , t_p , d , et t_s lorsque le système est sujet à une entrée échelon.

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 4 \text{ rd/s}$$

$$\sigma = \xi \cdot \omega_n = 3$$

- temps de montée t_r : $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_p}$

or $\beta = \arctg \frac{\omega_p}{\sigma} = 0.93 \text{ rd}$ ou encore $\beta = \arccos(\xi) = 0.93 \text{ rd}$

donc $t_r = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \text{ s}$

- temps de pic t_p : $t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \text{ s}$

- dépassement d : $d\% = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi} \times 100\% = 9.5\%$

- temps d'établissement ou de réponse t_s à 5% près : $t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\sigma} = 1 \text{ s}$

5- 3.3 - Relations Boucle Ouverte - Boucle Fermée à retour unitaire

5- 3.3.a - Système du 1^{er} ordre

Soit le système asservi à retour unitaire de la fig. 5–13, dont la FTBO(p) = $\frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$

Avec : K_{BO} et τ_{BO} respectivement le gain et la Constante de temps en boucle ouverte.

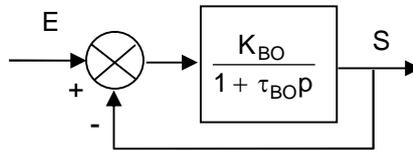


Fig. 5–13: Système du 1^{er} ordre

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p}$$

Avec : K_{BF} et τ_{BF} respectivement le gain et la Constante de temps en boucle fermée.

Alors : $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} < 1$ Gain en boucle fermée (5–12)

$\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}} < \tau_{BO}$ Constante de temps en boucle fermée (5–13)

La figure 5–14 montre les réponses indicielles en Boucles ouverte et fermée (ex. pour $K_{BO} > 1$).

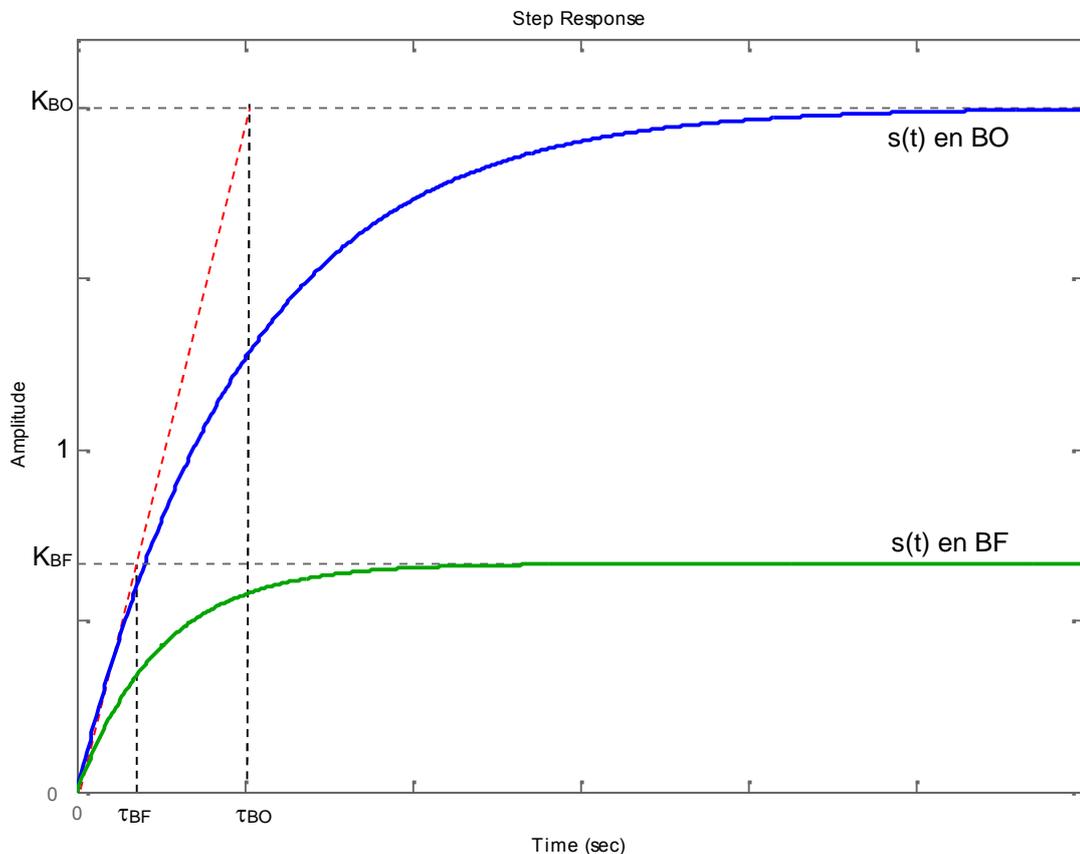


Fig. 5–14 : réponses indicielles en BO et en BF d'un système du 1^{er} ordre à retour unitaire

Remarques :

- Le système en boucle fermée est donc plus rapide qu'en boucle ouverte.
- La pente à l'origine est la même en BO qu'en BF.
- Un système du 1^{er} ordre en BO (τ_{BO} , K_{BO}) reste un système du 1^{er} ordre en BF (τ_{BF} , K_{BF}).

5- 3.3.b - Système du 2nd ordre

Soit le système asservi à retour unitaire de la fig. 5–15, dont la FTBO(p) =
$$\frac{K_{BO}}{1 + 2 \frac{\zeta_{BO}}{\omega_{nBO}} p + \frac{1}{\omega_{nBO}^2} p^2}$$

Avec : K_{BO} , ζ_{BO} , et ω_{nBO} respectivement le gain, le coefficient d'amortissement, et pulsation propre non amortie en boucle ouverte.

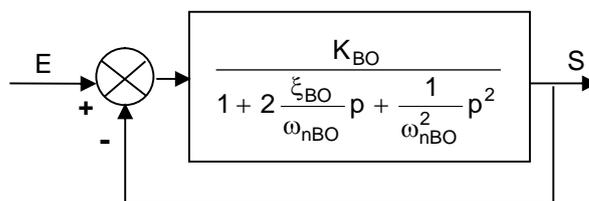


Fig. 5–15 : Système du 2nd ordre

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + 2 \frac{\zeta_{BF}}{\omega_{nBF}} p + \frac{1}{\omega_{nBF}^2} p^2}$$

Avec : K_{BF} , ζ_{BF} , et ω_{nBF} respectivement le gain, le coefficient d'amortissement, et pulsation propre non amortie en boucle fermée.

$$\text{Alors : } K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} < 1 \quad \text{Gain en boucle fermée} \quad (5-14)$$

$$\zeta_{BF} = \frac{\zeta_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}} < \zeta_{BO} \quad \text{Coefficient d'amortissement en boucle fermée} \quad (5-15)$$

$$\omega_{nBF} = \omega_{nBO} \sqrt{1 + K_{BO}} > \omega_{nBO} \quad \text{Pulsation propre non amortie en boucle fermée} \quad (5-16)$$

La figure 5–16 montre les réponses indicielles en boucles ouverte et fermée (ex. pour $K_{BO} > 1$).

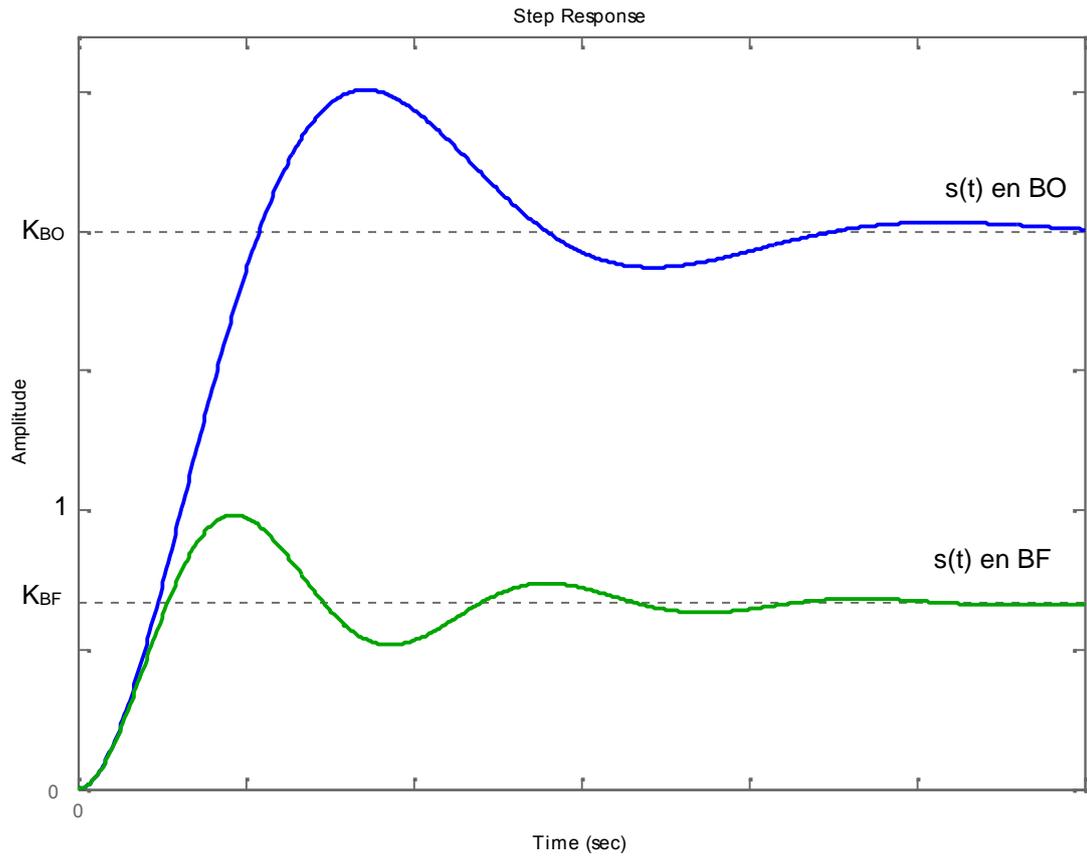


Fig. 5-16 : réponses indicielles en BO et en BF d'un système du 2^{ème} ordre à retour unitaire

Remarques :

- Le système en boucle fermée est donc plus oscillant qu'en boucle ouverte ($\xi_{BF} < \xi_{BO}$),
- le système en boucle fermée est plus rapide qu'en boucle ouverte (t_d, t_p, t_r sont plus faibles),
- le temps d'établissement à 5% près est identique, car le produit ($\omega_n \cdot \xi$) reste constant.
- Un système du 2^{ème} ordre en BO ($\omega_{nBO}, \xi_{BO}, K_{BO}$) reste un système du 2^{ème} ordre en BF ($\omega_{nBF}, \xi_{BF}, K_{BF}$).

5- 3.3.c - Relations d'approximations

En représentation asymptotique de Bode, le gain d'un système du 2^{ème} ordre a l'allure suivante :

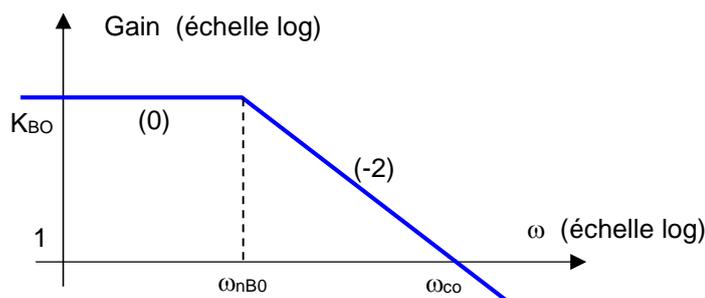


Fig. 5-17 : Diagramme du module (représentation asymptotique de Bode)

$$\text{Pente} = -2 = \frac{\log K - \log 1}{\log \omega_{nBO} - \log \omega_{co}}$$

Ce qui donne :

$$\omega_{co} = \omega_{nBO} \sqrt{K_{BO}} \quad (5-17)$$

Remarque :

Cette relation est approximative puisqu'elle est obtenue à partir d'un diagramme asymptotique.

Si ce système est à retour unitaire, alors d'après (5-16) : $\omega_{nBF} = \omega_{nBO} \sqrt{1+K_{BO}}$.

Généralement, K est grand, de sorte que l'on peut écrire :

$$\omega_{nBF} = \omega_{nBO} \sqrt{1+K_{BO}} \approx \omega_{nBO} \sqrt{K_{BO}} \approx \omega_{co}$$

d'où :

$$\omega_{nBF} \approx \omega_{co} \quad (5-18)$$

La marge de phase est : $\Delta\varphi = \varphi(\omega_{co}) + \pi$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\omega_{co}) = \left(-\text{arctg} \frac{2 \cdot \xi_{BO} \frac{\omega}{\omega_{nBO}}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{nBO}} \right)^2} \right)_{\omega=\omega_{co}} \\ \omega_{co} \approx \omega_{nBF} = \omega_{nBO} \sqrt{1+K_{BO}} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \varphi(\omega_{co}) = -\text{arctg} \frac{2 \cdot \xi_{BO} \sqrt{1+K_{BO}}}{1 - (1+K_{BO})} = -\text{arctg} \frac{2 \cdot \xi_{BO} \sqrt{1+K_{BO}}}{-K_{BO}}$$

Si K_{BO} est grand, alors : $\varphi(\omega_{co}) \approx -\text{arctg} \left(-\frac{2 \cdot \xi_{BO}}{\sqrt{K_{BO}}} \right) \approx -\text{arctg}(-2 \cdot \xi_{BF})$ (Car $\xi_{BF} = \frac{\xi_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}$)

$$\rightarrow \varphi(\omega_{co}) \approx -[\pi - \text{arctg}(2 \cdot \xi_{BF})] = -\pi + \text{arctg}(2 \cdot \xi_{BF})$$

D'où : $\Delta\varphi = -\pi + \text{arctg}(2 \cdot \xi_{BF}) + \pi = \text{arctg}(2 \cdot \xi_{BF})$

Conversion en degrés : $\Delta\varphi^\circ \cdot \frac{2\pi}{360} = \text{arctg}(2 \cdot \xi_{BF}) \approx 2 \cdot \xi_{BF}$

D'où :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100} \quad (5-19)$$

5- 4 - Effets de l'addition de pôles et de zéros aux fonctions de transfert

Il a été montré dans les chapitres précédents que le comportement dynamique des systèmes asservis dépend énormément de la position des racines de l'équation caractéristique dans le plan complexe (pôles de la FTBF).

Cependant, en pratique, un asservissement réussi ne peut dépendre uniquement du choix des valeurs des paramètres du système de façon que les racines de l'équation caractéristique soient correctement placées.

Nous allons voir que :

Bien que les racines de l'équation caractéristique, qui sont les pôles de la FTBF, affectent la réponse transitoire des systèmes asservis linéaires, en particulier la stabilité, les zéros de la fonction de transfert, s'il y en a, sont également importants.

Ainsi le rajout et /ou la suppression de pôles et de zéros indésirables de la fonction de transfert est souvent nécessaire pour obtenir des performances temporelles satisfaisantes. Dans ce chapitre, nous verrons que l'addition de pôles et zéros aux fonctions de transfert en boucle fermée peut avoir des effets différents sur la réponse transitoire des systèmes bouclés.

5- 4.1 - Addition d'un pôle supplémentaire à la chaîne directe d'un système asservi à retour unitaire

Pour étudier l'effet de l'addition d'un pôle à la chaîne directe d'un système asservi à retour unitaire, considérons le système du second ordre de la figure 5–18, auquel nous rajoutons un pôle ($p = -1 / T_p$) supplémentaire sur la chaîne directe (fig. 5–19).

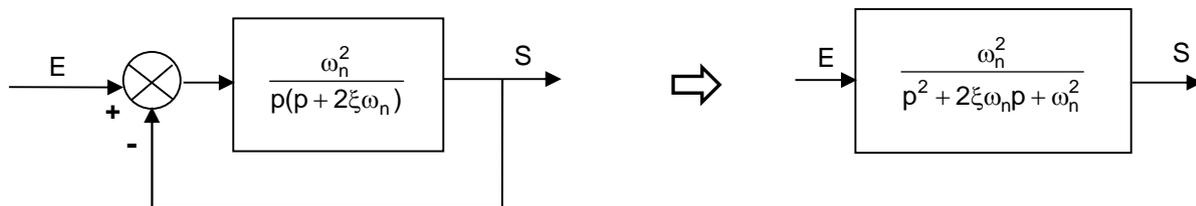


Fig. 5–18 : système asservi de 2nd ordre à retour unitaire

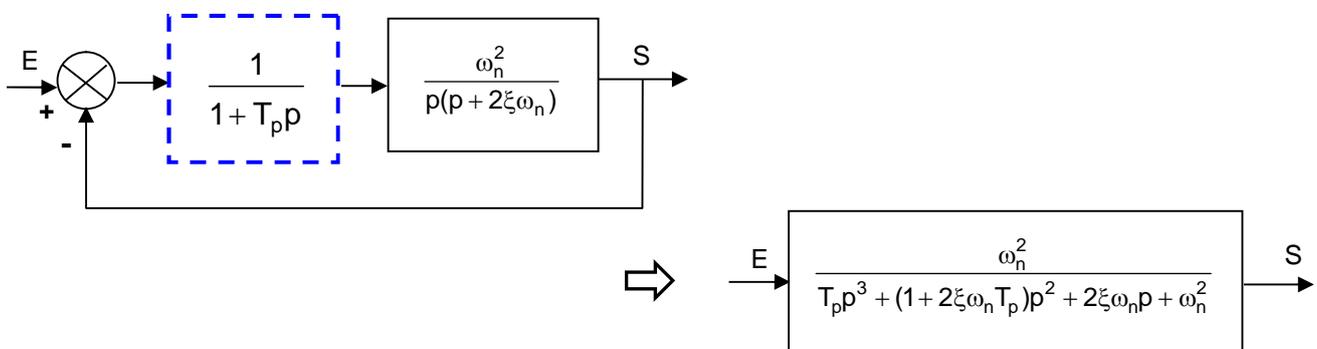


Fig. 5–19 : Rajout d'un pôle supplémentaire à la chaîne directe d'un système asservi de 2nd ordre

La FTBO devient :

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p(p + 2\xi\omega_n)(1 + T_p p)} \quad (5-20)$$

La FTBF s'écrit alors :

$$F(p) = FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{\omega_n^2}{T_p p^3 + (1 + 2\xi\omega_n T_p)p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \quad (5-21)$$

La figure 5-20 illustre les réponses indicielles d'un système en boucle fermée lorsque :

$$\omega_n = 1 \text{ rd/s}, \xi = 1, \text{ et } T_p = 0, 1, 2, \text{ et } 5 \text{ s}$$

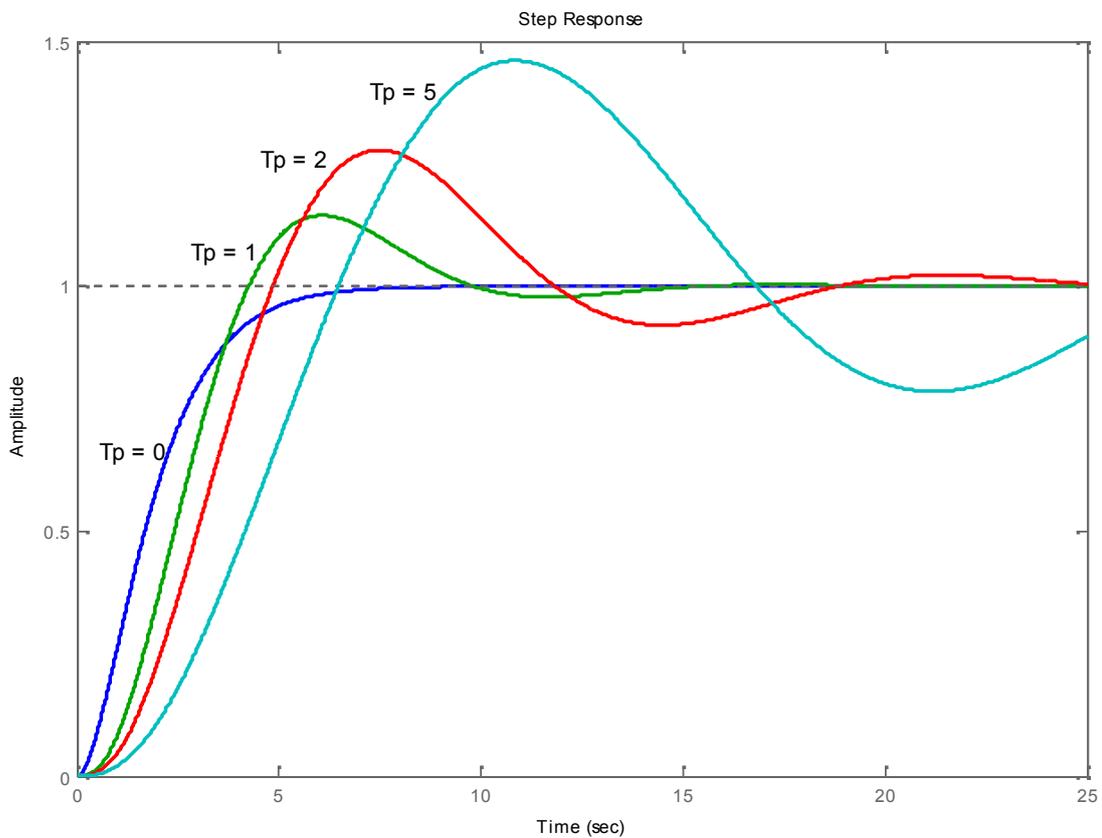


Fig. 5-20 : Réponse indicielle de $F(p)$ (addition d'un pôle à la chaîne directe).

Ex : $\omega_n = 1 \text{ rd/s}$, $\xi = 1$, et $T_p = 0, 1, 2$, et 5 s

Ces réponses montrent que :

L'addition d'un pôle à la chaîne directe d'un système asservi augmente, généralement, le dépassement maximum de la FTBF, ainsi que le temps de montée t_r (rise time).

5- 4.2 - Addition d'un pôle supplémentaire à la fonction de transfert en boucle fermée

Considérons la fonction de transfert en boucle fermée d'un système du second ordre auquel on rajoute un pôle ($p = -1 / T_p$) supplémentaire (Fig. 5-21) :

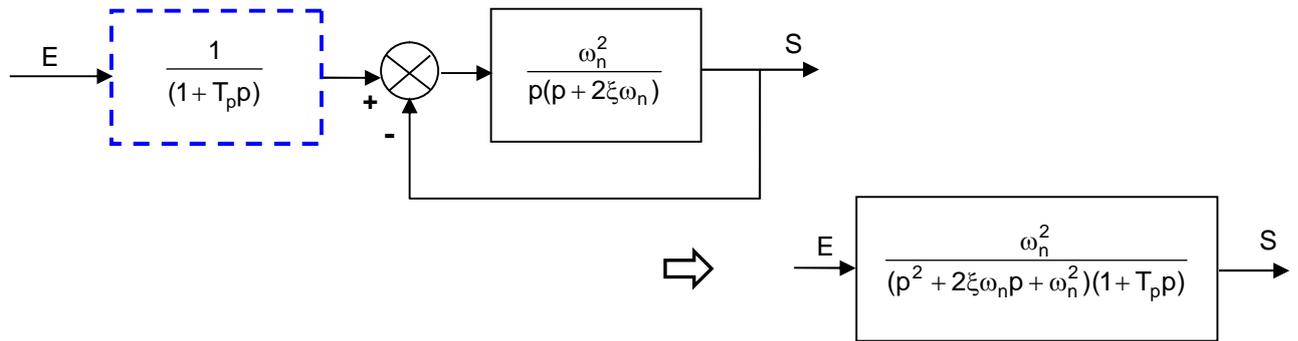


Fig. 5-21 : Rajout d'un pôle supplémentaire à la fonction de transfert d'un système asservi de 2nd ordre

$$F(p) = \text{FTBF}(p) = \frac{\omega_n^2}{(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)(1 + T_p p)} \quad (5-22)$$

La figure 5-22 illustre les réponses indicielles du système en boucle fermée lorsque :

$$\omega_n = 1 \text{ rd/s}, \xi = 0.5, \text{ et } T_p = 0, 0.5, 1, 2, \text{ et } 4 \text{ s}$$

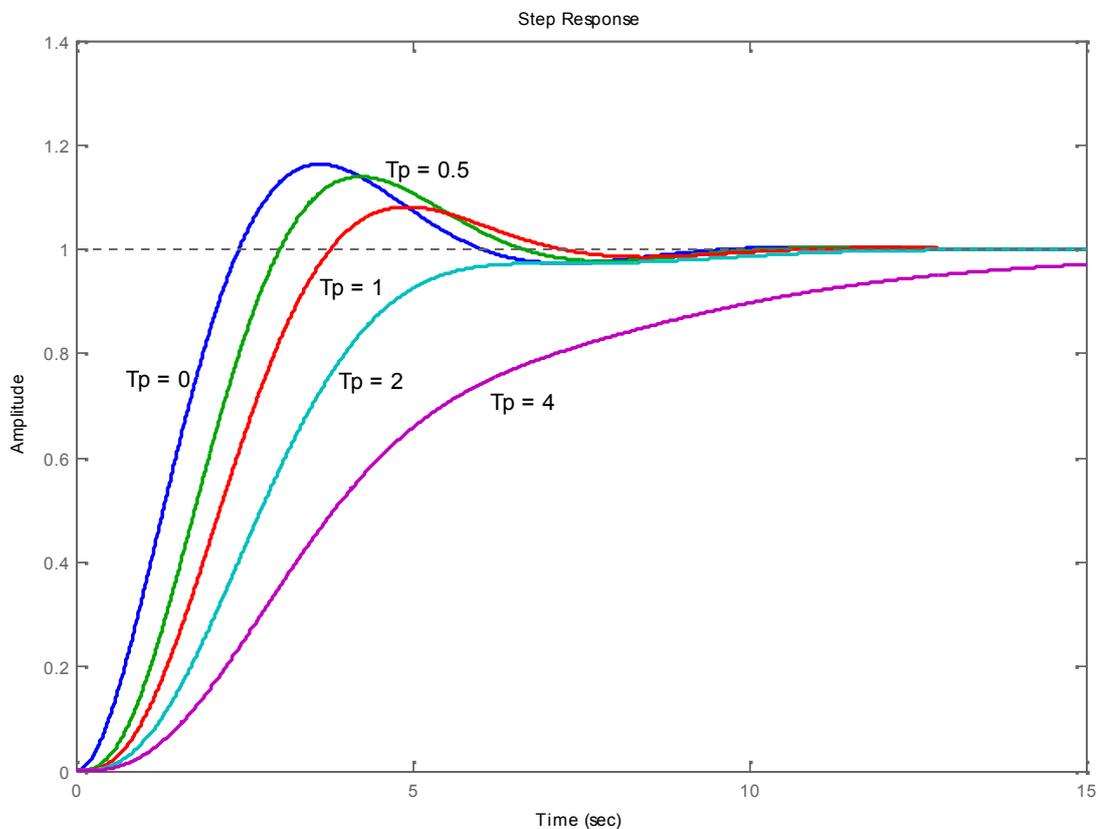


Fig. 5-22 : Réponse indicielle de $F(p)$ (addition d'un pôle à la FTBF) .

$$\text{Ex : } \omega_n = 1 \text{ rd/s}, \xi = 0.5, \text{ et } T_p = 0, 0.5, 1, 2, \text{ et } 4 \text{ s}$$

Ces réponses montrent que :

L'addition d'un pôle à la fonction de transfert en boucle fermée décroît, généralement, le dépassement maximum de la FTBF, mais fait augmenter le temps de montée t_r (rise time).

Si l'on ne considère que le dépassement, ajouter un pôle à une fonction de transfert en boucle fermée a un effet opposé à celui obtenu lorsque le pôle est ajouté à la chaîne directe.

5- 4.3 - Addition d'un zéro supplémentaire à la fonction de transfert en boucle fermée

Considérons la fonction de transfert en boucle fermée d'un système du second ordre auquel on rajoute un zéro ($p = -1 / T_z$) supplémentaire (Fig. 5-23) :

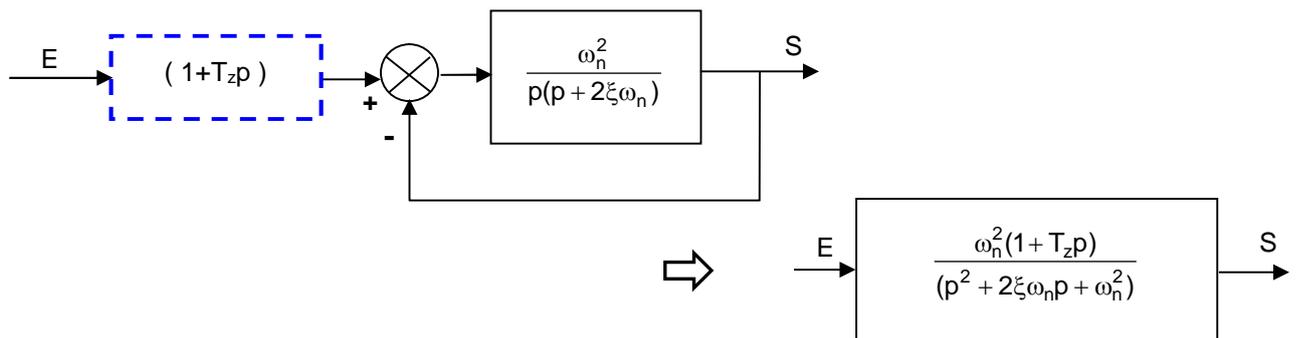


Fig. 5-23 : Rajout d'un zéro supplémentaire à la fonction de transfert d'un système asservi de 2nd ordre

$$F(p) = \text{FTBF}(p) = \frac{\omega_n^2(1 + T_z p)}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \quad (5-23)$$

La figure 5-24 montre les réponses indicielles du système en boucle fermée lorsque :

Avec $\omega_n = 1$ rd/s, $\xi = 0.5$, et $T_z = 0, 1, 3, 6$, et 10 s.

Ces réponses montrent que :

L'addition d'un zéro à la fonction de transfert en boucle fermée décroît le temps de montée t_r (rise time) et augmente le dépassement maximum de la réponse indicielle.

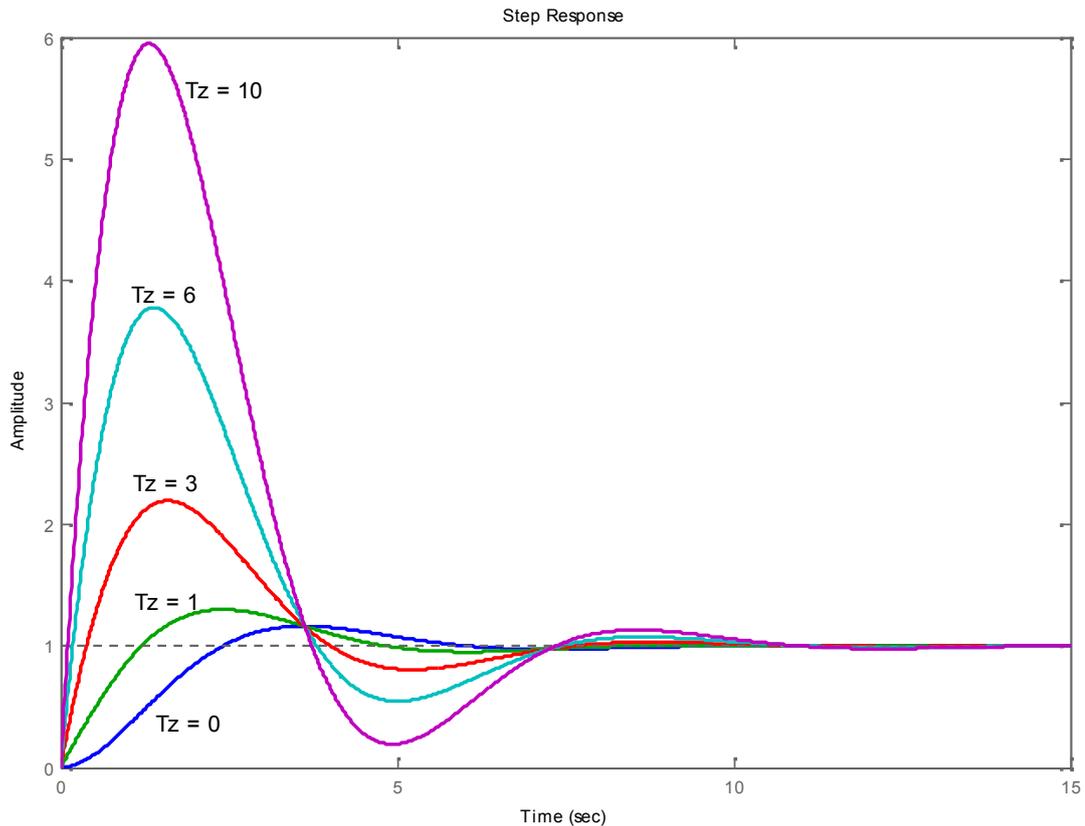


Fig. 5-24 : Réponse indicielle de $F(p)$ (addition d'un zéro à la FTBF) .

Ex : $\omega_n = 1$ rd/s, $\zeta = 0.5$, et $T_z = 0, 1, 3, 6$, et 10 s

5- 4.4 - Addition d'un zéro supplémentaire à la chaîne directe d'un système à retour unitaire

Considérons qu'un zéro $-1/T_z$ est ajouté à la chaîne directe d'un système asservi de 3^{ème} ordre de FTBO $G(p)$ (Fig. 5-25).

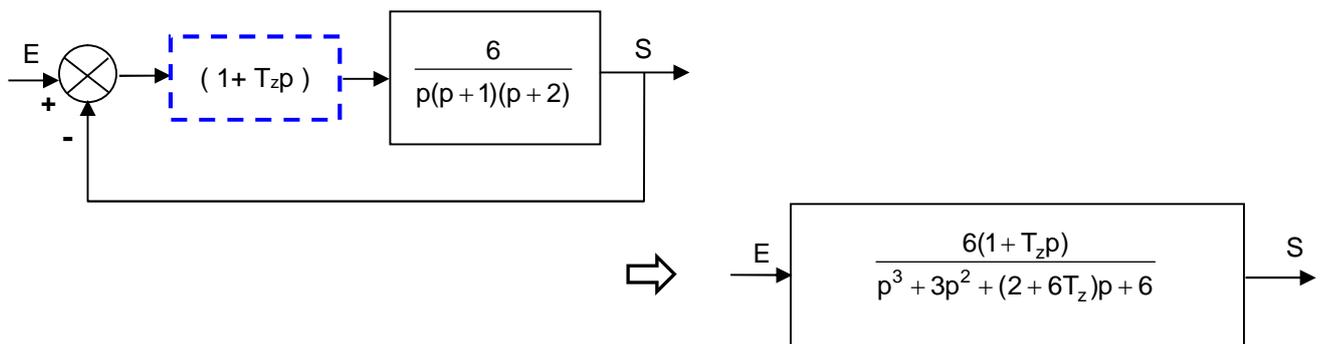


Fig. 5-25 : Rajout d'un zéro supplémentaire à la fonction de transfert d'un système asservi de 3^{ème} ordre

$$G(p) = \frac{6(1+T_z p)}{p(p+1)(p+2)}$$

$$FTBF(p) = F(p) = \frac{6(1+T_z p)}{p^3 + 3p^2 + (2+6T_z)p + 6} \quad (5-24)$$

La différence entre ce cas et celui d'ajouter un zéro à la fonction de transfert en boucle fermée est que dans le cas présent, le terme $(1+T_z p)$ apparaît non seulement au numérateur de $F(p)$ mais le dénominateur de $F(p)$ contient également T_z .

Le terme $(1+T_z p)$ au numérateur de $F(p)$ augmente le dépassement maximum, mais T_z apparaît dans le coefficient du terme en p au dénominateur, ce qui a pour effet d'améliorer l'amortissement ou réduire le dépassement maximum.

La figure 5–26, illustre les réponses indicielles lorsque $T_z = 0, 0.2, 0.5, 2, 5,$ et 10 s.

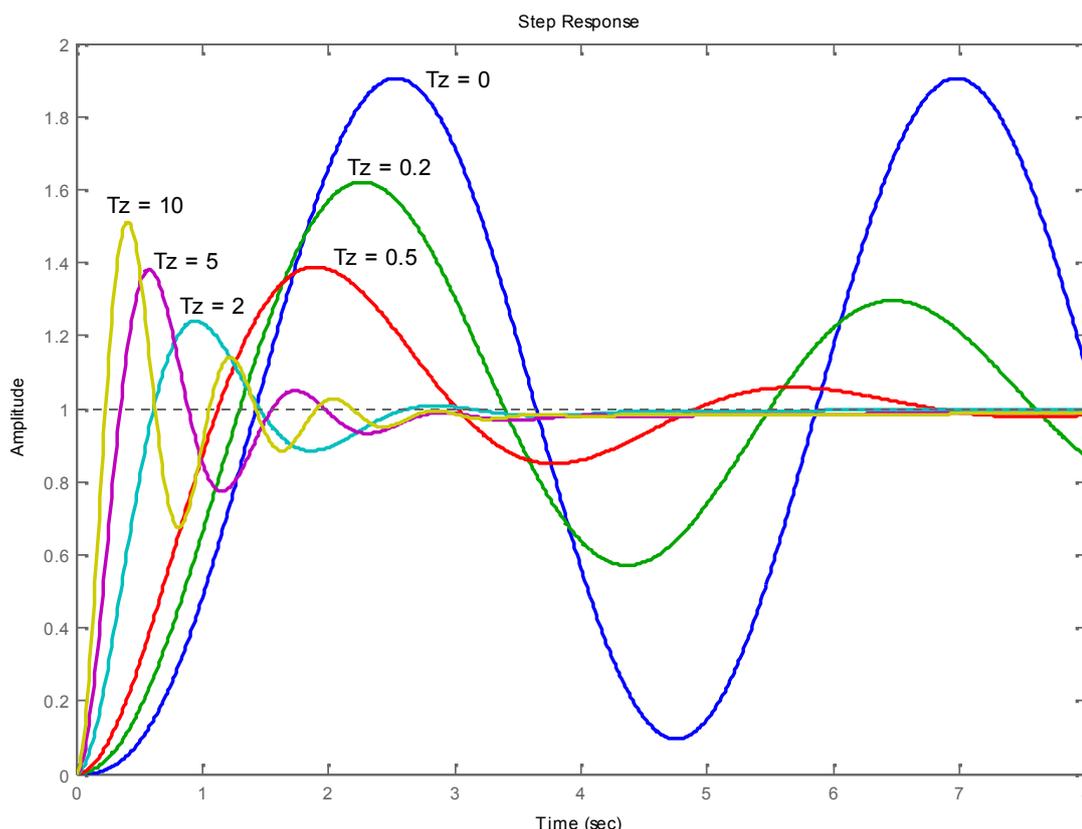


Fig. 5–26 : Réponse indicielle de $F(p)$ (addition d'un zéro à la chaîne directe d'une FT).

Ex : $T_z = 0, 0.2, 0.5, 2, 5,$ et 10 s

Il est à noter que lorsque $T_z = 0$, le système est au bord de l'instabilité. Lorsque $T_z = 0.2$ et 0.5 , les dépassements maximums sont réduits, principalement à cause de l'amélioration de l'amortissement. Lorsque T_z croît au delà de 2, bien que l'amortissement continue à être amélioré, le terme $(1+T_z p)$ au numérateur devient de plus en plus dominant, et le dépassement maximum devient de plus en plus important au fur et à mesure que T_z augmente.

Une conclusion importante est à tirer de cette discussion :

Bien que les racines de l'équation caractéristique soient généralement utilisées pour étudier le relatif amortissement et la relative stabilité des systèmes asservis linéaires, les zéros de la fonction de transfert ne doivent pas être négligés quant à leurs effets sur les performances transitoires du système.

5- 5 - Pôles dominants des fonctions de transfert

A partir des discussions précédentes, il devient clair que la position des pôles de la fonction de transfert dans le plan de Laplace affecte énormément la réponse transitoire du système. Pour les besoins d'analyse et de synthèse, il est important de trier les pôles ayant un effet dominant sur la réponse transitoire. On les appellera **pôles dominants**.

Puisque la majorité des systèmes de contrôle rencontrés dans la pratique sont d'un ordre supérieur à deux, il devient utile d'établir des indications quant à l'approximation des systèmes d'un ordre important par des systèmes d'un ordre plus faible aussi longtemps que la réponse transitoire est concernée.

En synthèse, nous pouvons utiliser les pôles dominants pour contrôler les performances dynamiques du système, tandis que les **pôles négligeables ou insignifiants** sont utilisés afin d'assurer que la fonction de transfert du régulateur peut être réalisée par des composants physiques.

Pour tous les besoins pratiques, nous pouvons sectionner, qualitativement, le plan de Laplace en régions dans lesquelles les pôles dominants et les pôles insignifiants sont séparés comme sur la figure 5–27. Nous avons, délibérément, choisi de ne pas assigner des valeurs spécifiques aux coordonnées, puisqu'elles sont toutes relatives au système considéré.

Les pôles qui sont proches de l'axe imaginaire du côté gauche du plan complexe donnent lieu à des réponses transitoires qui vont s'amortir relativement doucement.

Les pôles qui se trouvent loin de l'axe (relatif au pôles dominants), correspondent à des amortissements rapides des réponses.

La distance D entre la région dominante et la région peu significative peut être sujet à discussion : il est établi en pratique et dans la littérature que si le module de la partie réelle d'un pôle vaut 5 à 10 fois celle d'un pôle dominant ou d'une paire de pôles complexes de pôles dominants, le pôle sera considéré comme étant négligeable relativement à la réponse transitoire.

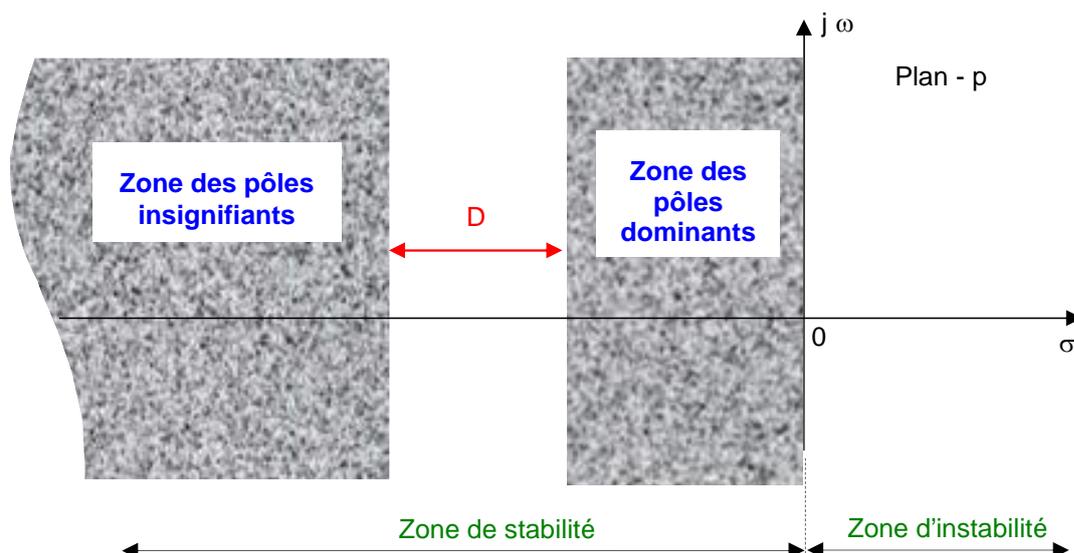


Fig.5–26 : Zones des pôles dominants et insignifiants dans le plan - p

Chapitre 7 : Correction des systèmes asservis linéaires

7- 1 - Introduction

7- 1.1 - Nécessité de correction dans les systèmes asservis

Nous avons vu, dans les chapitres précédents relatifs à l'analyse des systèmes asservis, que, pour satisfaire aux spécifications de stabilité et de précision, on est amené à formuler des conditions sur la FTBO :

1. **Stabilité** : le degré de stabilité est défini par :
 - *la marge de gain* : la stabilité est d'autant meilleure que :
 - le gain de la FTBO est plus faible,
 - donc, que la bande passante en BO est plus faible.
 - *la marge de phase* : la stabilité est d'autant meilleure que :
 - le déphasage de la FTBO est plus faible.
2. **Précision** : son étude se décompose en deux parties :
 - *Précision statique* : l'annulation de l'erreur en régime permanent nécessite la présence, dans la FTBO, d'une ou plusieurs intégrations selon l'entrée canonique imposée.
 - *Précision dynamique* : elle est d'autant meilleure que le gain de la FTBO est plus élevé, c'est-à-dire que la bande passante est plus large.

Pour simplifier à l'extrême, on peut retenir, en résumé que la précision et la stabilité sont quantifiées, dans le diagramme de Bode de la FTBO, de la manière suivante (fig. 7-1) :

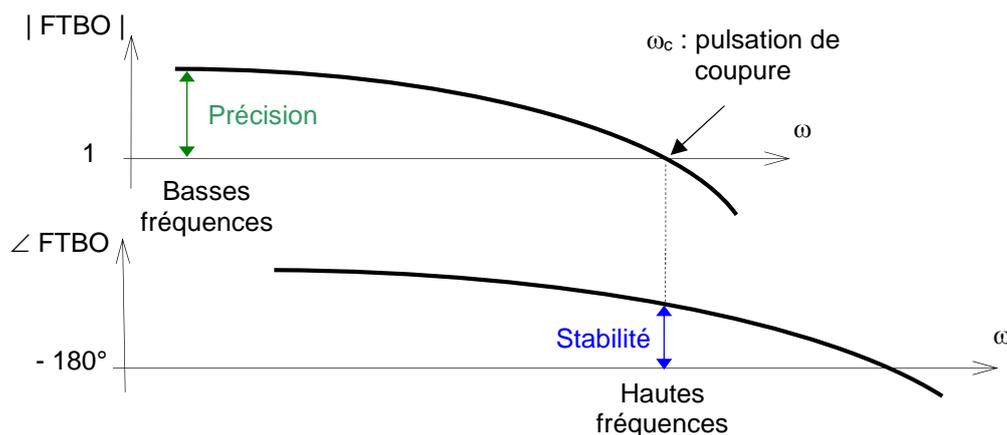


Fig. 7-1 : Quantification de la stabilité et de la précision sur le diagramme de Bode

Il devient clair que :

- pour améliorer la précision, il faut pouvoir augmenter le gain de la FTBO
- la stabilité diminue si ce même gain devient trop élevé.

Il semble donc difficile d'obtenir un système, à la fois, précis (grand gain) et stable (faible gain). Ce premier **dilemme stabilité-précision** impose donc l'emploi de systèmes *compensateurs*, *correcteurs*, ou encore *régulateurs* dont le rôle sera de relever le gain dans une certaine zone de fréquence et de la diminuer ailleurs.

Le correcteur ou régulateur va permettre de satisfaire les contraintes suivantes :

- *trouver un compromis entre la stabilité et la précision,*
- *si besoin, rendre stable en boucle fermée un système qui serait instable en boucle ouverte,*
- *si besoin, et c'est en général le cas, introduire un intégrateur dans la boucle pour obtenir une erreur statique nulle ($v = 0$).*

Mais, il existe d'autres incompatibilités qui nécessitent également l'emploi de correcteurs :

Un bon asservissement doit être insensible aux perturbations et, en même temps, il doit répondre rapidement aux variations des diverses grandeurs d'entrée. Ces deux conditions sont incompatibles puisque :

- la réponse rapide nécessite une large bande passante,
- tandis que l'insensibilité aux perturbations exige une bande étroite.

Le rôle des correcteurs, qui peuvent être électriques, mécaniques, ou hydrauliques, est donc de *déformer le diagramme asymptotique ou la courbe de Nyquist pour leur donner des marges de gain et de phase capables d'assurer la stabilité tout en conservant aux basses fréquences un gain suffisamment grand pour que la précision soit bonne*. De tels "filtres" pourront également supprimer l'influence de certaines perturbations sans limiter la bande passante globale.

7- 1.2 - Stratégie de correction (ou compensation) des systèmes asservis

Les outils d'analyse étudiés dans les chapitres précédents conduisent tous au même objectif : la synthèse de systèmes asservis corrigés ou compensés, et par conséquent, la synthèse de correcteurs (ou compensateurs).



Fig. 7-2 : Processus commandé

En partant de spécifications sur le comportement final d'un système commandé, tel celui représenté par le schéma bloc de la figure 7-2, l'établissement d'un système de correction exige le suivi des 3 étapes suivantes:

1. Déterminer ce que devrait réaliser le système et la manière d'y aboutir (spécifications du cahier des charges)
2. Déterminer la configuration du correcteur en relation avec la manière avec laquelle il est connecté au système corrigé.
3. Déterminer les valeurs des paramètres du correcteur de manière à atteindre les objectifs.

7- 1.2.a - Cahier des charges

On utilise toujours un cahier des charges pour décrire ce que doit réaliser le système. Ensuite, sur la base de ce cahier des charges, on décide de la manière d'y parvenir.

Ces spécifications sont uniques pour chaque application et incluent toujours des exigences sur la stabilité relative du système, la précision statique (erreur), la réponse transitoire, et sur les caractéristiques de la réponse fréquentielle. Pour certaines applications, il peut y avoir des spécifications supplémentaires sur la sensibilité aux variations des paramètres (robustesse, insensibilité aux bruits, etc. ...).

La synthèse des systèmes de correction linéaire peut être réalisée soit dans le domaine temporel, soit dans celui fréquentiel. Par exemple, la précision statique est toujours spécifiée pour une entrée échelon, rampe ou accélération, et la démarche classique suivie pour répondre aux contraintes imposées se fait dans le domaine temporel. D'autres spécifications, telles que le dépassement, le temps de montée, et le temps d'établissement sont toutes définies pour une entrée échelon unitaire, et sont, par conséquent, utilisées spécifiquement dans le domaine temporel.

La stabilité relative est également mesurée en terme de marge de phase, marge de gain et résonance. Celles-ci sont des spécifications du domaine typiquement fréquentiel et sont prises en charge par les outils tels que le diagramme de Bode, les lieux de Nyquist et / ou de Black–Nichols.

Pour mener à bien la conception du correcteur dans le domaine temporel ou fréquentiel, il est pratique de garder à l'esprit que la synthèse dans le domaine temporel se fait généralement avec l'aide du plan- p de Laplace et du lieu d'Evans. La synthèse dans le domaine fréquentiel est basée sur la manipulation du gain et de la phase de la fonction de transfert de la boucle jusqu'à atteindre les spécifications voulues.

Voici quelques principes et règles de base :

- Les pôles complexes conjugués de la FTBF conduisent à une réponse indicielle oscillatoire. Si tous les pôles du système sont réels, la réponse indicielle est très amortie. Cependant, les zéros de la FTBF peuvent causer des dépassements importants même si le système est très amorti.
- La réponse d'un système est dominée par les pôles les plus proches de l'origine du plan- p de Laplace. Les transitoires dues aux pôles éloignés de l'origine et à gauche du plan- p s'atténuent rapidement.
- Plus éloignés à gauche dans le plan- p sont les pôles dominants du système, plus vite répondra le système et plus importante sera la bande passante.
- Lorsqu'un pôle et un zéro de la fonction de transfert d'un système ont, plus ou moins, tendance à se simplifier entre eux, la zone de réponse du système associée à ce pôle aura un faible module.
- Les spécifications des domaines temporel et fréquentiel sont étroitement liées entre elles. Le temps de montée et la bande passante sont inversement proportionnels. La marge de phase, la marge de gain, la résonance, et l'amortissement sont inversement proportionnels.

Nous avons montré que pour les systèmes du second ordre, il existait des relations analytiques simples entre certaines de ces spécifications temporelles et fréquentielles. Cependant, pour les systèmes d'un ordre plus élevé, la corrélation entre les spécifications dans ces deux domaines est plus difficile à établir.

7- 1.2.b - Configurations de correction

En général, la dynamique d'un processus commandé peut être représentée par le schéma fonctionnel de la figure 7-2.

L'objectif est que la variable commandée, représentée par la sortie $s(t)$, ait un comportement désiré sur un intervalle de temps donné. Il s'agit alors de déterminer le signal de commande $u(t)$ qui, dans cet intervalle, garantisse la sortie $s(t)$ désirée.

Plusieurs configurations de base sont possibles, et sont différentes les unes des autres selon la position relative du correcteur par rapport au système commandé. Une fois la configuration de correction choisie, il ne restera plus qu'à calculer les éléments du correcteur pour répondre au cahier des charges.

Nous allons, brièvement, passer en revue les configurations de correction les plus utilisées :

- **Correction cascade ou série** : On peut réaliser la compensation en insérant, dans une chaîne, un correcteur directement en cascade avec les autres éléments (fig. 7-3).

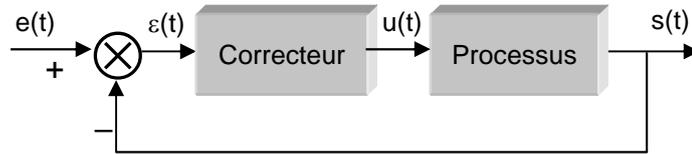


Fig. 7-3 : Correction en cascade ou série

- **Correction en réaction ou parallèle** : On peut placer ces correcteurs en parallèle sur un élément d'une chaîne ; dans ce cas, c'est un correcteur en réaction qui constitue alors une boucle secondaire (fig. 7-4).

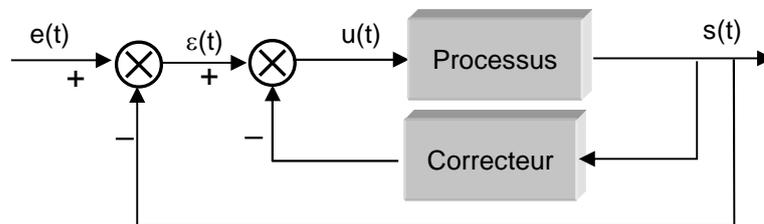


Fig. 7-4 : Correction en réaction ou parallèle

D'autres configurations sont également très utilisées, telles que :

- **Correction série-réaction** : Le correcteur série A est utilisée conjointement avec un correcteur en réaction B (fig. 7-5).

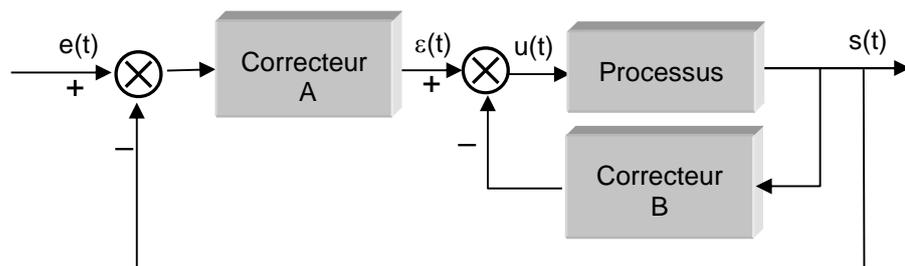


Fig. 7-5 : Correction série-réaction

- **Correction en anticipation** :
 1. Dans la fig. 7-6-a, le correcteur anticipatif G_{CA} est placé en série avec le système en boucle fermée qui dispose lui-même d'un correcteur G_C dans sa chaîne directe.
 2. Dans la fig. 7-6-b, Le correcteur anticipatif G_{CA} est placé en parallèle avec la chaîne directe.

Pour la correction en anticipation, le correcteur G_{CA} est à l'extérieur de la boucle système. Il n'affecte pas les racines de l'équation caractéristique du système original. Les pôles et les zéros de G_{CA} peuvent être choisis de manière à ajouter ou éliminer les pôles ou zéros de la fonction de transfert en boucle fermée.

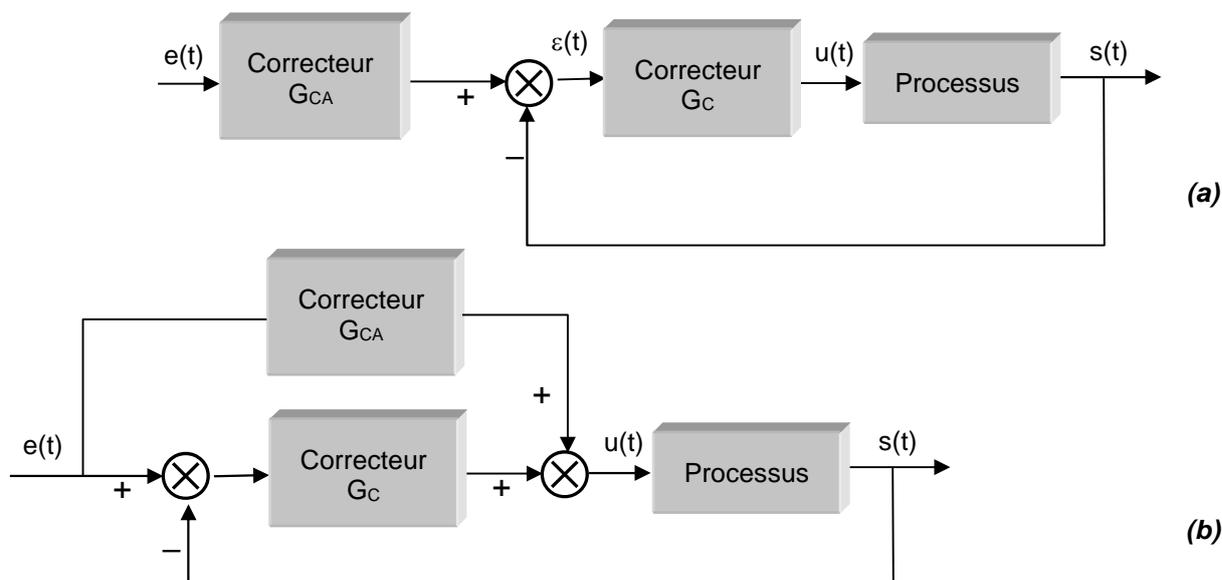


Fig. 7-6 (a) et (b) : Correction en anticipation

Les configurations de correction des figures 7-3 et 7-4 sont toutes à un seul degré de liberté en ce sens qu'elles ne disposent que d'un seul correcteur dans chaque système, bien que ces correcteurs puissent avoir plusieurs paramètres à faire varier.

L'inconvénient avec la correction à un seul degré de liberté est que les critères de performances réalisables sont limités. Par exemple, si les racines de l'équation caractéristique sont sélectionnées de manière à produire une certaine valeur d'amortissement, le dépassement obtenu pour une réponse indicielle peut encore être excessif à cause des zéros de la fonction de transfert en boucle fermée (voir chapitre 5).

Les configurations des figures 7-5, 7-6-a, et 7-6-b sont toutes à deux degrés de liberté.

7- 1.2.c - Correcteurs de base

Après avoir opter pour une configuration de correction, le concepteur doit choisir le type de correcteur qui, une fois les valeurs de ses éléments déterminées, répondra aux spécifications du cahier des charges. Mais même là, il existe une multitude de correcteurs disponibles. En pratique, on choisira le plus simple. Plus le correcteur est complexe, plus son coût est élevé, moins fiable il est, et plus difficile il est à réaliser.

Le choix d'un correcteur spécifique pour une application spécifique est toujours basé sur l'expérience du concepteur, et quelquefois sur l'intuition.

Le correcteur choisi, la tâche suivante consiste à déterminer les valeurs de ses paramètres. Ce sont les coefficients d'une ou plusieurs fonctions de transfert composant ce correcteur. L'approche de base est l'utilisation des outils d'analyse discutés dans le chapitre 5 (Performances des asservissements) pour déterminer comment les valeurs de chaque paramètre individuel influent sur le comportement global du système, et par conséquent sur ses performances. A partir de ces informations, les paramètres du correcteur sont sélectionnés tels que toutes les spécifications soient atteintes. Bien que, dans beaucoup de cas, cette procédure donne directement les résultats escomptés, il faut très souvent la répéter plusieurs fois car certains paramètres interagissent entre eux, et influent sur le comportement global. Par exemple, une valeur particulière d'un paramètre peut être choisie de sorte que le dépassement soit satisfait, mais en essayant de varier la valeur d'un autre paramètre pour obtenir le temps de montée exigé, le dépassement n'est plus acceptable. Il devient clair que, plus il y a de spécifications, plus il y a de paramètres du correcteur, et plus compliquée devient la conception.

Les correcteurs industriels les plus utilisés peuvent être classés, selon leurs actions de correction, de la manière suivante :

- Correcteur à action proportionnelle (P)
- Correcteur à action intégrale (I)
- Correcteur à actions proportionnelle et intégrale (PI)
- Correcteur à action dérivée (D)
- Correcteur à actions proportionnelle et dérivée (PD)
- Correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

La majorité de ces systèmes utilisent l'électricité ou un fluide sous pression tel que l'huile ou l'air comme source d'énergie. Ils sont également classés en fonction du type d'énergie utilisée dans l'opération (pneumatique, hydraulique, ou électrique) et choisis selon la nature du système à commander (ou à asservir) et selon les conditions d'opération (considérations de sécurité, de coût, de fiabilité, de précision, de poids, et de dimension).

7- 2 - Correction en cascade ou série

7- 2.1 - Principes généraux

Si, théoriquement, la place du correcteur dans le schéma global de principe importe peu puisqu'il modifie globalement la fonction de transfert en boucle ouverte, pratiquement, on ne peut pas le mettre n'importe où.

En effet, à l'extrémité de la chaîne d'action, on rencontre les organes de forte puissance. Donc, pour des raisons d'économie, il serait inopportun de placer un correcteur à cet endroit.

D'autre part, par la chaîne de retour transitent des signaux d'information provenant généralement d'organes de mesure. Donc, il sera possible de placer un correcteur dans cette chaîne. Il ne devra cependant pas trop modifier la sortie.

Par conséquent, en général, les correcteurs en cascade se montent soit à la sortie du comparateur dans la chaîne directe (avant amplification), soit dans la chaîne de retour.

Il ne faut pas perdre de vue que les correcteurs que nous allons introduire ne sont que des réalisations imparfaites. En effet, compte-tenu des performances à atteindre, on devra faire la synthèse d'un système connu mathématiquement. Or, dans bien des cas, sa réalisation pratique est impossible ; on doit se contenter de système ayant des caractéristiques approchant celles du modèle dans une zone de fréquence donnée. Pour les autres domaines, le comportement du système réel peut-être très différent de celui du modèle. On devra donc tenir compte de ces caractéristiques lorsqu'on insérera le correcteur dans la chaîne.

Pour déterminer le type de correcteur à utiliser et la valeur des paramètres à adopter, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- soit considérer les réponses temporelles et analyser les performances statiques et dynamiques du système avant et après compensation.
- Soit, à partir de la courbe de Nyquist du système compensé et par comparaison avec celle que l'on doit obtenir, en déduire la structure et les paramètres du compensateur,
- soit procéder de la même manière, mais avec le diagramme asymptotique de Bode,
- soit utiliser le lieu d'Evans, le correcteur introduisant de nouveaux pôles et racines.

Dans la majorité des exemples utilisés jusque là, le correcteur a été un simple amplificateur avec un gain constant K . Ce type d'action de commande est connu sous le nom de correction proportionnelle, puisque le signal de commande $u(t)$ à la sortie du correcteur est simplement proportionnel au signal à son entrée $\varepsilon(t)$.

Il est également possible d'utiliser la dérivée ou l'intégrale du signal d'entrée $\varepsilon(t)$, en addition avec l'action proportionnelle. Par conséquent, nous pouvons considérer, plus généralement, le correcteur comme étant un ensemble de composants tels que des comparateurs (additionneurs ou soustracteurs), des amplificateurs, des atténuateurs, des dérivateurs et des intégrateurs. La tâche du concepteur est alors de

déterminer lesquels de ces composants sera utilisé, dans quelles proportions, et la manière avec laquelle ils sont connectés.

Par exemple, l'un des correcteurs les plus connus et les plus utilisés en pratique est le correcteur PID. Les actions intégrale et dérivée du PID ont des implications individuelles de performance et leur utilisation nécessite une bonne compréhension des effets de chaque élément de base.

Pour maîtriser rapidement ce correcteur PID, considérons, séparément, chacune des actions P, I, PI, D, PD.

7- 2.2 - Correcteur à action proportionnelle (P)

7- 2.2.a - Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \quad (7 - 1)$$

c'est-à-dire,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \quad (7 - 2)$$

avec K_p appelé "gain proportionnel"

Quelques soient le mécanisme et la source d'énergie utilisés, le correcteur proportionnel est essentiellement un amplificateur à gain variable. Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7-7.

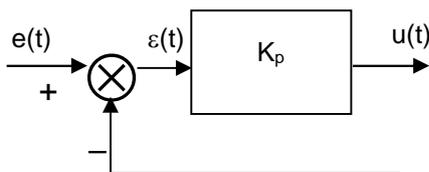


Fig. 7-7 : Correction P.

La figure 7-8 donne la réponse indicielle du correcteur P.

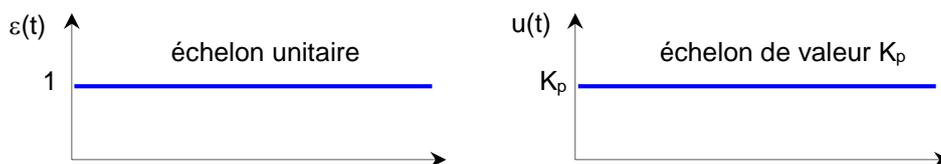


Fig. 7-8 : Entrée et sortie du correcteur P.

La figure 7-9 donne le diagramme de Bode du correcteur P.

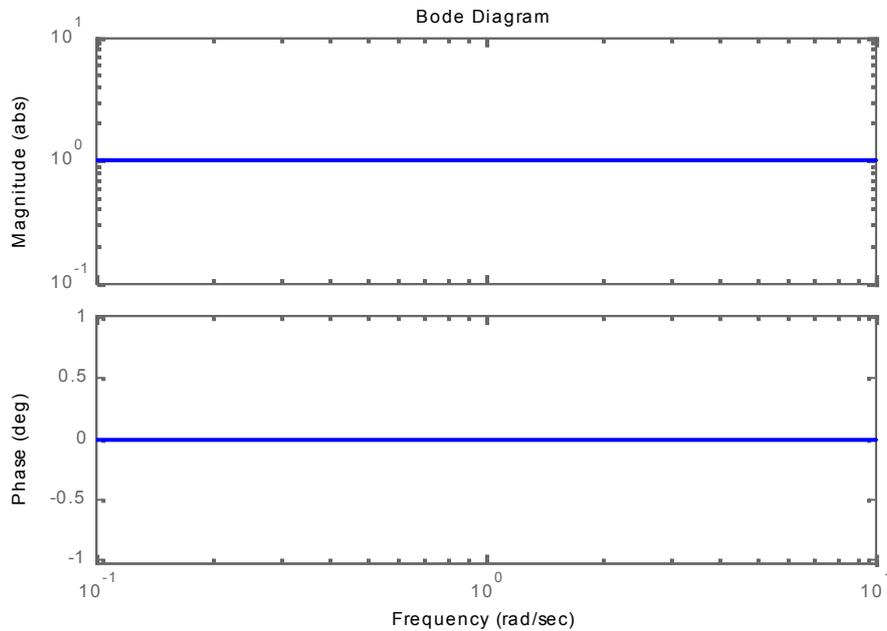


Fig. 7–9 : Diagramme de Bode du Correcteur P.
(représenté pour $K_p=1$)

7- 2.2.b - Effet

L'action proportionnelle P crée un signal de commande $u(t)$ proportionnel au signal d'erreur $\varepsilon(t)$. Elle agit donc principalement sur le gain du système asservi et permet d'améliorer notablement la précision.

L'action proportionnelle :

- entraîne une augmentation du gain, d'où une diminution de l'erreur statique (amélioration de la précision), mais
- augmente la bande passante du système, ce qui
- améliore la rapidité du système et,
- augmente l'instabilité du système.

Le correcteur proportionnel P n'est généralement pas utilisé seul. On verra que tout correcteur possède au moins l'action proportionnelle.

7- 2.2.c - Réalisation pratique

Une réalisation pratique de ce correcteur en utilisant des circuits passifs et actifs est montrée sur la figure 7–10.

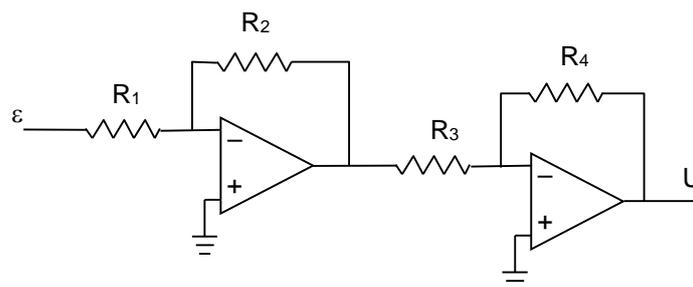


Fig. 7–10 : Réalisation du correcteur P avec 2 amplificateurs opérationnels.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = K_p$$

avec $K_p = R_2 / R_1$ si $R_4 = R_3$

Le circuit de la figure 7-10 utilise 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur, avec un gain de valeur 1 en prenant $R_4 = R_3$).

7- 2.2.d - Exemple

La figure 7-11 montre le schéma fonctionnel d'un exemple de correction Proportionnelle.

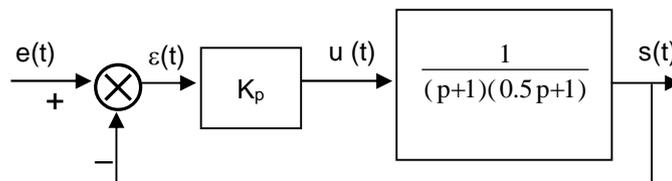


Fig. 7-11 : Exemple de correction P.

Pour différentes valeurs de K_p :

- les réponses indicielles $s(t)$ de la FTBF du système corrigé sont reportées sur la figure 7-12,
- les diagrammes de Bode et de Nyquist de la FTBO du système corrigé sont montrées, respectivement, sur les figures 7-13 et 7-14.

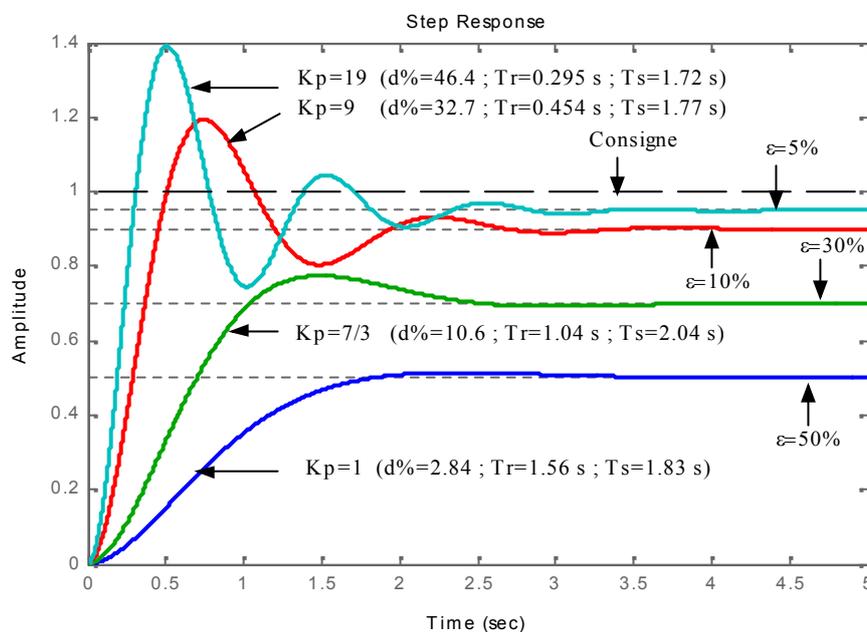


Fig. 7-12 : Correction P.

Réponses indicielles pour différentes valeurs de K_p

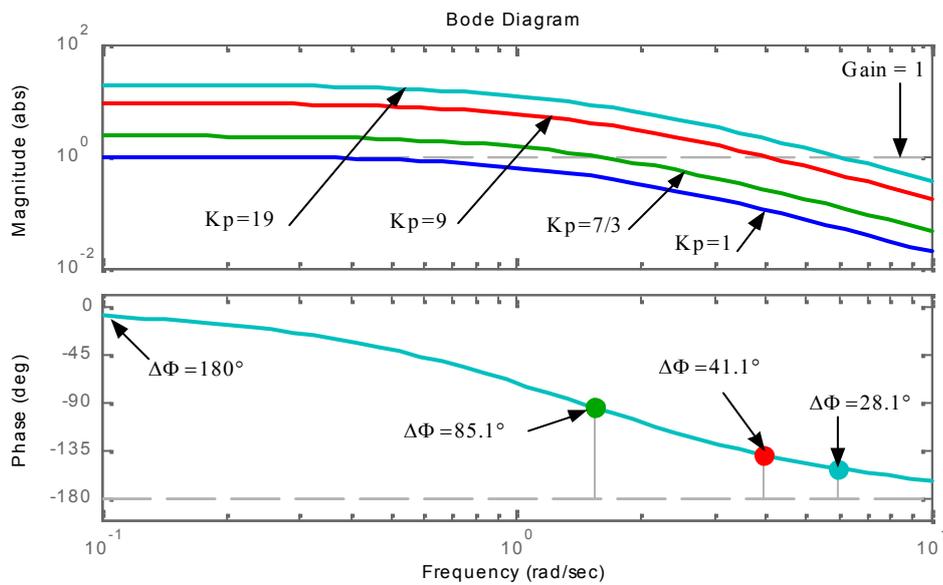


Fig. 7-13 : Correction P.

Diagrammes de Bode de la FTBO, pour différentes valeurs de K_p

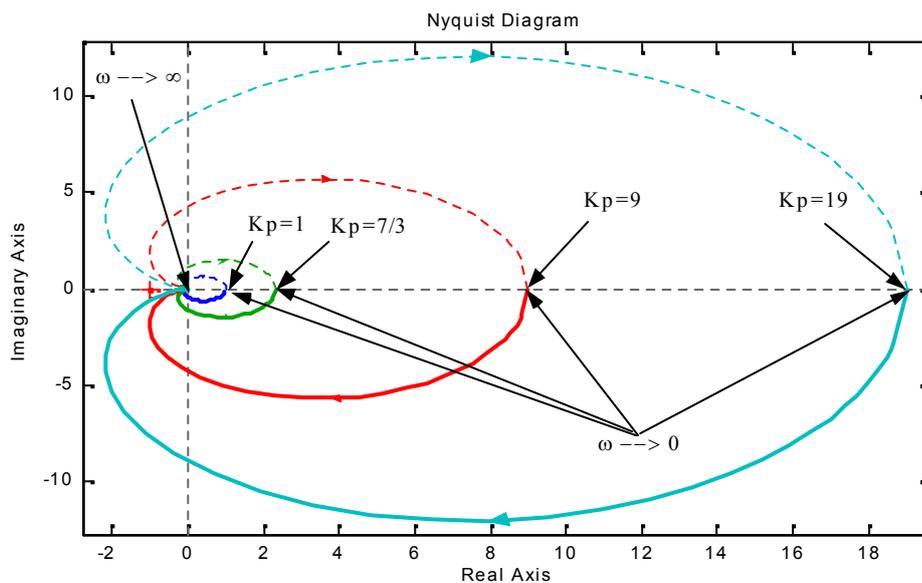


Fig. 7-14 : Correction P.

Lieux de Nyquist de la FTBO, pour différentes valeurs de K_p

On constate que l'augmentation de K_p , entraîne :

- une amélioration de l'erreur statique,
- une décroissance du temps de montée,
- une faible amélioration du temps d'établissement,
- mais également une diminution de la marge de phase et une augmentation du dépassement (augmentation de l'instabilité du système).

La figure 7–15 représente le lieu d'Evans du système corrigé. Elle montre que les 2 pôles en boucle fermée sont réels jusqu'à $K_p = 1/8$, et qu'à partir de cette valeur, ils deviennent complexes conjugués, donnant lieu à des réponses oscillatoires plus ou moins amorties.

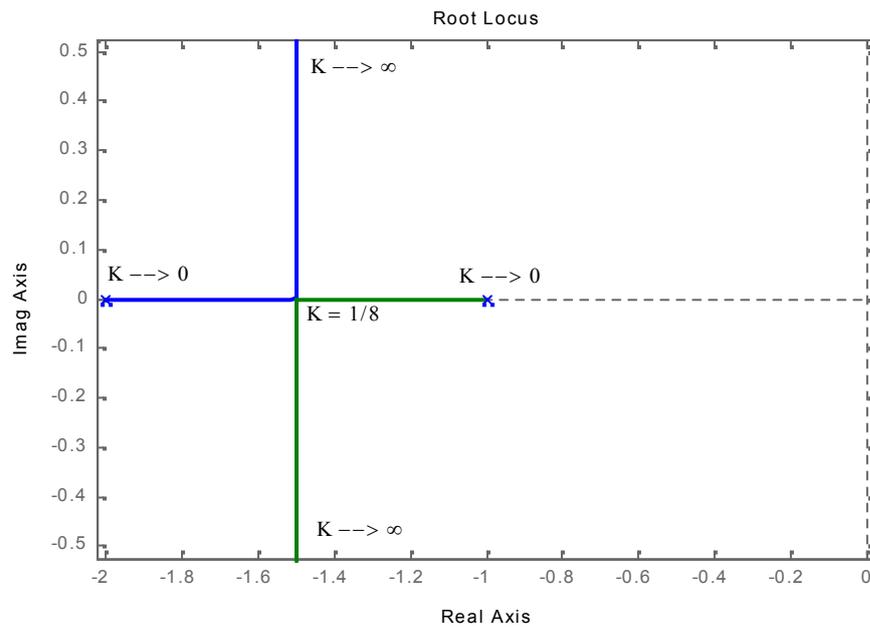


Fig. 7–15 : Correction P.

Lieu d'Evans, avec variation continue du gain.

7- 2.3 - Correcteur à action intégrale (I)

7- 2.3.a - Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i \varepsilon(t) \quad (7 - 3)$$

ou encore

$$u(t) = K_i \int_0^t \varepsilon(t).dt \quad (7 - 4)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_i}{p} = \frac{1}{T_i p} \quad (7 - 5)$$

avec

K_i appelé " *gain intégral* "

T_i appelée " *constante de temps d'intégration* "

Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7–16.

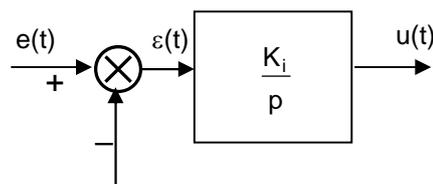


Fig. 7–16 : Correction I.

La figure 7–17 donne la réponse indicielle du correcteur Intégrale.

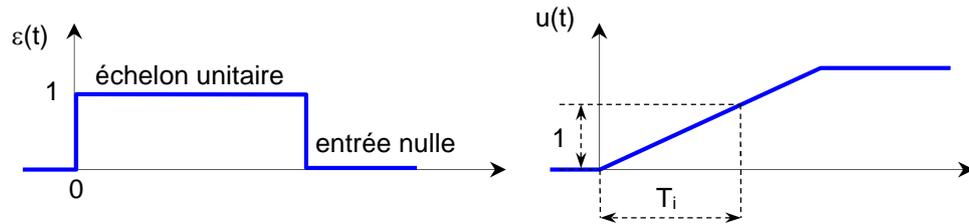


Fig. 7–17 : Entrée et sortie du correcteur I.

La figure 7–18 donne le diagramme de Bode du correcteur.

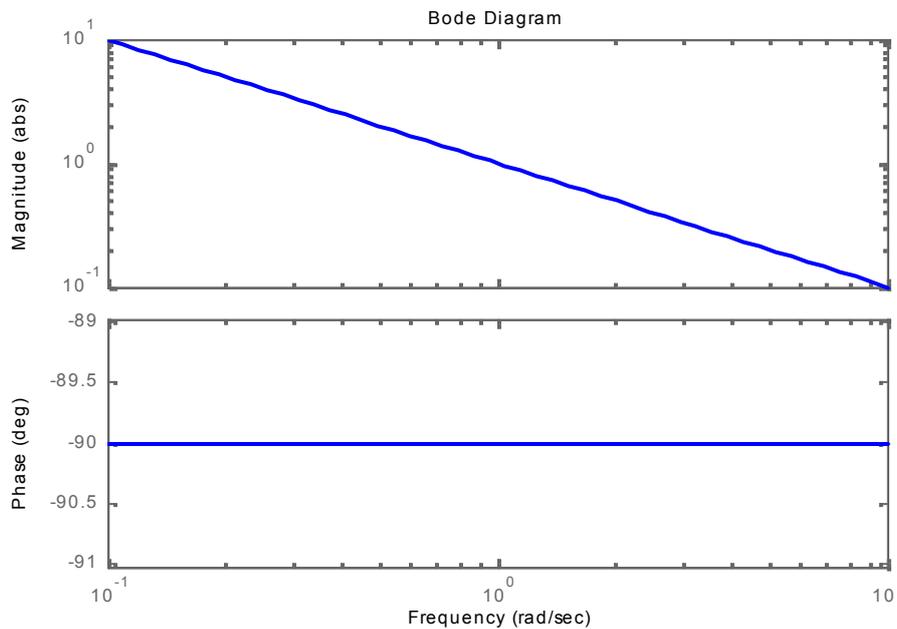


Fig. 7–18 : Diagramme de Bode du Correcteur I.
(représenté pour $K_i=1$)

7- 2.3.b - Effet

L'intérêt principal de ce correcteur est d'ajouter dans la chaîne de commande une intégration. Nous savons que la présence d'une intégration dans la FTBO augmente la classe du système et réduit ou annule, selon le type d'entrée, l'erreur statique du système.

L'action intégrale pure :

- *améliore la précision en réduisant ou annulant l'erreur statique, mais*
- *introduit un déphasage de -90° qui risque de déstabiliser le système (diminution de la marge de phase).*

Le correcteur à action exclusivement Intégrale n'est pratiquement jamais utilisé, en raison de sa lenteur et de son effet déstabilisant. Il est, en général, associé au correcteur Proportionnel.

7- 2.3.c - Réalisation pratique

Une réalisation pratique de ce correcteur en utilisant des circuits passifs et actifs est montrée sur la figure 7–19.

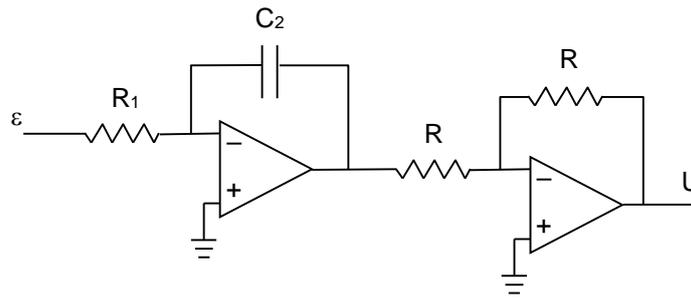


Fig. 7–19 : Réalisation du correcteur I avec 2 amplificateurs opérationnels.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{R_1 C_2 p} = \frac{K_i}{p} \quad \text{avec} \quad K_i = \frac{1}{R_1 C_2}$$

Le circuit de la figure 7–19 utilise 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur avec un gain de valeur unitaire).

7- 2.4 - Correcteur à actions proportionnelle et intégrale (PI)

7- 2.4.a - Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_i \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt \quad (7 - 6)$$

c'est-à-dire,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_p}{p} \left(p + \frac{K_i}{K_p} \right) \quad (7 - 7)$$

ou encore,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p p} \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_n p} \right) \quad (7 - 8)$$

avec

- K_p "gain proportionnel",
- K_i "gain intégral",
- $T_i = \frac{1}{K_i}$ "constante de temps d'intégration",
- $T_n = \frac{K_p}{K_i} = K_p T_i$ "dosage de corrélation d'intégrale"

Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7–20.

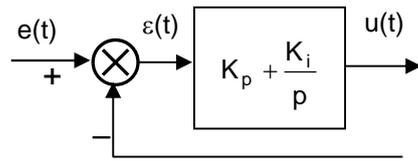


Fig. 7-20 : Correction PI.

La figure 7-21 donne la réponse indicielle du correcteur PI.

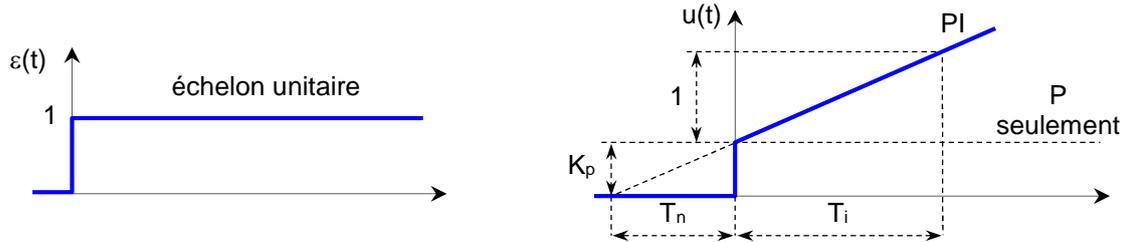


Fig. 7-21 : Entrée et sortie du correcteur PI.

La figure 7-22 donne le diagramme de Bode du correcteur PI.

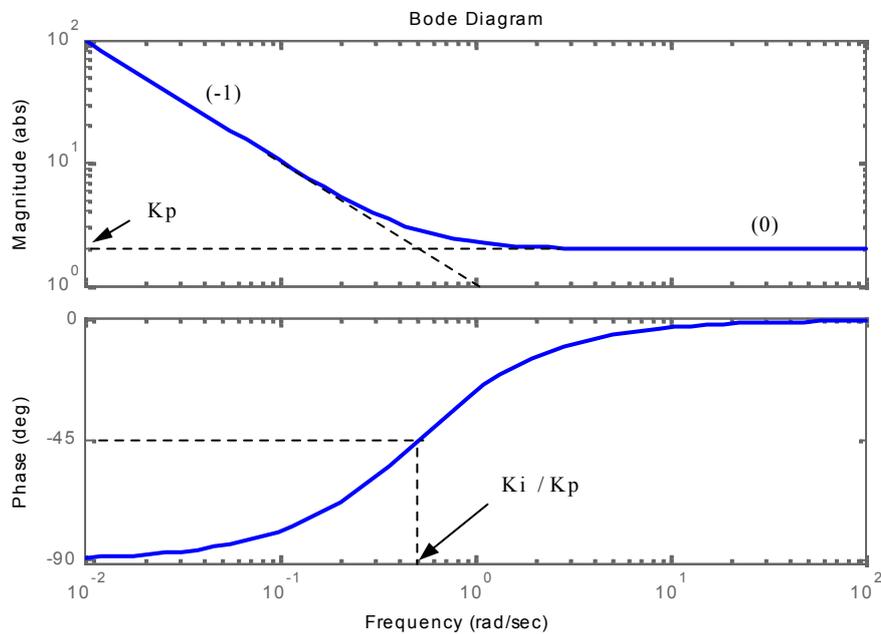


Fig. 7-22 : Diagramme de Bode du Correcteur PI.
(représenté pour $K_p=2$, $K_i=1$)

7- 2.4.b - Effet

La réponse indicielle montre qu'un correcteur PI assure une transmission instantanée du signal d'erreur ε , suivi d'une intégration de ce signal.

- Ce correcteur sera utilisé chaque fois qu'une erreur permanente doit être annulée ou minimisée, c'est à dire une amélioration de la précision du système. En effet, il introduit une augmentation du gain global du système aux basses fréquences.
- Par ailleurs, le correcteur PI a un effet déstabilisant en raison du pôle à l'origine (déphasage supplémentaire entre 0 et -90°). Mais, Le zéro supplémentaire introduit tend à minimiser cette instabilité.
- Il est recommandé de placer le zéro $\left(\frac{-K_i}{K_p}\right)$ du correcteur aux basses fréquences de sorte que le déphasage supplémentaire introduit par le correcteur n'affecte pas beaucoup le déphasage global du système corrigé. Cependant, s'il est très proche de l'origine, son effet sera compensé par le pôle à l'origine.
- K_p sera choisi de manière à modifier, éventuellement, la fréquence de coupure du système corrigé et donc sa marge de phase.
- Très souvent, le zéro $\left(\frac{-K_i}{K_p}\right)$ est choisi de manière à compenser la constante de temps dominante du système initial de sorte que la boucle fermée gagne en rapidité.

K_p et K_i sont tous deux réglables. K_i ajuste l'action intégrale, tandis que K_p affecte à la fois les actions intégrale et proportionnelle.

7- 2.4.c - Réalisations pratiques

- Une première réalisation de ce correcteur en utilisant des circuits passifs et actifs est montrée sur la figure 7-23.

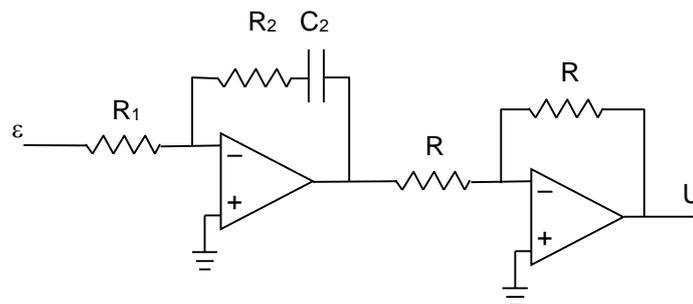


Fig. 7-23 : Réalisation du correcteur PI avec 2 amplificateurs opérationnels.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C_2 p} = K_p + \frac{K_i}{p} \quad \text{avec} \quad K_p = R_2 / R_1 \quad \text{et} \quad K_i = \frac{1}{R_1 C_2}$$

L'avantage du circuit de la figure 7-23 est qu'il n'utilise que 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur avec un gain de valeur 1). Cependant, ce circuit ne permet pas une sélection indépendante de K_p et K_i , puisque ceux-ci dépendent tous les deux de R_1 .

- Une deuxième réalisation, avec 3 amplificateurs, cette fois-ci, est celle de la fig. 7-24.

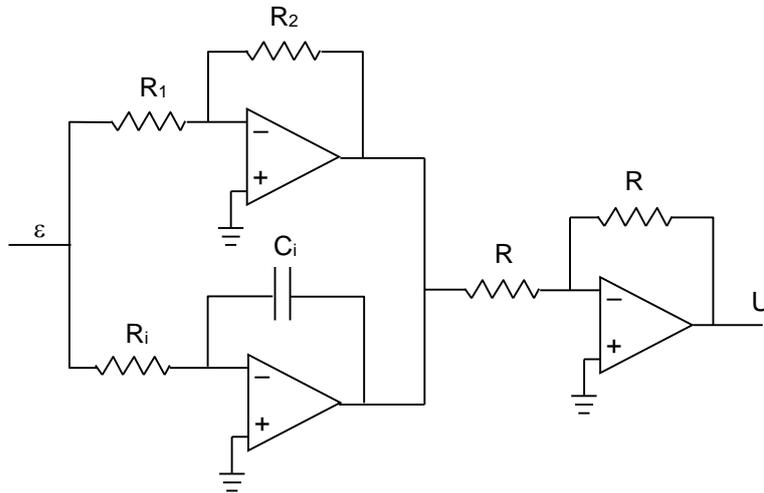


Fig. 7–24 : Réalisation du correcteur PI avec 3 amplificateurs opérationnels.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i p} = K_p + \frac{K_i}{p} \quad \text{avec} \quad K_p = R_2 / R_1 \quad \text{et} \quad K_i = \frac{1}{R_i C_i}$$

Pour ce circuit, K_p et K_i peuvent être réglés séparément. Cependant, pour un tel circuit, K_i est inversement proportionnel à la valeur du condensateur. Malheureusement, en général, les corrections PI exigent de faibles valeurs de K_i . Cela conduit à de larges valeurs de C_i , ce qui n'est pas très pratique.

7- 2.4.d - Exemple

La figure 7–25 montre le schéma fonctionnel d'un exemple de correction PI.

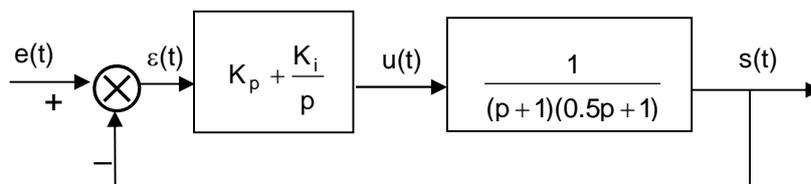


Fig. 7–25 : Exemple de correction PI.

Nous fixons $K_p = 5$, et nous varions la valeur de K_i .

Les figures 7–26, 7–27 et 7–28 donnent les réponses indicielles $s(t)$ pour, respectivement, $K_i = 0$ à 2.5, $K_i = 2.5$ à 5, et $K_i = 5$ à 15.

Les figures 7–29, 7–30 et 7–31 donnent, respectivement, le diagramme de Bode, le lieu de Black-Nichols, et le lieu de Nyquist de la FTBO corrigée.

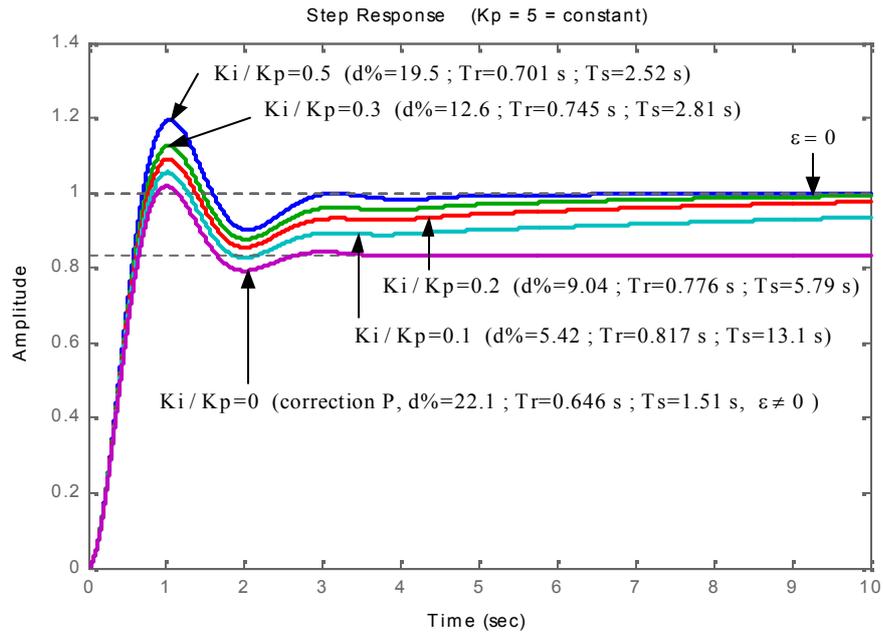


Fig. 7-26 : Exemple de Correction PI.
 Réponses indicielles pour $K_i = 0$ à 2.5.
 $K_p = 5$ (constant)

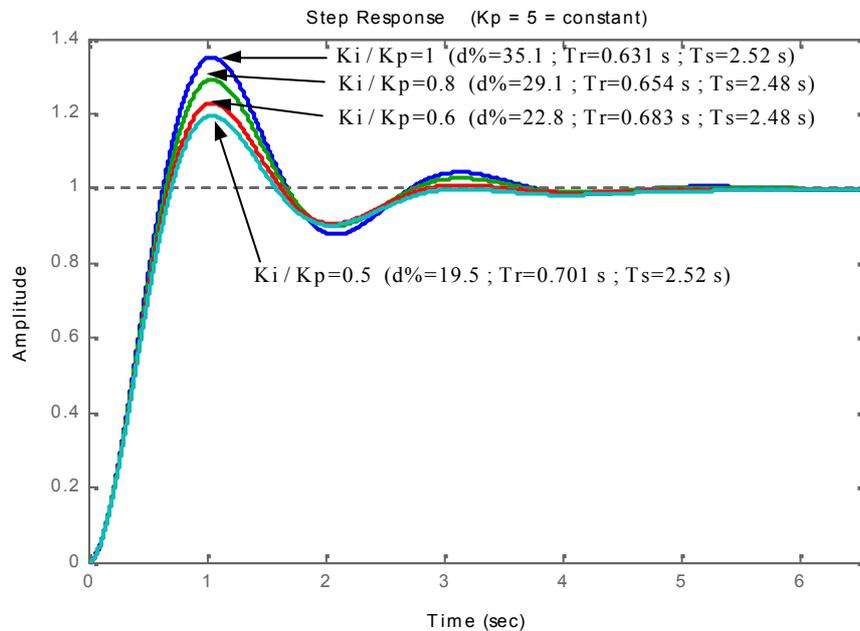


Fig. 7-27 : Exemple de Correction PI.
 Réponses indicielles pour $K_i = 2.5$ à 5.
 $K_p = 5$ (constant)

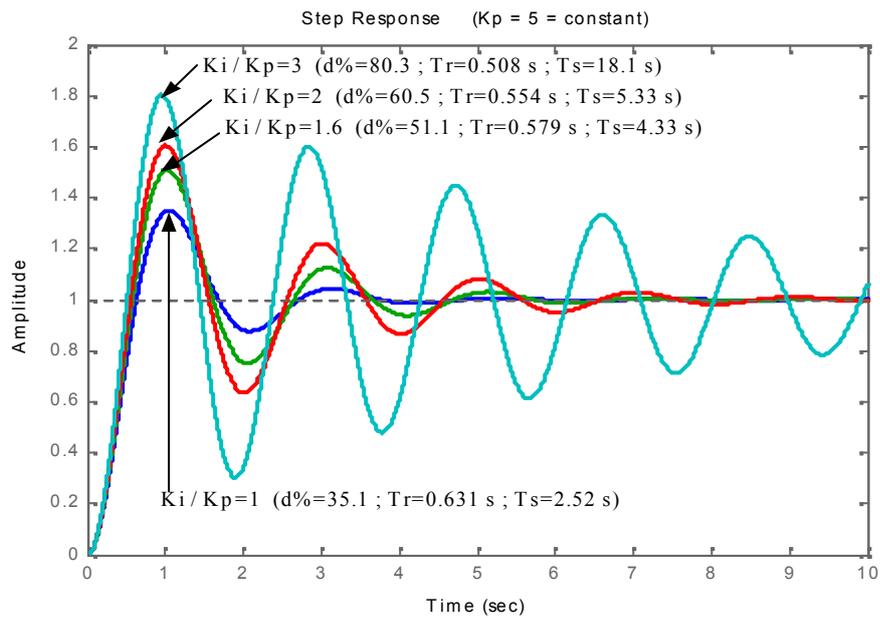


Fig. 7-28 : Exemple de Correction PI.
Réponses indicielles pour $K_i = 5$ à 15.
 $K_p = 5$ (constant)

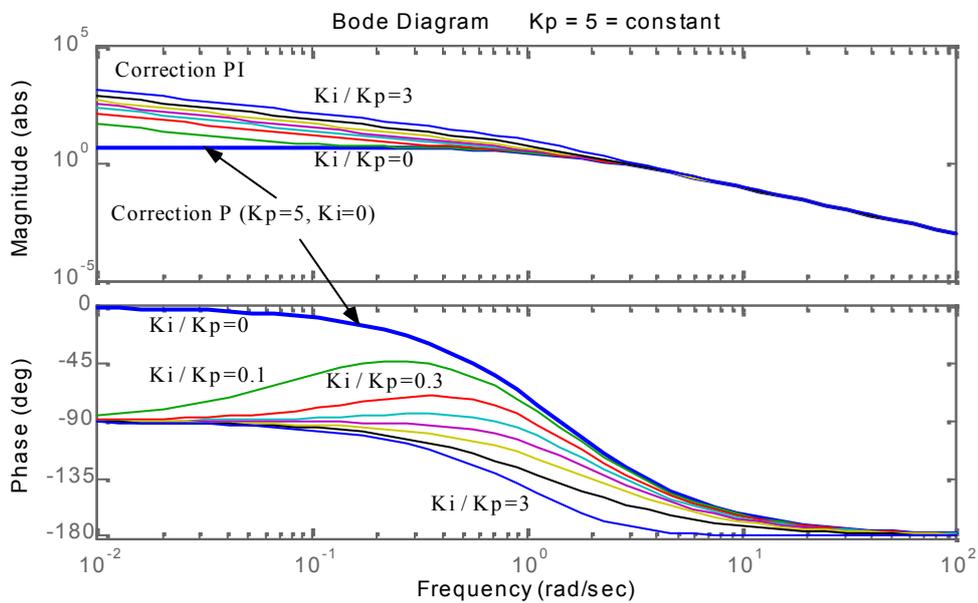


Fig. 7-29 : Exemple de Correction PI.
Diagrammes de Bode de la FTBO, pour différentes valeurs de K_i
 $K_p = 5$ (constant)

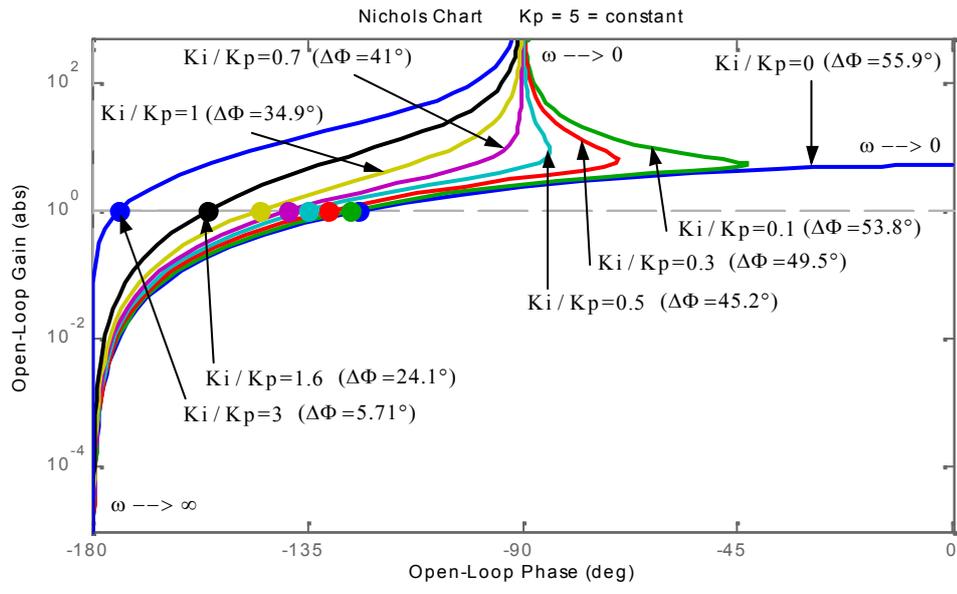


Fig. 7-30 : Correction PI.
Lieux de Black de la FTBO, pour différentes valeurs de K_i
 $K_p = 5$ (constant)

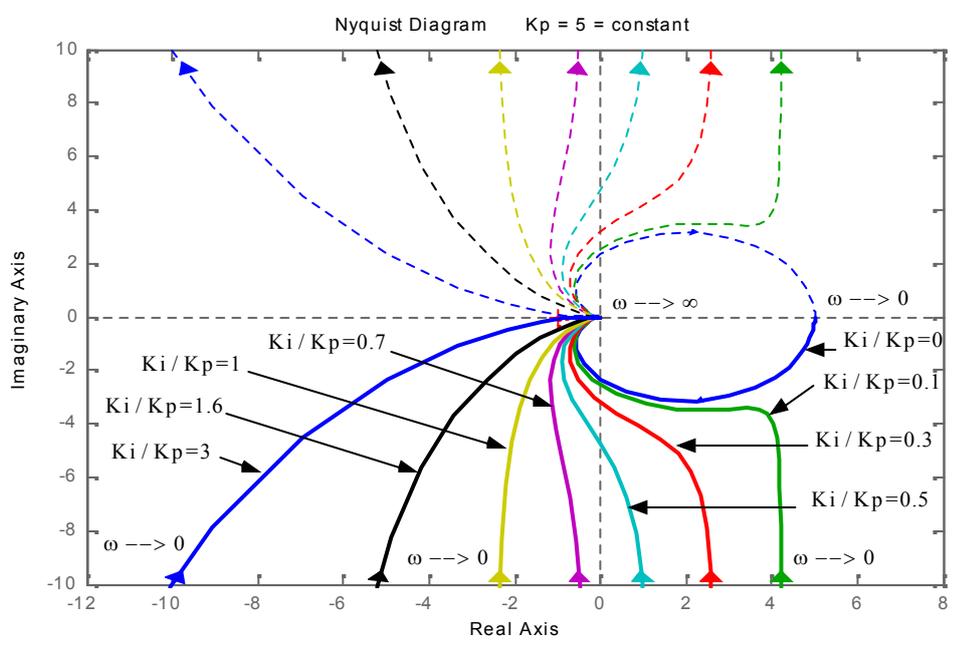


Fig. 7-31 : Correction PI.
Lieux de Nyquist de la FTBO, pour différentes valeurs de K_i
 $K_p = 5$ (constant)

On constate que l'augmentation de K_i , entraîne :

- une amélioration de la précision par annulation de l'erreur statique,
- une décroissance du temps de montée,
- mais également une augmentation du temps d'établissement (correction lente),
- une augmentation du dépassement et une diminution de la marge de phase (augmentation de l'instabilité du système).

Dans le cas de l'exemple étudié, le système initial est composé de 2 pôles (-1 et -2). Le correcteur PI a un zéro qu'il est préférable de positionner le plus proche possible du pôle à l'origine. En effet :

- si le zéro est exactement à l'origine $\left(\frac{-K_i}{K_p} = 0\right)$, il compense le pôle qui s'y trouve. Cela revient à faire une correction de type proportionnel en faisant varier K_p . L'erreur statique est, alors, non nulle pour une entrée échelon. Le système n'a que 2 pôles en boucle fermée.
- d'une manière générale, plus le zéro se déplace vers la gauche du plan complexe, moins importante est la marge de phase du système corrigé (l'apport négatif de la phase du correcteur est de plus en plus important), plus importante sont les oscillations de la sortie, et plus de temps met le système pour s'amortir.

7- 2.5 - Correcteur à action dérivée (D)

7- 2.5.a - Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (7 - 9)$$

c'est-à-dire,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_d \cdot p = T_d \cdot p \quad (7 - 10)$$

avec K_d appelé " gain dérivé ",
 T_d appelée " constante de temps de dérivation "

Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7-22.

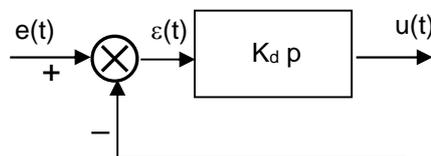


Fig. 7-22 : Correction à action dérivée pure (D)

La figure 7–21 donne les réponses à un échelon et à une rampe du correcteur D.

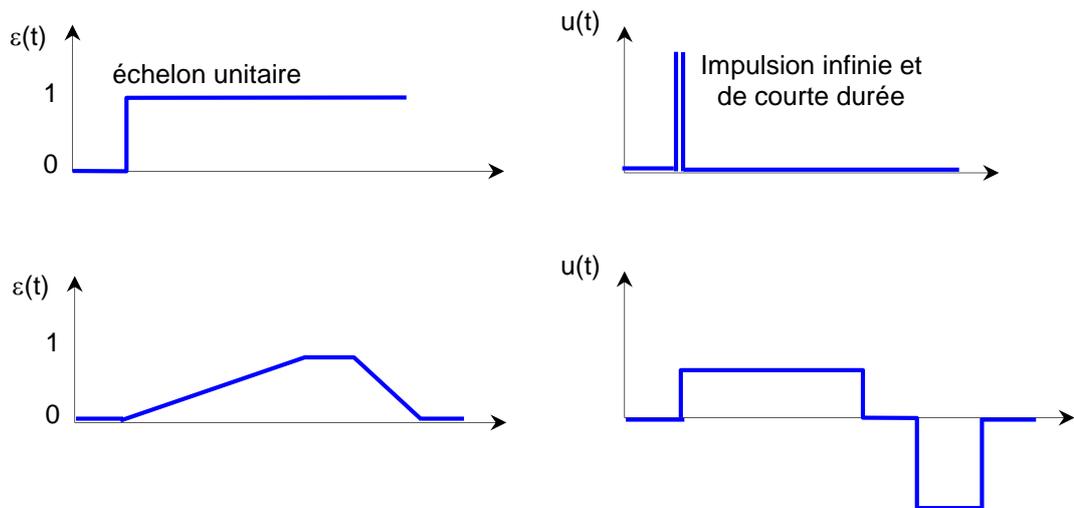


Fig. 7–21 : Entrée et sortie du correcteur à action dérivée (D)

La figure 7–22 donne le diagramme de Bode du correcteur D.

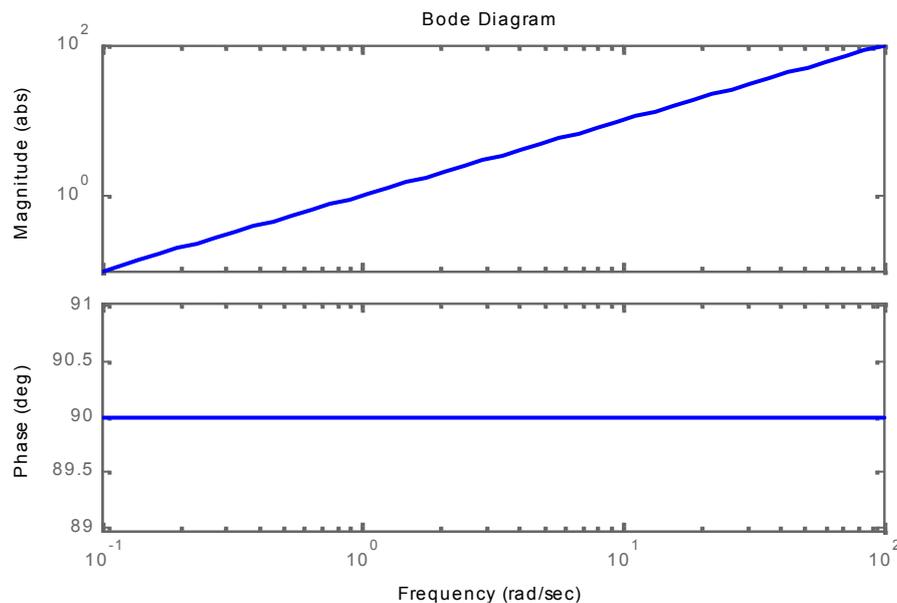


Fig. 7–22 : Diagramme de Bode du Correcteur D.
(représenté pour $K_d=1$)

7- 2.5.b - Effet

La réponse indicielle montre qu'un correcteur à action exclusivement dérivée ne permet pas la transmission d'un signal. L'action dérivée ne peut donc être utilisée seule. On fait appel à elle lorsque le signal de commande u doit être particulièrement efficace. En effet, ce correcteur permet de faire intervenir la dérivée du signal d'erreur ; il sera d'autant plus actif que la variation de $\varepsilon(t)$ est rapide.

L'action dérivée pure :

- *améliore la stabilité du système par l'introduction d'un déphasage supplémentaire de + 90° (augmentation de la marge de phase),*
- *mais fait diminuer la précision du système,*
- *et amplifie les bruits de hautes fréquences.*

Le correcteur à action exclusivement dérivée n'est pratiquement jamais utilisé. Il est en général associé au correcteur Proportionnel.

7- 2.5.c - Réalisation pratique

Une réalisation pratique de ce correcteur en utilisant des circuits passifs et actifs est montrée sur la figure 7-23.

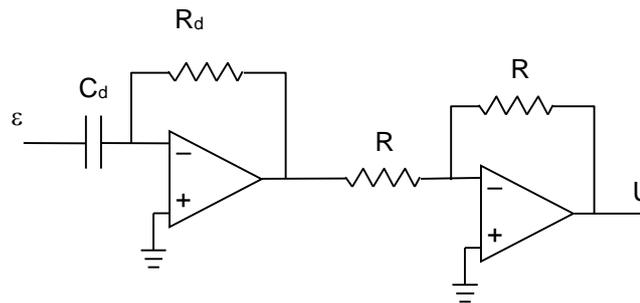


Fig. 7-23 : Réalisation du correcteur D avec 2 amplificateurs opérationnels

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = R_d C_d p = K_d p \quad \text{avec} \quad K_d = R_d C_d$$

1). Le circuit de la figure 7-23 utilise 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur avec un gain de valeur

7- 2.6 - Correcteur à actions proportionnelle et dérivée (PD)

7- 2.6.a - Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$

$$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (7-11)$$

c'est-à-dire,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + K_d p \quad (7-12)$$

ou encore,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} p \right) = K_p (1 + T_d p) \quad (7-13)$$

avec K_p "gain proportionnel",

K_d "gain dérivé"

$$T_d = \frac{K_d}{K_p} \text{ " constante de temps de dérivation "}$$

Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7-24.

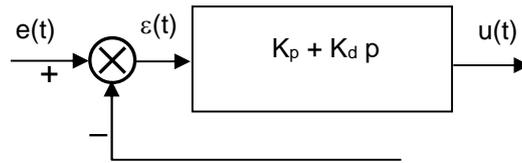


Fig. 7-24 : Correction PD

La figure 7-25 donne les réponses à un échelon et à une rampe.

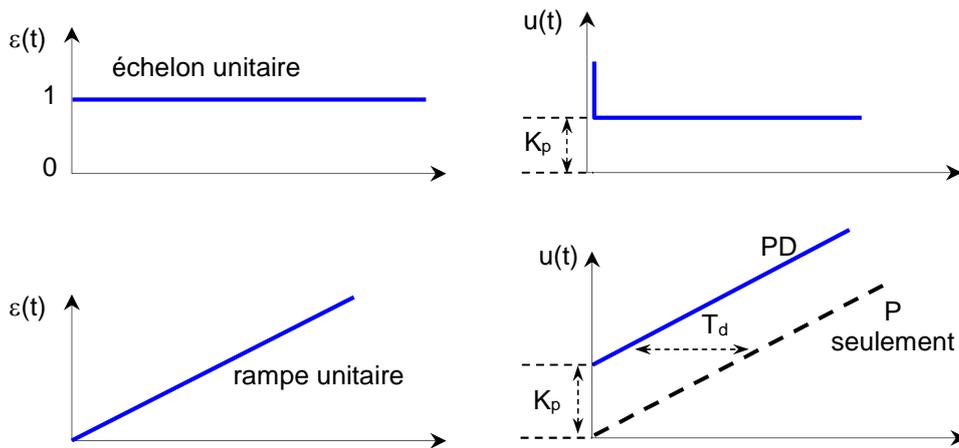


Fig. 7-25 : Entrée et sortie du correcteur PD

La figure 7-26 donne le diagramme de Bode du correcteur PD.

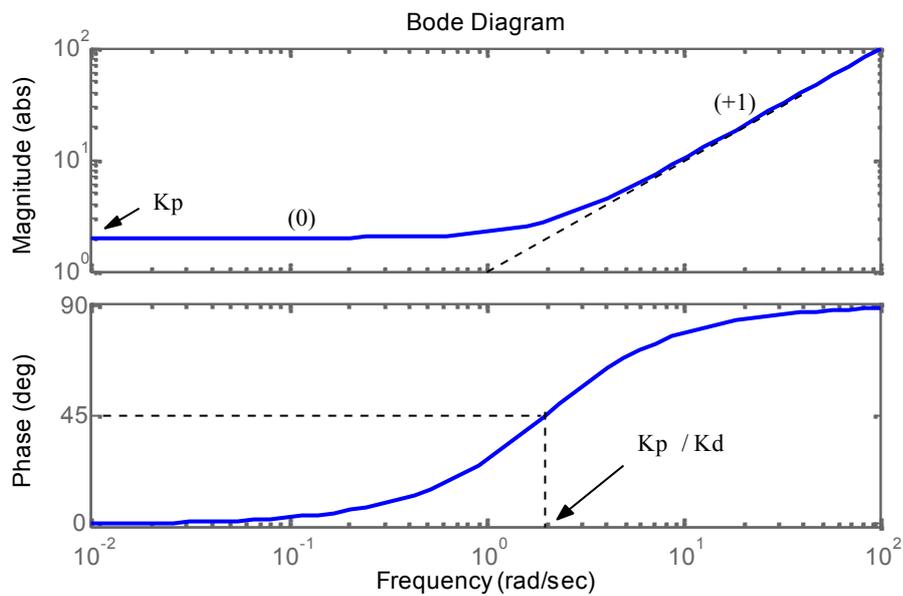


Fig. 7-26 : Diagramme de Bode du Correcteur PD.
(représenté pour $K_p=2$, $K_d=1$)

7- 2.6.b - Effet

La réponse indicielle montre qu'un correcteur à action proportionnelle et dérivée (PD) assure une transmission instantanée du signal d'erreur $\varepsilon(t)$ augmenté de sa dérivée $d\varepsilon(t)/dt$. On verra qu'un tel correcteur est à utiliser à chaque fois que le système corrigé doit être plus rapide.

La correction dérivée peut être vue autrement : Puisque $d\varepsilon(t)/dt$ représente la pente de $\varepsilon(t)$, la correction PD est essentiellement une commande anticipative. Connaissant la pente, le correcteur peut anticiper la direction de l'erreur et l'utilise pour mieux contrôler le processus. Normalement, dans les systèmes linéaires, si la pente de $\varepsilon(t)$ ou $s(t)$ est due à un échelon d'entrée important, il apparaît un dépassement conséquent. La commande dérivée mesure la pente instantanée de $\varepsilon(t)$, prédit un grand dépassement, et effectue la correction nécessaire avant que le dépassement n'apparaisse.

Intuitivement, la commande dérivée n'affecte l'erreur statique du système que si cette erreur varie avec le temps. Si l'erreur statique est constante, sa dérivée, par rapport au temps, est nulle, l'élément de dérivation du correcteur ne produit aucune entrée pour le processus. Mais si l'erreur statique croît avec le temps, $u(t)$ est de nouveau développé proportionnellement à $d\varepsilon(t)/dt$, ce qui réduit l'amplitude de l'erreur. L'équation 7-13 montre également clairement que le correcteur PD n'altère pas la classe du système, l'erreur statique d'un système à retour unitaire dépendant directement de cette classe.

L'intérêt principal de la correction dérivée est son effet stabilisant. En régime dynamique, elle s'oppose aux grandes variations de l'erreur (donc aux oscillations), et permet donc de stabiliser le système et d'améliorer le temps de réponse.

K_p et T_d sont tous deux réglables. T_d ajuste l'action dérivée, tandis que K_p affecte à la fois les actions dérivée et proportionnelle.

L'avance de phase produite par ce correcteur peut être utilisée pour améliorer la marge de phase du système asservi. Malheureusement, son gain pousse la fréquence de coupure vers les hautes fréquences.

Ainsi, l'utilisation du correcteur PD consiste à placer la fréquence de cassure du correcteur, $\omega = K_p / K_D$, de sorte que l'augmentation effective de la marge de phase ait lieu à la nouvelle fréquence de coupure.

Pour un système donné, il existe tout un domaine de valeurs optimales K_p / K_D pouvant améliorer l'amortissement du système. Une autre considération pratique entrant dans la sélection des valeurs de K_p et K_D est l'implantation physique du correcteur PD.

Par ailleurs, compte tenu de ses caractéristiques fréquentielles de filtre passe haut, le correcteur PD accroît, dans la majorité des cas, la bande passante du système et réduit le temps de montée de la réponse indicielle. L'inconvénient pratique de cet effet filtre passe haut, est l'accentuation des bruits de hautes fréquences provenant de l'entrée.

Récapitulatif des effets de l'action de correction PD :

- *Amélioration de l'amortissement et réduction du dépassement.*
- *Réduction du temps de montée et du temps d'établissement.*
- *Augmentation de la bande passante.*
- *Amélioration de la marge de phase et de la marge de gain.*
- *Possibilité d'accentuation des bruits aux hautes fréquences.*

7- 2.6.c - Réalisations pratiques

- Une première réalisation de ce correcteur en utilisant des circuits passifs et actifs est montrée sur la figure 7–27.

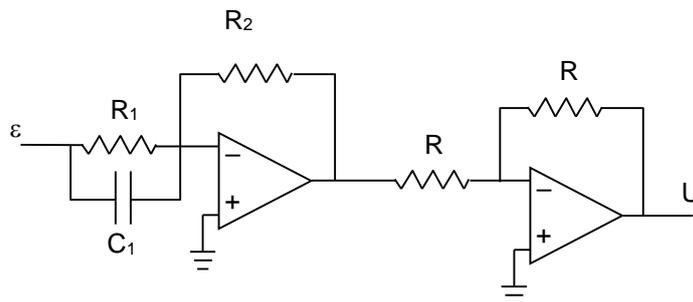


Fig. 7–27 : Réalisation du correcteur PD avec 2 amplificateurs opérationnels

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} + R_2 C_1 p = K_p + K_d p \quad \text{avec} \quad K_p = R_2 / R_1 \quad \text{et} \quad K_d = R_2 C_1$$

L'avantage du circuit de la figure 7–27 est qu'il n'utilise que 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur avec un gain de valeur 1). Cependant, ce circuit ne permet pas une sélection indépendante de K_p et K_d , puisque ceux-ci dépendent tous les deux de R_2 . D'autre part, une valeur importante de K_d exigerait une large valeur de C_1 , ce qui n'est pas très pratique.

- Une deuxième réalisation, avec 3 amplificateurs cette fois-ci, est celle de la fig. 7–28.

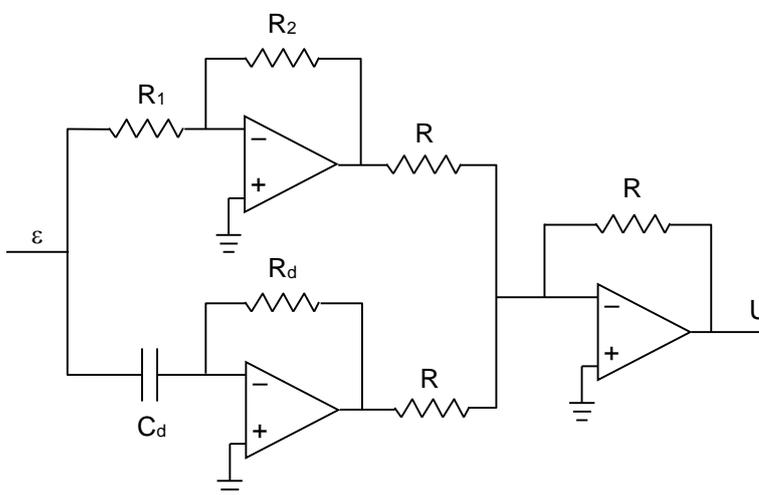


Fig. 7–28 : Réalisation du correcteur PD avec 3 amplificateurs opérationnels

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} + R_d C_d p = K_p + K_d p \quad \text{avec} \quad K_p = R_2 / R_1 \quad \text{et} \quad K_d = R_d C_d$$

Pour ce circuit, K_p et K_d peuvent être réglés séparément. Les valeurs importantes de K_d sont obtenues en jouant sur R_d et en maintenant C_d dans des proportions raisonnables.

7- 2.6.d - Exemple

La figure 7–29 montre le schéma fonctionnel d'un exemple de correction PD.

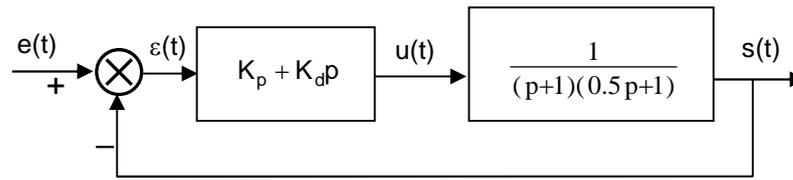


Fig. 7–29 : Exemple de correction PD

Nous fixons $K_p = 1$.

Pour différentes valeurs de K_d , la réponse indicielle $s(t)$ est reportée sur la figure 7–30.

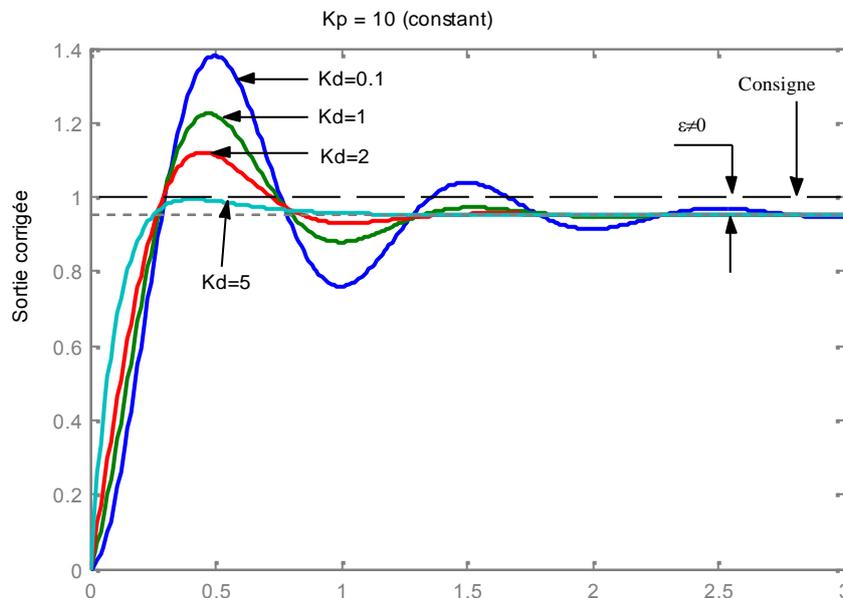


Fig. 7–30 : Exemple de Correction PD.

Réponses indicielles pour différentes valeurs de K_d .
 $K_p = 10$ (constant)

On constate que l'augmentation de K_d , entraîne :

- une diminution appréciable du dépassement (stabilisation du système),
- une amélioration du temps d'établissement,
- mais également une persistance de l'erreur statique,
- et peu d'influence sur le temps de montée.

7- 2.7 - Correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

7- 2.7.a - Principe

Le correcteur PID combine les actions des 3 correcteurs P, I et D.

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_i \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (7 - 14)$$

c'est-à-dire,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p \quad (7 - 15)$$

ou encore,
$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_p}{p} \left(\frac{K_d}{K_p} p^2 + p + \frac{K_i}{K_p} \right) \quad (7 - 16)$$

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} p + \frac{K_i}{K_p} \frac{1}{p} \right) = K_p \left(1 + T_d p + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (7 - 17)$$

avec K_p "gain proportionnel ",

K_i "gain intégral ",

K_d "gain dérivé "

$$T_d = \frac{K_d}{K_p} \text{ " constante de temps de dérivation "}$$

$$T_i = \frac{K_p}{K_i} \text{ " constante de temps d'intégration "}$$

Son schéma fonctionnel est celui de la fig. 7-31.

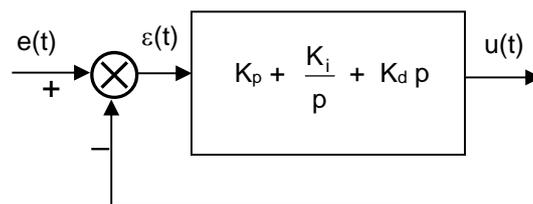


Fig. 7-31 : Correction à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

La figure 7–32 donne les réponses à un échelon et à une rampe.

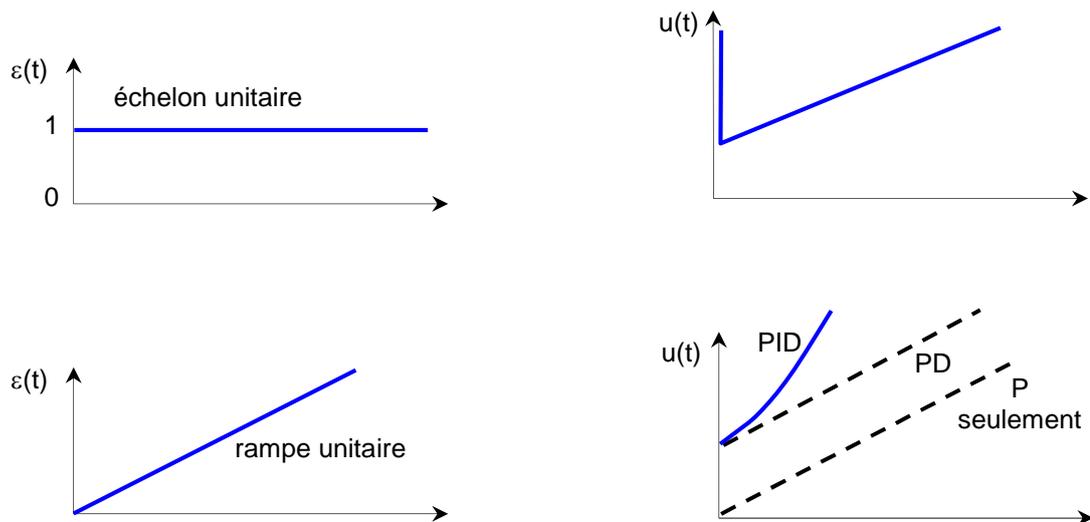


Fig. 7–32 : Entrée et sortie du correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

7- 2.7.b - Effet

La réponse indicielle montre qu'un correcteur PID assure une transmission instantanée du signal d'erreur $\varepsilon(t)$ augmenté de son intégrale et de sa dérivée. Ce correcteur, facile à réaliser, permet d'annuler le signal d'erreur statique ε_∞ et d'avoir une réponse relativement rapide et bien amortie. En effet, le correcteur PID, fait croître la classe du système d'une unité et introduit 2 zéros qui peuvent être utilisés pour améliorer la réponse transitoire (eq. 7–16). La méthode du lieu d'Evans peut être mise à profit pour localiser ces zéros dans le but de satisfaire un cahier des charges sur les régimes statique et dynamique.

Nous avons vu qu'un correcteur P (K_p) apporte de la rapidité au système en réduisant le temps de montée. il réduit également l'erreur statique, mais ne l'élimine pas. L'action intégrale (K_i) aura pour effet d'éliminer l'erreur statique. Elle ramène donc de la précision, mais dégrade la réponse transitoire. L'action dérivée (K_d) améliore la stabilité du système, réduit les dépassements et améliore le régime transitoire.

Les effets de chaque correcteur (K_p , K_i et K_d) sur la réponse en boucle fermée du système sont regroupés sur le tableau 7 –1 :

	Temps de montée	Dépassement	Temps d'établissement	Erreur statique
Si K_p croît	<i>Diminue</i>	<i>Augmente</i>	<i>(Peu de changements)</i>	<i>Diminue</i>
Si K_i croît	<i>Diminue</i>	<i>Augmente</i>	<i>Augmente</i>	<i>Éliminée</i>
Si K_d croît	<i>(Peu de changements)</i>	<i>Diminue</i>	<i>Diminue</i>	<i>(Peu de changements)</i>

Tableau 7–1 : Effets des correcteurs P, I, et D sur les régimes statique et dynamique du système en boucle fermée.

Il est à noter que ces corrélations ne sont pas exactement précises, car K_p , K_i et K_d sont dépendants les uns des autres. En fait, le changement de l'une de ces variables peut modifier l'effet de l'autre. Le tableau précédent n'est à utiliser que comme référence lorsqu'il s'agit de déterminer les valeurs de K_p , K_i et K_d .

Il existe des méthodes analytiques permettant de calculer les composantes du correcteur PID, mais elles sont assez complexes et sont peu utilisées. Des méthodes empiriques existent et permettent de faciliter amplement la détermination du correcteurs PID (méthode de Ziegler-Nichols, méthode de Chien-Hrones-Reswick,...). Certaines d'entre-elles seront étudiées en TP et TD.

Des méthodes pratiques de réglages permettent d'obtenir de bons résultats. Elles sont basées sur la connaissance des effets que procure chaque correcteur sur la réponse du système bouclé (tableau 7-1). Par ailleurs, ces méthodes font beaucoup intervenir l'expérience de l'opérateur dans ce domaine. Il n'y a pas de réglage unique permettant d'atteindre le cahier des charges, mais il est nécessaire de suivre quelques règles d'ajustement de ces correcteurs :

1. *Obtenir la réponse en boucle ouverte et déterminer ce qui est nécessaire d'améliorer.*
2. *Rajouter un correcteur P pour améliorer la rapidité du système : modifier K_p pour obtenir le temps de montée voulu.*
3. *Rajouter un correcteur I pour éliminer l'erreur statique : modifier K_i pour améliorer les performances en régime statique.*
4. *Rajouter un correcteur D pour réduire les dépassements et améliorer le temps d'établissement : modifier K_d pour améliorer les caractéristiques en régime transitoire.*
5. *Ajuster K_p , K_i et K_d jusqu'à obtenir les performances voulues.*

Finalement, il faut se rappeler qu'il n'est pas obligatoire d'insérer les 3 correcteurs dans un même système si cela n'est pas nécessaire. Si un correcteur PI donne des performances satisfaisantes pour la sortie, il n'est alors pas nécessaire de rajouter un correcteur D au système. Construire le correcteur aussi simplement que possible.

7- 2.7.c - Réalisations pratiques

- Une première réalisation de ce correcteur, en utilisant des circuits passifs et actifs, est montrée sur la figure 7-33.

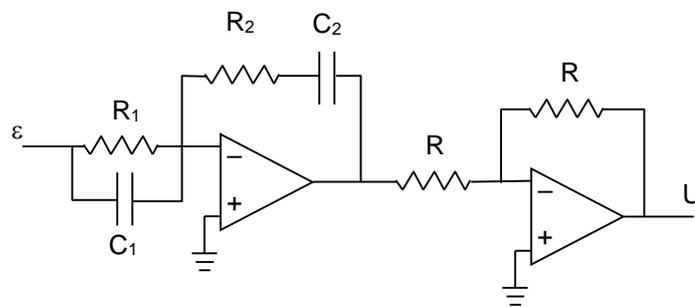


Fig. 7-33 : Réalisation du correcteur PID avec 2 amplificateurs opérationnels

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{(1 + R_1 C_1 p)(1 + R_2 C_2 p)}{R_2 C_2 p}$$

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_2 p} + R_2 C_1 p = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$$

$$\text{avec } K_p = \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right), \quad K_i = \frac{1}{R_1 C_2} \quad \text{et} \quad K_d = R_2 C_1$$

L'avantage du circuit de la figure 7-33 est qu'il n'utilise que 2 amplificateurs (le second servant d'inverseur avec un gain de valeur 1). Cependant, ce circuit ne permet pas une sélection indépendante de K_p , K_i et K_d .

- Une deuxième réalisation, avec 3 amplificateurs cette fois-ci, est celle de la fig. 7-34.

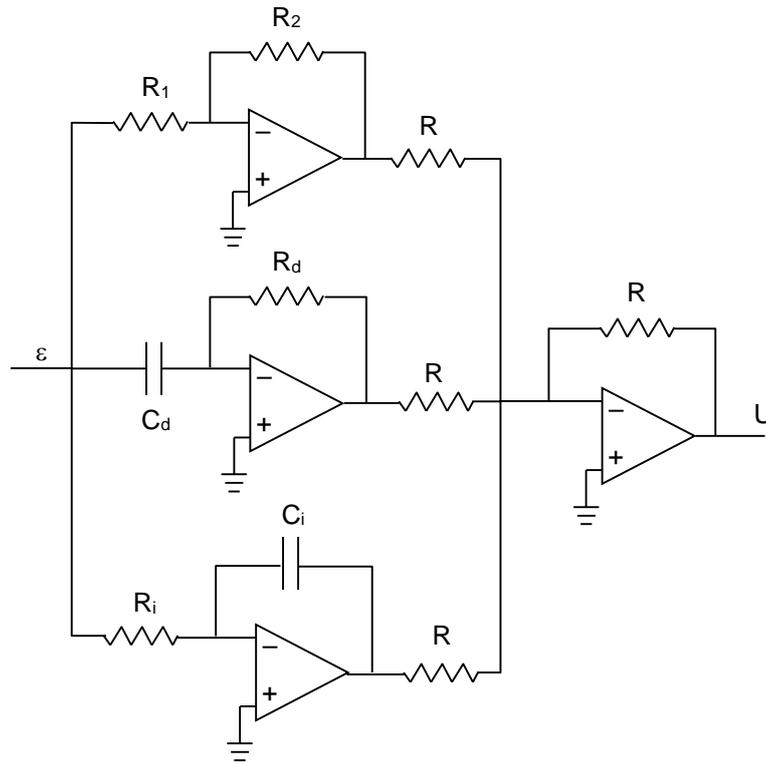


Fig. 7-34 : Réalisation du correcteur PID avec 3 amplificateurs opérationnels

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i p} + R_d C_d p = K_p + \frac{1}{K_i p} + K_d p$$

avec $K_p = R_2 / R_1$, $K_d = R_d C_d$ et $K_i = R_i C_i$

Pour ce circuit, K_p , K_i et K_d peuvent être réglés séparément.

7- 2.7.d - Exemple

La figure 7-35 montre le schéma fonctionnel d'un exemple de correction PID.

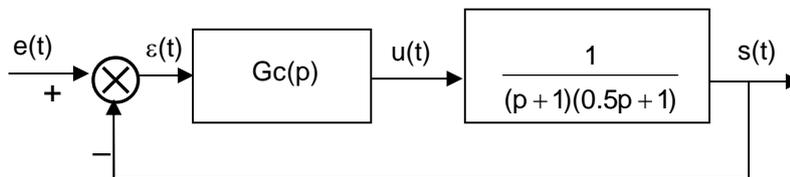


Fig. 7-35 : Exemple de correction PID

Avec $G(p) = \frac{1}{(p+1)(0.5p+1)}$ système à corriger et $G_c(p)$: Correcteur

La figure 7-36 donne la réponse indicielle du système seul (FTBO sans correcteur).
Le temps de montée est de l'ordre de 3.7 s

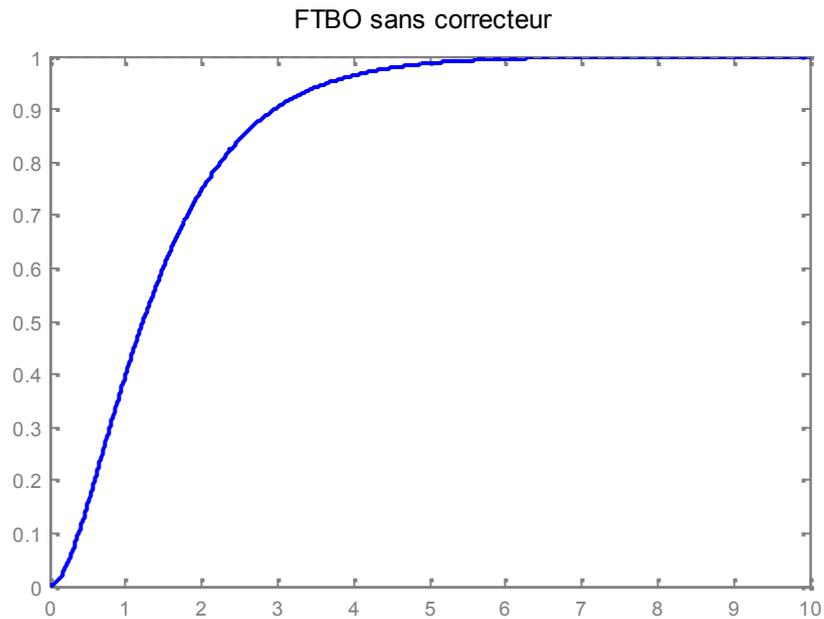


Fig. 7-36 : Réponse indicielle de la FTBO sans le correcteur

La figure 7-37 donne la réponse indicielle du système seul (FTBF sans correcteur et à retour unitaire).

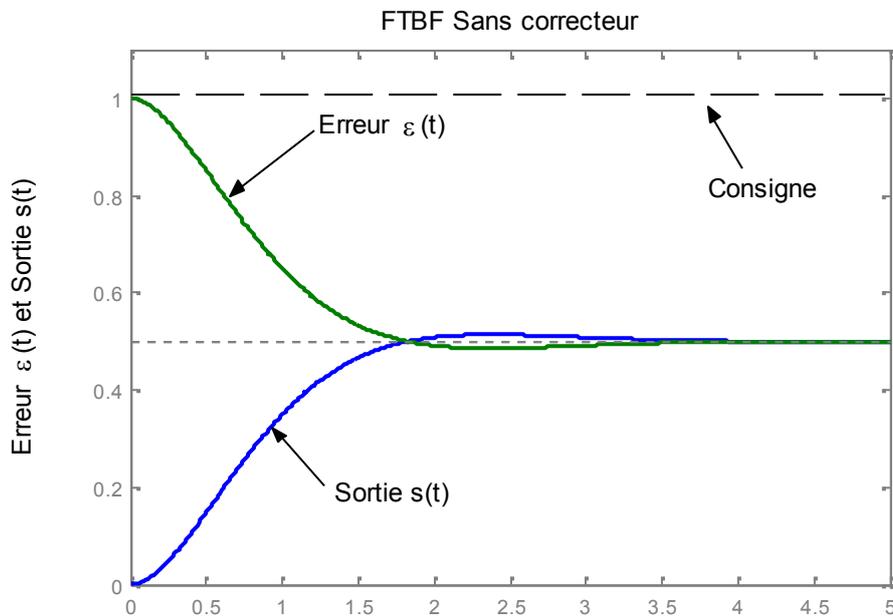


Fig. 7-37 : Réponses indicielles de la FTBF et de l'erreur $\varepsilon(t)$ sans le correcteur

Le système asservi étudié est très lent (le temps de montée est de l'ordre de 1.83 s), et très peu précis (l'erreur statique est de 50%).

A titre d'exemple, nous nous proposons d'améliorer les performances du système étudié, conformément au cahier de charge suivant :

- Temps de montée : moins de 0.15 s
- Dépassement : moins de 1%
- Temps d'établissement : moins de 2 s
- Erreur statique nulle.

Pour améliorer, tout d'abord, la rapidité du système, nous insérons un correcteur P, et nous faisons varier le paramètre K_p .

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

La figure 7–38 donne la réponse du système corrigé pour différentes valeurs de K_p .

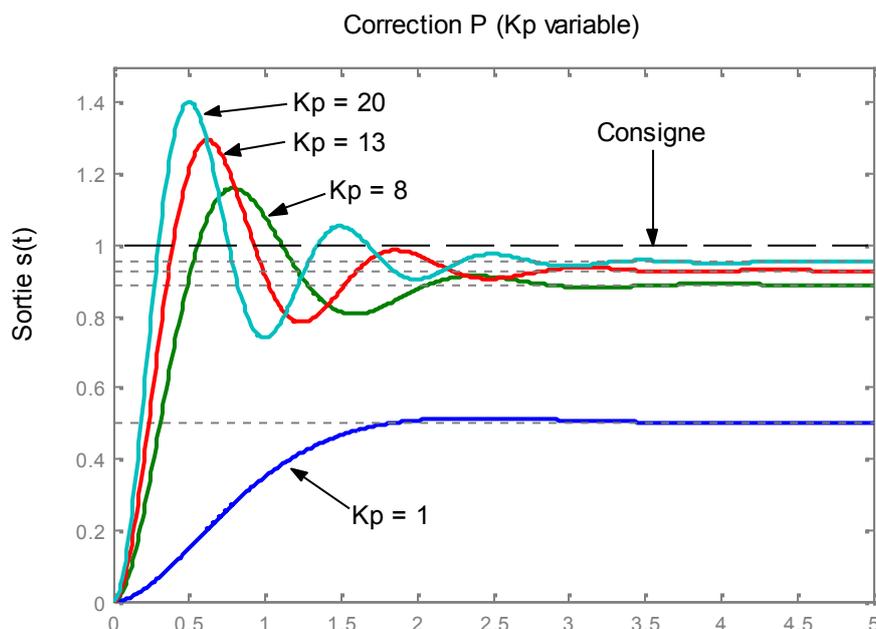


Fig. 7– 38 : Réponses indicielles du système corrigé par un correcteur P

Le temps de montée s'améliore avec l'augmentation de K_p , mais le dépassement croît fortement.

Pour $K_p = 20$, le temps de montée est de l'ordre de 0.286 s, le dépassement vaut 47.4 %.

L'erreur statique a été réduite mais n'a pas été annulée.

Tout en maintenant cette valeur de $K_p = 20$, rajoutons, cette fois-ci, un correcteur intégral I pour éliminer cette erreur statique de la réponse indicielle. Nous varierons ensuite le paramètre K_i pour voir son effet sur les performances du système.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + \frac{1}{K_i p}$$

La figure 7–39 donne la réponse du système corrigé pour $K_p = 20$ et différentes valeurs de K_i .

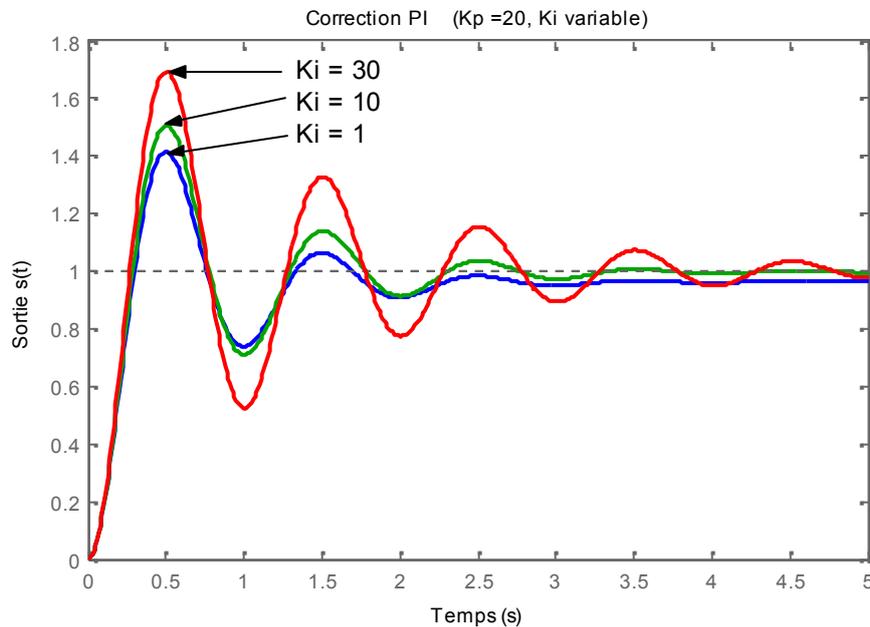


Fig. 7– 39 : Réponses indicielles du système corrigé par un correcteur PI

L'erreur statique a été annulée, mais le temps d'établissement a augmenté.

Le temps de montée s'est légèrement amélioré avec l'augmentation de K_i , mais le dépassement continue de croître.

Pour $K_p = 20$ et $K_i = 30$, le temps de montée est de l'ordre de 0.269 s, le dépassement passe à environ 69.5 %.

Nous maintenons les valeurs de $K_p = 20$ et $K_i = 30$ et nous rajoutons l'action dérivée D pour améliorer le dépassement et donner plus de stabilité au système. Nous varierons ensuite le paramètre K_d pour voir son effet sur les performances du système.

$$G_c(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + \frac{1}{K_i p} + K_d p$$

La figure 7–40 donne la réponse du système corrigé pour $K_p = 20$, $K_i = 30$ et différentes valeurs de K_d .

Le temps de montée n'a pas beaucoup changé (entre 0.25 et 0.26 s pour K_d entre 1 et 5), mais le dépassement s'est nettement écrasé. Le temps d'établissement a également été réduit.

Si nous nous contentons de $K_d = 10$, la courbe est très écrasée (dépassement très faible), mais le temps de montée est de l'ordre de 0.55 s. On pourrait alors augmenter K_p pour améliorer, de nouveau, ce temps de montée.

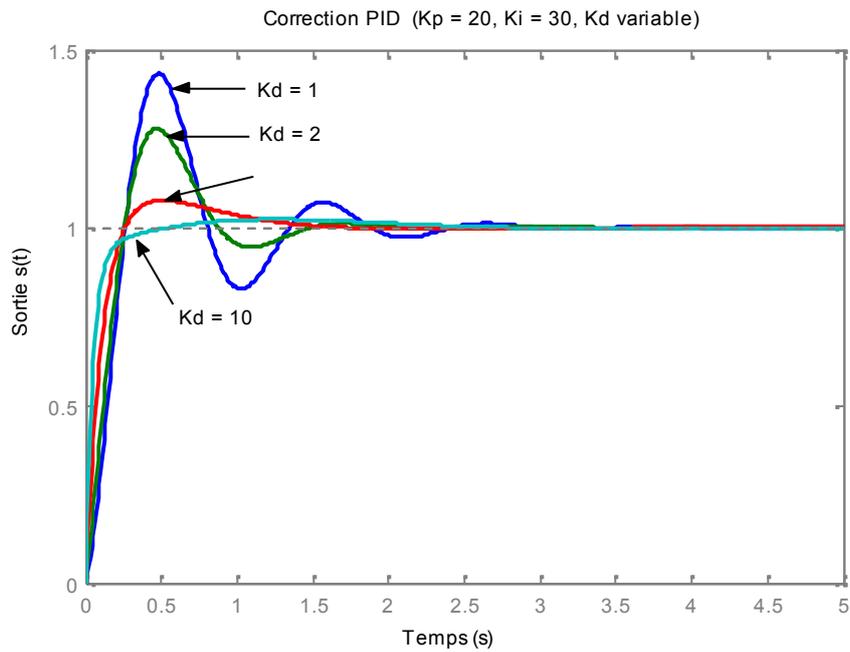


Fig. 7– 40 : Réponses indicielles du système corrigé par un correcteur PID

La figure 7–41 donne la réponse du système corrigé pour, $K_i = 30$, $K_d = 10$ et différentes valeurs de K_p à partir de la valeur 20.

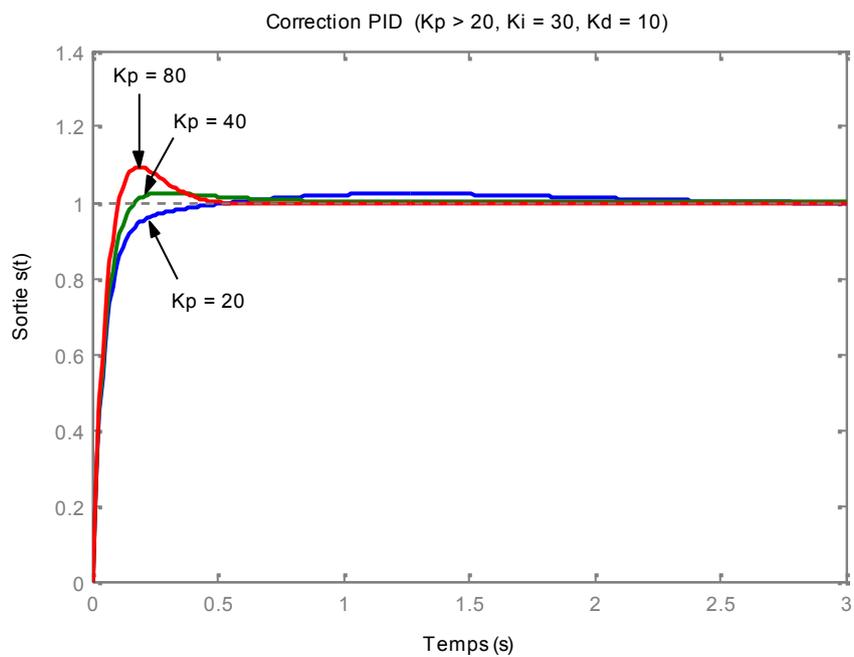


Fig. 7– 41 : Réponses indicielles du système corrigé par un correcteur PID

Le temps de montée et le temps d'établissement ont encore diminué, mais le dépassement a augmenté.

Si nous nous contentons de $K_p = 80$, le temps de montée est passé à environ 0.105 s et le dépassement à 9.31%. On pourrait alors augmenter K_d pour améliorer ce dernier.

La figure 7-42 donne la réponse du système corrigé pour, $K_p = 80$, $K_i = 30$ et différentes valeurs de K_d à partir de la valeur 10.

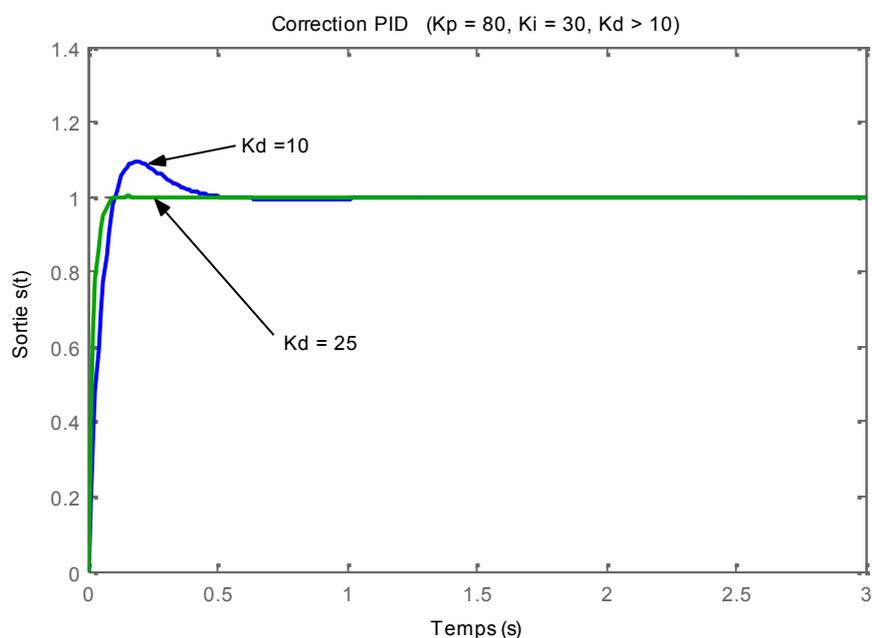


Fig. 7-42 : Réponses indicielles du système corrigé par un correcteur PID

Si nous nous contentons de $K_d = 25$, le temps de montée a peu changé (environ 0.12 s) mais il n'y a presque plus de dépassement.

Avec ces dernières valeurs des paramètres du correcteur PID utilisé, nous répondons aux spécifications imposées.