الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

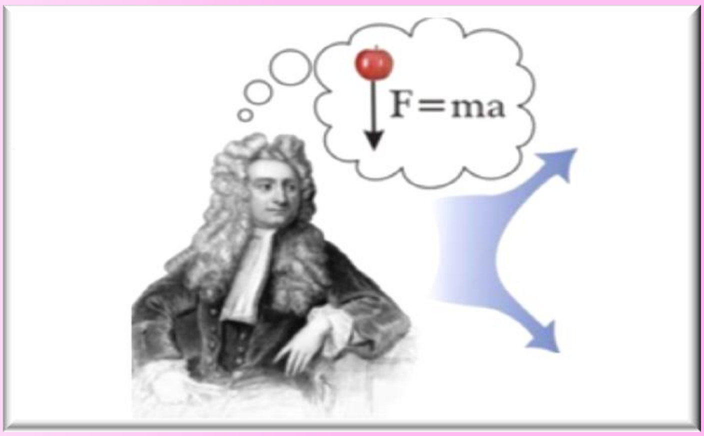
وزارة التعليم العالـي والبحـث العلمي

جامعة الشهيد حمة لخضر- الوادي

كلية العلوم الدقيقة - قسم الفيزياء

محاضرات في الفيزيــــــــاء 1

(ميكانيك النقطة المادية)



موجهة لطلبة السنة الأولى نظام لـ.م.د علوم المادة

من إعداد: د. مفتاح نسيمة

2022/2023

تمهيد

هذه المحاضرات بعنوان الفيزياء1 (ميكانيك النقطة المادية) هي أداة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة أولى جامعي لعلوم المادة (SM) نظام ل-م-د. و أعد محتوى هذه الدروس وفقا للبرنامج الرسمي و تم تقديمها بأسلوب بسيط يتيح للطالب سهولة الفهم و إستعاب المسائل المتعلقة بحركة الأجسام المادية عموما. وهي مقسمة لستة فصول، الفصل الأول بعنوان تذكرة رياضية و ذلك لتذكير الطالب ببعض الوسائل الرياضية التي تساعده في التعامل مع المسائل الفيزيائية، و الفصل الثاني يتناول كل ما يتعلق بالتحليل الشعاعي، ثم يليه فصل يتناول دراسة حركة الاجسام المادية و ذلك في مختلف المعالم، ثم فصل يتضمن دراسة الحركة النسبية، يليه فصل يتناول دراسة تحريك الاجسام المادية و في الاخر فصل حول الطاقة والعمل. وكل هاته المفصول مدعمة بأمثلة تطبيقية.

الأستاذة: مفتاح نسيمة

الفهرس

تمهيد

الفصل الأول: تذكـرة رياضية

الفصل الثاني: التحليل الشعاعي

الفصل الثالث: الحركيات

الفصل الرابع: الحركة النسبية

الفصل الخامس: تحريك النقطة المادية

الفصل السادس: العمل و الطاقة

الفصل الأول

تذكـــــرة رياضية

1 تذكـــــرة رياضية

I- التحليل البعدي

1- مقدمة:

استعمل الإنسان القياسات منذ القدم كوسيلة عملية للتعرف على الظواهر الطبيعية المحيطة به ولتحديد أشياء يستعملها خلال حياته اليومية. فقد اخترع الإنسان أجهزة قياس الأطوال و الكيل لتنظيم أسلوب حياته، وقد أصبح من الواضح أن حياتنا اليومية مليئة بأنواع عديدة من القياسات مثل ساعة اليد لقياس الوقت، عداد السرعة، مؤشر درجة الحرارة، مؤشر خزان الوقود...

I-2- الكميات الفيزيائية:

كل صفة فيزيائية قابلة للقياس تعتبر كمية فيزيائي. فمثلا الضوء لا يعني كمية فيزيائية لكن طوله الموجي او شدته الضوئية هي عبارة عن كميات فيزيائية لأنها قابلة للقياس. هناك نوعين من الكميات الفيزيائية:

أ- الكميات الفيزيائية الاساسية: هي كميات معرفة بذاتها، أي لا تعتمد على غيرها في التعريف مثل : الكتلة ، المسافة ، الزمن، الشحنة ، درجة الحرارة و غيرها.

ب- الكميات الفيزيائية المشتقة: هي كميات التي يتم اشتقاقها من الكميات الأساسية، وتعرف بدلالتها، تسمى كذلك بالكميات المعرفة مثل: السرعة ، التسارع، القوة، الضغط، الكثافة.....

I-2-1- نظام الوحدات SI:

لقد اسّس لقاء دولي عام 1960م قواعد لتحديد مجموعة من الوحدات القياسية للكميات أو المقادير الفيزيائية الاساسية، و لقد سميت هذه المجموعة بجملة الوحدات الدولية (International System). تتكون هذه المجموعة من سبعة وحدات اساسية بالإضافة الى وحدات مشتقة و اخرى ثانوية و كذلك وحدة اضافية. فالوحدات المشتقة هي وحدات مشتقة من الوحدات السبعة الاساسية مثل: النيوتن (N)، الجول (J)، الاوم (Ω)،......

و توجد الى جانب الوحدات الاساسية وحدات تدعى وحدات ثانوية مثل: اللتر(l)، الحريرة (cal)،.......

كما تعتبر وحدة الزاوية المستوية الراديان (rad) كوحدة اضافية.

ملاحظة: هناك أيضا انظمة اخرى للوحدات في الفيزياء، نذكر منها:

- نظام CGS: السنتيمتر، الغرام ، ثانية.

- نظام MTS: متر، طن، ثانية.

الجدول التالي يوضح الوحدات الاساسية المعتمدة في النظام الدولي **(SI)**:

اسم وحدة القياس	رمز وحدة القياس	البعد الفيزيائي	رمز البعد الفيزيائي
متر (meter)	m	طول	L
كيو غرام (Kilogram)	Kg	كتلة	M
ثانية (second)	s	زمن	T
الامبير(Ampere)	A	شدة التيار الكهربائي	I
كلفن(Kelvin)	K	درجة الحرارة	θ
مول(mole)	mol	كمية المادة	N
قنديلة(candela)	cd	شدة الاضاءة	J

I-2-2- التحليل البعدي:

لكلمة "بعد" في الفيزياء معنى خاصا، فهي تدل على الطبيعة الفيزيائية لمقدار ما. فمثلا سواء كانت المسافة بين نقطتين مقدرة بالأمتار او بالأقدام، فإنها تظل تمثل طولا و نقول ان بُعد المسافة هو طول، و نرمز لهذا البُعد بـ L. أي ان بُعد المسافة هو L. و للدلالة على بُعد أي مقدار فيزيائي نضع عادة ذلك المقدار بين حاضنتين **[ ]**. و يمكننا من خلال الجدول السابق للوحدات الاساسية استنتاج بُعد أي مقدار فيزيائي، و ذلك بمعرفة علاقة ذاك المقدار بالمقادير الاساسية أو بمقادير مشتقة معروفة.

I-2-3- معادلة الابعاد:

نستطيع كتابة بُعد أي مقدار فيزيائي **X** بدلالة الأبعاد الأساسية و المعرفة في جملة الوحدات الدولية. و نكتب بُعد هذا المقدار على شكل معادلة الابعاد التالية:

$$[X] = \boldsymbol{M^a L^b T^c I^d \theta^e N^f J^g}$$

حيث: M^a تمثل الكتلة (kg)، L^b يمثل الطول(l)، T^c تمثل الزمن (s)، I^d تمثل الكثافة (A)، $\boldsymbol{\theta^e}$ تمثل درجة الحرارة (K)، $\boldsymbol{N^f}$ تمثل كمية المادة (mol)، $\boldsymbol{J^g}$ تمثل الشدة الضوئية (cd).

- **ملاحظة:**

$\pi = 3.14$, $[\pi]=[\sin\alpha]=[\cos\alpha]=[e^x]=[\log x]= 1$, $[4] = 1$, $[t] = T$,

$[m] = M$, $[l] = L$, $[i]=I$

بعض الكميات الفيزيائية ليس لها أبعاد، مثل معامل الانكسار n.

مثال:

- معادلة الابعاد للسرعة الخطية: $v(m.s^{-1}) = \frac{dl}{dt} = \frac{l}{t} \Rightarrow [v] = \boldsymbol{LT^{-1}}$
- معادلة بعد القوة: $\vec{F}(kg.m.s^{-2}) = m\vec{a} \Rightarrow [\boldsymbol{F}] = \boldsymbol{MLT^{-2}}$
- معادلة ابعاد كمية الحركة: $\vec{P}(kg.m.s^{-1}) = m\vec{v} \Rightarrow [\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{MLT^{-1}}$

I-2-4- تجانس الأبعاد:

تحليل الأبعاد يساعد على التأكد من صحة القوانين الفيزيائية، و ذلك بتطابق الأبعاد بين طرفي القانون، كما يساعد على صياغة الصورة النهائية للعلاقة الرياضية اعتمادا على مبدأ تجانس الأبعاد كشرط أساسي لصحة العلاقة. و لإثبات صحة أي معادلة يجب أن تكون أبعاد الطرف الأيسر تساوي أبعاد الطرف الأيمن.

- **مثال1:** التأكد من تجانس علاقة دور النواس $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ و الذي يتعلق بطول النواس l و الجاذبية g

فالنسبة للطرف الايمن من المعادلة لدينا: $[2\pi] = 1$

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = l^{\frac{1}{2}}.g^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \left[l^{\frac{1}{2}}.g^{-\frac{1}{2}}\right] = \left[l^{\frac{1}{2}}\right]\left[g^{-\frac{1}{2}}\right] = \left(L^{\frac{1}{2}}\right)(LT^{-2})^{\frac{-1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}T = \boldsymbol{T}$$

و بالتالي ابعاد هذه العلاقة متجانسة. اي المعادلة صحيحة. فبعد دور النواس هو بعد الزمن.

- **مثال2:** ايجاد وحدة الجاذبية

لدينا من قانون الجذب العام العلاقة: $F = G\frac{Mm}{r^2} = m\gamma$

G: معامل الجاذبية العام، M و m كتلتان متجانستان، r البعد بين M وm، γ تسارع الجاذبية.

لدينا من قانون الجذب العام: $\boldsymbol{G = \frac{Fr^2}{M}}$

و جهة اخرى: $F = m\gamma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow [F] = MLT^{-2}$

$$\Rightarrow [G] = \frac{[F][r^2]}{[m][M]} = \frac{MLT^{-2}\,L^2}{M^2} \Rightarrow \boldsymbol{[G] = M^{-1}T^{-2}L^3 = (Kg^{-1}s^{-2}m^3)}.$$

II-الدوال المتعددة المتغيرات:

هي دوال متعلقة بعدة متغيرات و تكتب على الشكل: $f = f(x, y, z, t, \dots .)$

و كمثال على هذه الدوال: $f = 2x + y^2x - 5z$

II-1- الاشتقاق الجزئي:

لتكن الدالة السلمية $f(x, y, z)$ متعلقة بالمتغيرات الثلاث x، y، z. الاشتقاق الجزئي لهذه الدالة بالنسبة لاحد المتغيرات هو اشتقاق هذه الدالة بالنسبة لهذا المتغير و اعتبار المتغيرين المتبقيين كثوابت. فالمشتق الجزئي لـ $f(x, y, z)$ بالنسبة للمتغير x يكتب على الشكل $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ ، و نحصل عليه باشتقاق الدالة بالنسبة x فقط و اعتبار (y, z) كثوابت. و هكذا الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتغيرين الاخرين (y, z).

مثال: لتكن الدالة $f(x, y, z) = 2x^4 + 3yx + 2z$

<u>المشتق الجزئي بالنسبة لـ x:</u> $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial(2x^4+3yx+2z)}{\partial x} = 8x^3 + 3y$

<u>المشتق الجزئي بالنسبة لـ y:</u> $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial(2x^4+3yx+2z)}{\partial y} = 3x$

<u>المشتق الجزئي بالنسبة لـ z:</u> $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial(2x^4+3yx+2z)}{\partial z} = 2$

II-2- الاشتقاق الكلي:

نعرف الاشتقاق الكلي للدالة $f(x, y, z)$ كمايلي:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

كما نعرف الاشتقاق الكلي للدالة الشعاعية $\vec{A}(x, y, z)$ كمايلي:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}(x,y,z)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{A}(x,y,z)}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{A}(x,y,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

II-3- التفاضل الكلي :

نفرض دالة متعددة المتغيرات $f(x,y,z)$، يمكن حساب التفاضل الكلي للدالة f كالتالي:

$$df=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

- **اهم قواعد حساب اشتقاق الدوال ذات متغير:**

لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ القابلتان للاشتقاق و c ثابت فإن:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\mp g(x)\big)=\frac{df}{dx}\mp\frac{dg}{dx}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\big(cf(x)\big)=c\frac{df}{dx}}$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=f\frac{dg}{dx}+g\frac{df}{dx}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}}$$

- **جدول مشتقات الدوال الرئيسية:**

$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)'=\cos\ x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(tg(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctg(x))'=\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcsinx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\lvert x\rvert<1)$	$(arccosx)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\lvert x\rvert<1)$
$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgx)'=\frac{-1}{1+x^2}$	$((a)^x)'=a^x\ln x$	$((e)^x)'=e^x$

$(\boldsymbol{lnx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x} > \mathbf{0})$	$(\boldsymbol{log_a x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{xlna}}$ $= \frac{\boldsymbol{log_a e}}{\boldsymbol{x}}$ $(\boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \boldsymbol{a} > \mathbf{0})$	$(\boldsymbol{shx})' = \boldsymbol{chx}$	$(\boldsymbol{chx})' = \boldsymbol{shx}$
$(\boldsymbol{thx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ch^2x}}$	$(\boldsymbol{cthx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sh^2x}}$	$(\boldsymbol{Arshx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^2}}}$	$(\boldsymbol{Archx})'$ $= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2}-\mathbf{1}}}(\lvert\boldsymbol{x}\rvert > \mathbf{1})$
$(\boldsymbol{Arthx})'$ $= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}(\lvert\boldsymbol{x}\rvert < \mathbf{1})$	$(\boldsymbol{Arcthx})'$ $= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}-\mathbf{1}}(\lvert\boldsymbol{x}\rvert < \mathbf{1})$	$((\boldsymbol{f(x)^n})'$ $= \boldsymbol{n(x)'(f^{n-1}(x))}$	

II-4- تكامل الدوال ذات متغير:

في الرياضيات، مكاملة دالة هي نوع من التعميم لكميات قابلة للتجزئة مثل المساحة أو الحجم أو الكتلة أو أي مجموع لعناصر متناهية في الصغر. و أيضاً يمكن أن يُنظر إلى عملية التكامل على أنها عملية عكسية لعملية التفاضل.

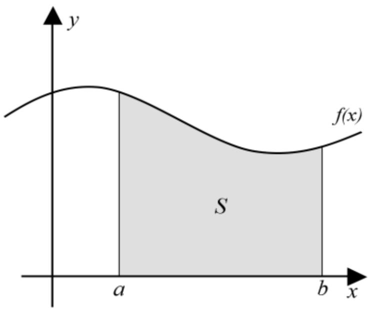
يمكن اعتبار تكامل دالة حقيقية مستمرة ذات قيم موجبة $f(x)$ لمتغير حقيقي x بين قيمة حدية دنيا وقيمة حدية عليا هي المساحة المحصورة بين المستقيمين الرأسيين x=a, x=b والمحور x والمنحني المحدد بالدالة $f(x)$ ، يمكن صياغة ذلك بشكل رياضي:

$$\boldsymbol{S = \{(x,y): a \le x \le b} \text{ و } \boldsymbol{0 \le y \le f(x)\}}$$

ويرمز لهذه العملية حسب اصطلاح لورينتز :

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx}$$

و تسمى الدالة S الدالة الاصلية للدالة $f(x)$.



الشكل (I-1): مثال لحساب تكامل دالة

- **خصائص عملية التكامل:**

✓ اذا كانت $F(x) = \int f(x)\,dx$ فهذا يعني ان:

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

✓ $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ حيث a ثابت.

✓ $\int(f(x) \mp g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)dx$

✓ $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ حيث C ثابت و $a \neq 0$.

II-4-1- انواع عملية التكامل:

ا) طريقة استبدال المتغير:

اذا كان $x = \varphi(t)$، حيث t هو متغير ثاني و $\varphi(t)$ هي دالة مستمرة قابلة للاشتقاق فان:

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt}$$

ب) التكامل بالتجزئة:

اذا كان $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ دالتان قابلتين للاشتقاق فان:

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$$

- **جدول تكامل الدوال الرئيسية:**

$\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert$	$\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + C, n \neq 0$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{x+a}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C, \quad a > 0$
$\int cosxdx = sinx + C$	$\int sinxdx = -cosx + C$

$\int shxdx = chx + C$	$\int \frac{dx}{cosx} = ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\| + C$
$\int \frac{dx}{sh^2x} = thx + C$	$\int chxdx = shx + C$
	$\int \frac{dx}{ch^2x} = cthx + C$

III- المعادلات التفاضلية:

المعادلة التفاضلية هي علاقة رياضية تربط بين متغير مستقل x و متغير تابع و ليكن $y(x)$ و واحدة او أكثر من المشتقات $(x, y, y', y'', \dots y^n)$. اي انها على الصورة العامة:

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'', \dots y^n) = 0}$$

و اذا حققت الدالة $y(x)$ المعادلة التفاضلية :

$$F(x, y, y', y'', \dots y^n) = 0$$

نقول ان الدالة $y(x)$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

مثال: اثبات ان الدالة: $y(x) = a\ sin\theta$ حل للمعادلة التفاضلية: $y" + y = 0$ (a ثابت).

$$y(x) = a\ sin\theta \Rightarrow y'(x) = a\ cos\theta \Rightarrow y"(x) = -a\ sin\theta$$

و بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\boldsymbol{y}" + y = -\boldsymbol{a\ sin\theta} + a\ cos\theta = 0$$

اذن الدالة $a\ sin\theta$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y" + y = 0$.

III-1- المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى:

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هي علاقة تربط بين دالة $y(x)$ مجهولة وبين مشتقاتها الأولى و المتغير x اي:

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى التالية: $y'^{(x)} = 3x^2 - 2$

$$y(x) = \int y' dx = \int (3x^2 - 2)dx = \boldsymbol{x^3 - 2x + c}$$

III-2- المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية:

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هي علاقة رياضية تأخذ الشكل التالي:

$$y"(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) = c$$

باعتبار ان a, b, c ثوابت. لندرس حلول المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية في مختلف الشروط:

- <u>**الحالة 1:** $\boldsymbol{a = 0, c = 0}$ $(y" + by(x) = 0)$</u>

أ) **من اجل** $\boldsymbol{b = 0}$ حل المعادلة التفاضلية ياخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = C_1 x + C_2}$$

ب) من اجل $\boldsymbol{b > 0}$ حل المعادلة التفاضلية يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = C_1 sin\sqrt{b}x + C_2 cos\sqrt{b}x}$$

ج) من اجل $\boldsymbol{b < 0}$ حل المعادلة التفاضلية يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = C_1 exp\left(\sqrt{b}x\right) + C_2 exp(-\sqrt{b}x)}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت تحددهما الشروط الابتدائية.

- <u>**الحالة 2:** $\boldsymbol{a \neq 0, c = 0}$ $(y" + ay'(x) + by(x) = 0)$</u>

المعادلة المميزة من الشكل $r^2 + ar + b = 0$ و مميزها هو: $a^2 - 4b$ و جذراه هما r_1 و r_2 .

أ) اذا كان $\Delta > 0$ فإن الحل يكون من الشكل:

$$\boldsymbol{y = C_1 exp(r_1 x) + C_2 exp(r_2 x)}$$

ب) اذا كان $\Delta = 0$ فإن $r_1 = r_2 = r_0$ و الحل يكون من الشكل:

$$\boldsymbol{y = (C_1 x + C_2) exp(r_0 x)}$$

ج) اذا كان $\Delta < 0$ فإن r_1،r_2 هما عددان خياليان $r_{1,2} = \alpha + i\beta$ و الحل يكون من الشكل:

$$\boldsymbol{y = exp(\alpha x)[C_1 sin\beta x + C_2 cos\beta x]}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت تحددهما الشروط الابتدائية.

<u>**الحالة 3:** $\boldsymbol{y" = 0, c = 0}$ $(ay'(x) + by(x) = 0)$</u>

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى و حلها يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = Cexp\left(-\frac{b}{a}x\right)}$$

الحالة 4: $\boldsymbol{y'' = 0}$ $(ay'(x) + by(x) = c)$

و هي معادلة من الدرجة الاولى و حلها يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = Cexp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + \frac{c}{b}}$$

الحالة 5: $\boldsymbol{y' = 0}$ $(y''(x) + by(x) = c)$

حل المعادلة يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y = C_1exp\left(\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + C_2exp\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + \frac{c}{b}}$$

الفصل الثاني

التحليل الشعاعي

2 الحساب الشعاعي

I- مقدمـــــــــــــة

تصنف المعاني او المقادير الفيزيائية عموما الى ثلاث اصناف: مقادير سلمية، مقادير شعاعية و مؤثرات.

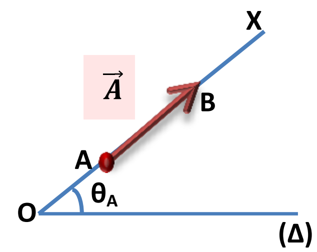
أ- المقادير السلمية: وهي مقادير فيزيائية يعبر عنها بقيمة عددية واحدة فقط في الوحدة المناسبة، مثل الكتلة (كغ)، الحجم (م^3)، الزمن (ثانية)،.......

ب- المقادر الشعاعية: وهي مقادير فيزيائية يعبر عنها بقيمة عددية و اتجاه، مثل السرعة $\vec{v}$، التسارع $\vec{a}$، القوة $\vec{F}$، .... و تسمى هذه المقادير با**لمتجهات** او **الأشعة**.

I-1- مفهوم الشعاع:

هو قطعة مستقيمة موجهة من النقطة A الى النقطة B و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ او بالرمز $\vec{\boldsymbol{A}}$.

I-2- مميزات الشعاع:



الشكل (I-1): عناصر الشعاع

- نقطة تأثيره (A): و هي بداية الشعاع $\vec{A}$.
- طويلة الشعاع $\vec{A}$: هي طول القطعة المستقيمة [AB] و نرمز لها بالرمز:

$$\|\vec{A}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = A$$

- منحى أو حامل الشعاع $\vec{A}$: هو منحى المستقيم (OX).
- اتجاه الشعاع $\vec{A}$: من A نحو B.

أيضا يعرف عدديا الشعاع $\vec{A}$ بإعطاء قيمتين عدديتين و الممثلتين لطويلته $\|\vec{A}\|$ و عمدته θ_A. و نكتب:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}} = (\|\vec{\boldsymbol{A}}\|, \boldsymbol{\theta_A}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\theta_A})}$$

حيث عمدة الشعاع $\vec{A}$ هي الزاوية θ_A التي يصنعها هذ الشعاع مع محور مرجعي (Δ) في اتجاه عكس عقارب الساعة (انظر الشكل I-1).

I-2-1- شعاع الوحدة:

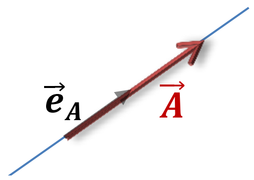
اشعة الوحدة هي اشعة تحدد الاتجاهات في الفضاء. اي شعاع يكتب على شكل طويلة هذا الشعاع مضروب في شعاع وحدته $\vec{e}_A$ و نكتب:

$$\boxed{\vec{A} = \|\vec{A}\|.\vec{e}_A = A\vec{e}_A}$$

شعاع الوحدة $\vec{e}_A$ هو شعاع موازي للشعاع $\vec{A}$ و طويلته تساوي الواحد (بدون وحدة).

مثال: (انظر الشكل I-2)

$$\vec{A} = 2\vec{e}_A$$



الشكل (I-2): شعاع الوحدة

و بالتالي نعرف شعاع الوحدة للشعاع $\vec{A}$ كالاتي:

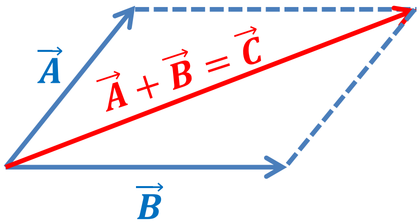
$$\boxed{\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}}$$

I-3- العمليات على الاشعة

I-3-1- جمع شعاعين:

ناتج الجمع الهندسي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو الشعاع $\vec{C}$ و الذي يمثل محصلة جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ **الشكل (I-3)** كما ان عملية جمع شعاعيين هي عملية تبديلية.

$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} = \vec{B} + \vec{A}}$$



الشكل (I-3): محصلة جمع شعاعين

هندسيا يتم ايجاد شعاع المحصلة بإعادة رسم الشعاع $\vec{B}$ بحيث تنطبق بدايته مع نهاية الشعاع $\vec{A}$ مع المحافظة على طويلته و اتجاهه.

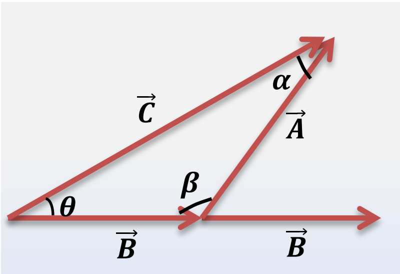
ثم يتم رسم شعاع المحصلة $\vec{C}$ و الذي ينطلق من بداية الشعاع $\vec{A}$ الى نهاية الشعاع الثاني $\vec{B}$. كما يظهر في الشكل **(I- 3)** الشعاع $\vec{C}$ يمثل قطر متوازي الاضلاع. ويمكن حساب طويلة شعاع المحصلة وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{\vec{C} = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})}}$$

$(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$ هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

كما نحصل على اتجاه المحصلة بحساب الزاوية المحصورة بينها و بين الاشعة $\vec{A}$ أو $\vec{B}$ من خلال العلاقة:

$$\frac{\|\vec{A}\|}{sin\theta} = \frac{\|\vec{B}\|}{sin\alpha} = \frac{\|\vec{C}\|}{sin\beta}$$



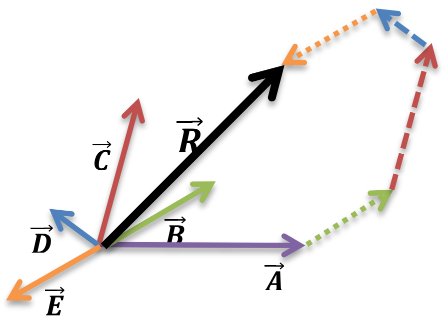
الشكل (I-4): علاقة الجيب تمام

حيث الزوايا β، α و θ موضحة في الشكل أعلاه.

I-3-2- جمع عدة أشعة:

في حالة جمع اكثر من شعاعين تعتمد الطريقة الهندسية على ان تكون بداية كل شعاع عند نهاية الشعاع الذي قبله و هكذا الى اخر شعاع. ويكون الشعاع المحصلة هو الشعاع الذي تكون بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الأخير.

مثال: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$



الشكل (I-5) : جمع عدة اشعة.

I-3-3- خصائص جمع أشعة:

- تبديلي: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- تجميعي: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
- $\|\vec{A} + \vec{B}\| \neq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$

I-3-4- طرح الأشعة:

ان طرح الشعاع $\vec{A}$ من الشعاع $\vec{B}$ هو نفسه جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $(-\vec{B})$ اي ان عملية طرح الاشعة تعتبر حالة خاصة من عملية الجمع.

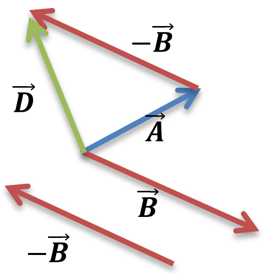
هندسيا نعرف محصلة طرح الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالشعاع $\vec{C}$ حيث:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

حيث الشعاع $(-\vec{B})$ هو شعاع يعاكس الشعاع $\vec{B}$ في الاتجاه و لهما نفس الطويلة و المنحى.

- طرح الاشعة عملية غير تبديلية اي ان:

$$(\vec{A} - \vec{B}) \neq (\vec{B} - \vec{A})$$



الشكل (I-6): محصلة طرح شعاعين

I-3-5- ضرب شعاع بعدد حقيقي:

حاصل ضرب الشعاع $\vec{A}$ بالعدد الحقيقي n هو شعاع $\vec{B}$ يكون موازيا لـلشعاع $\vec{A}$.

$$\vec{B} = n\vec{A}$$

- فمن اجل $n > 0$: فان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لهما نفس الاتجاه.
- فمن اجل $n < 0$: فان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ مختلفان في الاتجاه.
- طويلة الشعاع $\vec{B}$ تكتب: $\|\vec{B}\| = |n|\|\vec{A}\|$

I-3-6- الجداء السلمي:

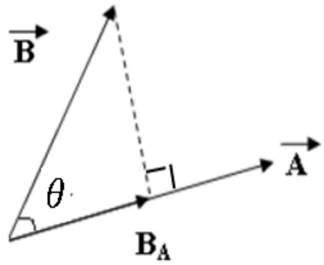
الجداء السلمي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو مقدار سلمي (عدد حقيقي) و يعرف كما يلي:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta}$$

$\theta(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$: أصغر زاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

يمكن ايضا ان نعبر عن الجداء الشعاعي كمايلي:

$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}_A\|$$



الشكل (I-7): الجداء السلمي

حيث: $\|\vec{B}_A\| = \|\vec{B}\| \cos\theta$ يمثل مسقط الشعاع $\vec{B}$ على الشعاع $\vec{A}$

(انظر الشكل I-7).

إذن الجداء السلمي لشعاعين يساوي جداء طويلة أحد الشعاعين في مسقط الشعاع الاخر على حامل الشعاع الاول.

I-3-6-1- خصائص الجداء السلمي:

- الجداء السلمي تبديلي: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- الجداء السلمي توزيعي على الجمع الشعاعي: $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$
- طويلة الشعاع $\vec{A}$: $\vec{A}.\vec{A} = \|\vec{A}\|\|\vec{A}\|\cos 0 = \|\vec{A}\|^2$

اذن لحساب طويلة الشعاع $\vec{A}$ نطبق العلاقة التالية:

$$\boxed{\Rightarrow \|\vec{\boldsymbol{A}}\| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{A}}.\vec{\boldsymbol{A}}}}$$

- خاصية تعامد شعاعين:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \perp \vec{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \theta\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{A}},\vec{\boldsymbol{B}}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}}.\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{A}} \perp \vec{\boldsymbol{B}}}$$

و تمثل هذه القاعدة معيار لاختبار تعامد الأشعة.

- **خاصية توازي شعاعين:**

$$\vec{\boldsymbol{A}} \parallel \vec{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \theta\left(\widehat{\vec{\boldsymbol{A}},\vec{\boldsymbol{B}}}\right) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}}.\vec{\boldsymbol{B}} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{A}} \parallel \vec{\boldsymbol{B}}}$$

I-3-7- الجداء الشعاعي:

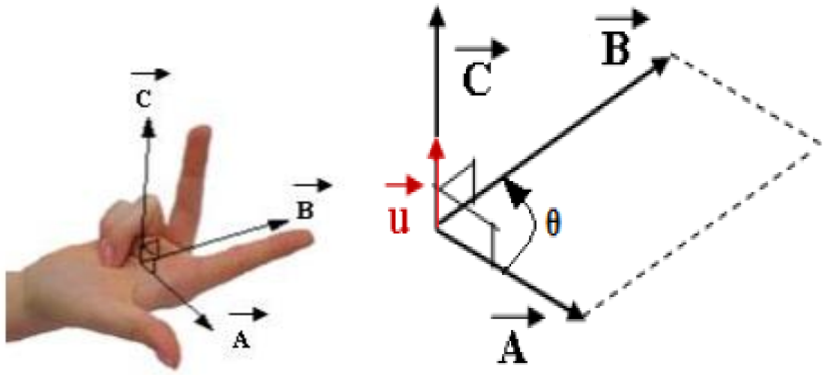
الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{\boldsymbol{A}}$ و $\vec{\boldsymbol{B}}$ هو مقدار شعاعي $\vec{\boldsymbol{C}}$ و نكتب:

$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ أو $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$

رياضيا يعرف الجداء الشعاعي لـ $\vec{\boldsymbol{A}}$ و $\vec{\boldsymbol{B}}$ كما يلي:

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta \, \vec{e}_C}$$

- **θ** هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.
- $\vec{e}_C$ يمثل شعاع وحدة الشعاع $\vec{C}$.
- الشعاع $\vec{C}$ هو شعاع عمودي على الشعاع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في نفس الوقت اي عمودي على المستوي $(\vec{A}, \vec{B})$ و اتجاه الشعاع $\vec{C}$ يحدد بتطبيق قاعدة اليد اليمنى (انظر الشكل I-8).



الشكل (I-8): الجداء الشعاعي.

- طويله الجداء الشعاعي يمثل مساحة متوازي الاضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

I-3-7-1- خصائص الجداء الشعاعي:

- الجداء الشعاعي غير تبديلي: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- الجداء الشعاعي توزيعي على الجمع الشعاعي: $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
- الجداء الشعاعي غير تجميعي: $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\overrightarrow{\vec{A} \wedge \vec{B}}) \wedge \vec{C}$
- الجداء الشعاعي لشعاعين متوازيين يساوي الشعاع المعدوم، أي أن:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \theta\left(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}\right) = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$$

$$\boxed{\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0}$$

و تمثل هذه القاعدة معيار لاختبار توازي الأشعة.

II- التحليل الشعاعي:

II-1-- مركبات شعاع:

ذكرنا سابقا ان الشعاع $\vec{A}$ يعرف بطويلته و عمدته، ايضا يمكننا تعريف الشعاع $\vec{A}$ بمركباته.

II-2-- تعريف شعاع في المستوي:

لتكن النقطه M معرفة في معلم (O,x,y) المزود بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. موضع النقطة M في المستوي (O,x,y) تعرف بالشعاع $(\overrightarrow{OM})$ كمايلي:

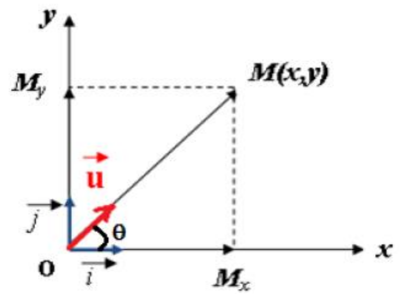
$$\vec{A}=\overrightarrow{OM}=OM_x\vec{\imath}+OM_y\vec{\jmath}$$

M_x: تمثل مسقط النقطة M على المحور (xO).

M_y: تمثل مسقط النقطة M على المحور (Oy).

حيث O_x و OM_y يمثلان مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

و نكتب: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}OM_x\\OM_y\end{pmatrix}$



الشكل (I-9): تعريف شعاع في المستوي.

نلاحظ من الشكل المقابل أن: $\begin{cases}\overrightarrow{OM_x}=OM_x\vec{\imath}=\|\overrightarrow{OM}\|\cos\theta\\ \overrightarrow{OM_y}=OM_y\vec{\jmath}=\|\overrightarrow{OM}\|\sin\theta\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{A}=\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{OM}\|\cos\theta\,\vec{\imath}+\|\overrightarrow{OM}\|\sin\theta\,\vec{\jmath}}$$

كما أنه يمكن كتابة عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ كما يلي:

$$\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{OM}\|(\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath})=\|\overrightarrow{OM}\|\vec{u}$$

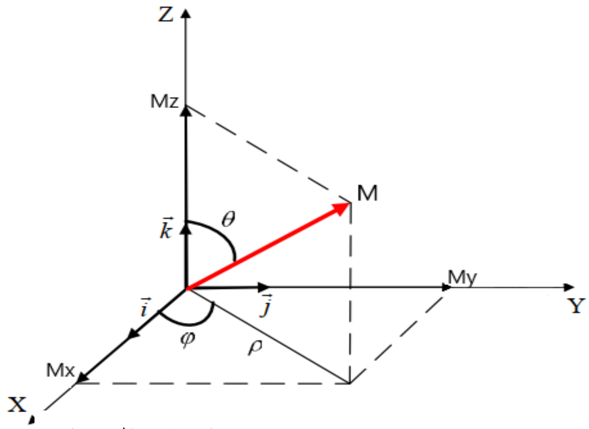
$$\vec{u}=\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

حيث $\vec{u}$ يمثل شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$.

II-3- تعريف شعاع في الفضاء:

يمكن تمثيل النقطة M في معلم ثلاثي الأبعاد المعرف بـ (O,x,y,z) المزود بالقاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ حيث نعرف موضع النقطة M بالشعاع $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\vec{A}=\overrightarrow{OM}=OM_x\vec{\imath}+OM_y\vec{\jmath}+OM_z\vec{k}}$$



الشكل (I-10): تعريف شعاع في الفضاء

M_x: تمثل مسقط النقطة M على المحور (xO).

M_y: تمثل مسقط النقطة M على المحور (Oy).

M_z: تمثل مسقط النقطة M على المحور (Oz).

حيث O_x, OM_y, OM_z يمثلون مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$. و نكتب: $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}OM_x\\OM_y\\OM_z\end{pmatrix}$

و تحسب طويلة الشعاع $\vec{O}$ وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{(OM_x)^2+(OM_y)^2+(OM_x)^2}}$$

II-4- الصيغ التحليلية للعمليات على الأشعة:

II-4-1- الصيغة التحليلية لتساوي شعاعين:

اذا تساوا الشعاعين $\vec{A}\begin{pmatrix}Ax\\Ay\\Az\end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix}Bx\\By\\Bz\end{pmatrix}$ فهذا يستلزم تساوي مركباتهما بمعنى ان:

$$\vec{A}=\vec{B}\Leftrightarrow A_x=B_x,A_y=B_y,A_z=B_z$$

II-4-2- الصيغة التحليلية لجمع شعاعين:

اذ كان الشعاع $\vec{C}$ هو شعاع المحصلة الناتج عن جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

ليكن الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و المعرفين في المعلم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\begin{cases}\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\end{cases}$

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \underbrace{(A_x + B_x)}_{C_x}\vec{i} + \underbrace{(A_y + B_y)}_{C_y}\vec{j} + \underbrace{(A_z + B_z)}_{C_z}\vec{k}}$$

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

II-4-3- الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

- ليكن الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و المعرفين في المعلم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\begin{cases}\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\end{cases}$

فان:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

ملاحظة:

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

تعبر هذه المساواة عل خاصية تجانس القاعدة.

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

تعبر هذه المساواة عن تعامد اشعة المعلم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ على بعضها البعض.

II-4-4- الصيغة التحليلية للجداء الشعاعي:

نفرض أن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ معرفان في المعلم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و ليكن الشعاع $\vec{C}$ هو ناتج الجداء الشعاعي بين الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$. نكتب الصيغة التحليلية للجداء الشعاعي كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}\end{aligned}}$$

حيث نكتب مركبات الجداء الشعاعي كالاتي:

$$C_x = (A_yB_z - A_zB_y),\ C_y = (A_zB_x - A_xB_z),\ C_z = (A_xB_y - A_yB_x)$$

مثال: اوجد عبارة الجداء الشعاعي للشعاعين: $\vec{B}(2،3، -1)$ و $\vec{A}(1،1،1)$

ثم اوجد مقدار الزاوية المحصورة بينهما.

الحل:
$$\vec{C} = \vec{A}\Lambda\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = [(1\times(-1)) - (1\times 3)]\vec{\imath} - [(1\times -1) -$$
$$(1\times 2)]\vec{\jmath} + [(1\times 3) - (1\times 2)]\vec{k} = -4\vec{\boldsymbol{\imath}} + 3\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{\boldsymbol{k}}$$

➢ حساب مقدار الزاوية:

بما ان: $|\vec{A}\Lambda\vec{B}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

بما ان: $|\vec{A}\Lambda\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|sin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{|\vec{A}\Lambda\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(1)^2}}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$

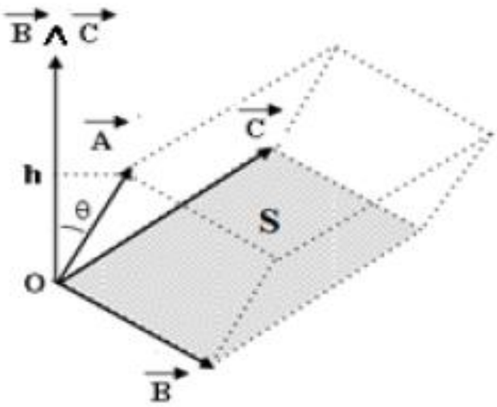
$$sin\theta = \frac{|\vec{A}\Lambda\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{42}} = 0.786 \Rightarrow \theta \approx 38°$$

II-4-5- الجداء الثلاثي المختلط:

لتكن الأشعة $\vec{\boldsymbol{A}}$، $\vec{\boldsymbol{B}}$ و $\vec{\boldsymbol{C}}$ معرفة في الأساس$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. الجداء الثلاثي المختلط عبارة عن قيمة سلمية α ناتجة عن الجداء السلمي لأحد الأشعة مع الجداء الشعاعي للشعاعين الأخريين.

$$\alpha = \vec{\boldsymbol{A}}.(\vec{\boldsymbol{B}}\Lambda\vec{\boldsymbol{C}})$$

هندسيا تمثل قيمة الجداء الثلاثي المختلط حجم متوازي السطوح ذو الاضلاع $\vec{\boldsymbol{A}}$، $\vec{\boldsymbol{B}}$ و $\vec{\boldsymbol{C}}$.



الشكل (I-11): الجداء الثلاثي المختلط

وصيغه التحليلية تكتب كالاتي:

$$\alpha = \vec{\boldsymbol{A}}.\left(\vec{\boldsymbol{B}}\Lambda\vec{\boldsymbol{C}}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} & \boldsymbol{A_z} \\ \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} & \boldsymbol{B_z} \\ \boldsymbol{C_x} & \boldsymbol{C_y} & \boldsymbol{C_z} \end{vmatrix}$$

- **خصائص الجداء الثلاثي المختلط:**
  - **التبديل الدائري:** $\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{C}\Lambda\vec{A}\right)$
  - $\vec{A}.\left(\vec{B}\Lambda\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right).\vec{C}$
  - يكون الجداء المختلط معدوما اذا كانت الأشعة $\vec{\boldsymbol{A}}$، $\vec{\boldsymbol{B}}$ و $\vec{\boldsymbol{C}}$ تنتمي الى نفس المستوى.
- **الجداء الثلاثي الشعاعي:** يعرف الجداء الثلاثي الشعاعي للأشعة $\vec{\boldsymbol{A}}$، $\vec{\boldsymbol{B}}$ و $\vec{\boldsymbol{C}}$ كما يلي:

$$\vec{\boldsymbol{A}}\Lambda\left(\vec{\boldsymbol{B}}\Lambda\vec{\boldsymbol{C}}\right) = \vec{\boldsymbol{B}}.\left(\vec{\boldsymbol{A}}\Lambda\vec{\boldsymbol{C}}\right) - \vec{\boldsymbol{C}}\Lambda\left(\vec{\boldsymbol{A}}\Lambda\vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

II-4-6- اشتقاق الاشعة:

ليكن $\vec{A}(t)$ شعاع يتعلق بالزمن،

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{\imath} + A_y(t)\vec{\jmath} + A_z(t)\vec{k}$$

يمكن اشتقاق الشعاع $\vec{A}(t)$ بالنسبة للزمن كما يلي:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dA_x}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dA_x}{dt}\vec{k}$$

- **خصائص اشتقاق الأشعة:**
  - $\frac{d}{dt}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$
  - $\frac{d}{dt}\left(\lambda\vec{A}\right) = \lambda\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\frac{d\lambda}{dt}$
  - $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt}$
  - $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\Lambda\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\Lambda\vec{B} + \vec{A}\Lambda\frac{d\vec{B}}{dt}$

III- المؤثرات التفاضلية:

يعرف المؤثر الشعاعي التفاضلي **نبلا** $(\boldsymbol{Nabla})$ في المعلم الكارتيزية والذي يرمز له بالرمز $\vec{\nabla}$ كالتالي:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

المؤثر التفاضلي **نبلا** يسلك سلوك دالة شعاعية و يدخل على الدوال السلمية أو الدوال الشعاعية حتى تقوم بإنجاز نوع من العمليات التفاضلية.

$\left(\frac{\partial}{\partial x}، \frac{\partial}{\partial y}، \frac{\partial}{\partial z}\right)$ المشتقات الجزئية تمثل مركبات مؤثر نبلا.

III-1- مؤثر التدرج:

لتكن الدالة السلمية $f(x,y,z)$. تدرج الدالة $f(x,y,z)$ هو شعاع يرمز له بالرمز $\overrightarrow{grad}f$. فمؤثر التدرج يدخل على الدالة السلمية و يحولها الى شعاع، مركباته هي المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$. و يعرف رياضيا في الاحداثيات الكارتيزية كالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{f} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

أي أن شعاع التدرج يعبر عن تغيرات الدالة السلمية، و طويلته تساعد على تحديد جهة تلك التغيرات.

- **مثال:** حساب تدرج الدالة السلمية $f(x,y,z) = 3x^2y^3z$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = (6y^3zx)\vec{\imath} + (9x^2zy^2)\vec{\jmath} + (3x^2y^3)\vec{k}$$

III-2- مؤثر التفرق:

التفرق يؤثر على الدوال الشعاعية لينتج حقول سلمية و يرمز له بالرمز $(div\,\vec{A})$. ويعرف على انه ناتج الجداء السلمي للمؤثر نبلا في دالّة شعاعية قابلة للاشتقاق. و يعرف رياضيا كما يلي:

$$\boxed{\boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial \boldsymbol{A_x}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{A_y}}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{A_z}}{\partial \boldsymbol{z}}}$$

حيث A_x, A_y, A_z هي مركبات الدالة الشعاعية $\vec{\boldsymbol{A}}(x,y,z)$.

مثال: لنحسب تفرق الدالة الشعاعية: $\vec{A}(x,y,z) = 3xy^3z\vec{i} + 2x^2y^2z\vec{j} + 3x^2y^3\vec{k}$

$$div\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial(3xy^3z)}{\partial x} + \frac{\partial(2x^2y^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2y^3)}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{div\vec{A} = 3y^3z + 4x^2yz}$$

III-3- مؤثر الدوران:

الدوران يؤثر على الدوال الشعاعية لينتج حقول شعاعية و يرمز له بالرمز $(\overrightarrow{rot}\,\vec{A})$. ويعرف على انه ناتج الجداء الشعاعي للمؤثر نبلا في دالّة شعاعية قابلة للاشتقاق. يعرف في الاحداثيات الكارتيزية:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\,\vec{A}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

مثال: لنحسب دوران الدالة الشعاعية:

$$\vec{A}(x,y,z) = 4xy\vec{i} - 6yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

بتطبيق تعريف الدوران نجد:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy & -6yz^2 & 9xy^3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(27xy^2 + 12yz)\vec{i} + (-9y^3)\vec{j} + (-4x)\vec{k}}$$

III-4- مؤثر لابلاس:

رياضيا يعرف مؤثر لابلاس كالتالي:

$$\boldsymbol{\Delta A = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}A = \vec{\nabla}^2 A}$$

و نكتب عبارة لابلاس للدالة السلمية $A(x,y,z)$ في الاحداثيات الكارتيزية كالتالي:

$$\boxed{\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}}$$

و نكتب عبارة لابلاس للدالة السلمية $\vec{A}(x, y, z)$ في الاحداثيات الكارتيزية كالتالي:

$$\boxed{\Delta\vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{\imath} + \Delta A_y\vec{\jmath} + \Delta A_z\vec{k}$$

مثال: حساب لابلاس الدالة: $f(x, y, z) = 3x^3y^2z$

$$\Delta A = \frac{\partial^2(3x^3y^2z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(3x^3y^2z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(3x^3y^2z)}{\partial z^2}$$

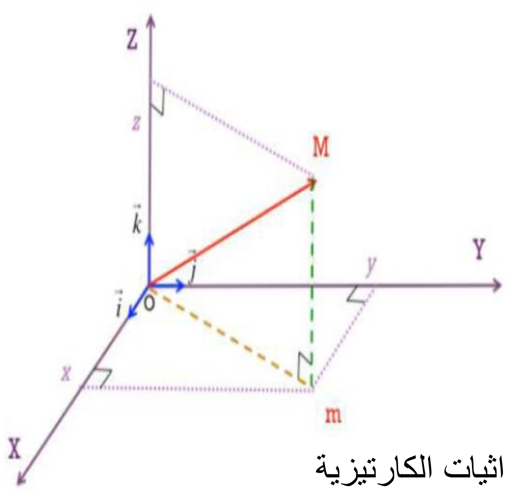
$$\Delta A = 18xy^2z\vec{\imath} + 6x^3z\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

IV- جمل الإحداثيات:

IV-1- الإحداثيات الكارتيزية:

ليكن المعلم الكارتيزي (O, X, Y, Z) المزود بالأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$، و لتكن النقطة M في هذا المعلم و المعرفة بالإحداثيات الديكارتية (x, y, z) و التي تمثل اسقاطات النقطة M على المحور Ox، Oy، Oz. يعرف الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في المعلم الكارتيزي كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}$$



الشكل (I-12): الاحداثيات الكارتيزية

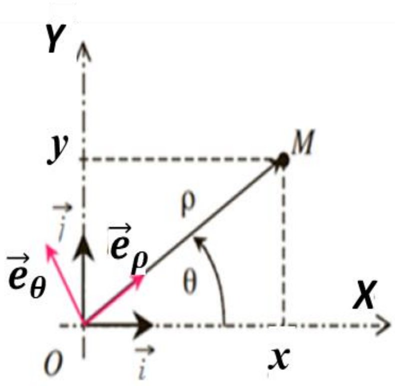
و طويلته تكتب: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

IV-2- الإحداثيات القطبية:

يعرف الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في الاحداثيات القطبية بالطويلة $\rho(t)$ و الزاوية القطبية $\theta(t)$ و اللذين يتغيران بدلالة الزمن. حيث تمثل $\rho(t)$ بعد النقطة M عن المبدا O و تمثل $\theta(t)$ زاوية الدوران الموجهة.

إذن نعرف شعاع موضع النقطة $M(\rho, \theta)$ في المعلم القطبي المزود بالأساس $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ كمايلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}}$$



الشكل (13-I): الاحداثيات

حيث الاحداثي القطبي: $0 \leq \rho \leq +\infty$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\vec{e}_\rho$ هو شعاع وحدة له نفس اتجاه الشعاع $\vec{O}$.

$\vec{e}_\theta$ هو شعاع وحدة عمودي على الشعاع $\vec{e}_\rho$.

- **العلاقة بين المعلم الكارتيزي** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **و المعلم القطبي** $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$

لدينا في المعلم الكارتيزي ثنائي الابعاد:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

بالإسقاط نجد العلاقة بين الاحداثيات:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}}$$

و العلاقة بين اشعة الوحدة:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{e_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}}$$

ايضا:

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_\theta}$$

$$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{e_\theta} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}}$$

و ايضا:

- $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = -\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath} = -\overrightarrow{e_\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}}$$

مثال: أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة: $M(6,\frac{\pi}{6})$

لدينا:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta = 6cos\frac{\pi}{6} = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ y = \rho sin\theta = 6sin\frac{\pi}{6} = 6\frac{1}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{M\left(6,\frac{\pi}{6}\right) \to M(3\sqrt{3},3)}$$

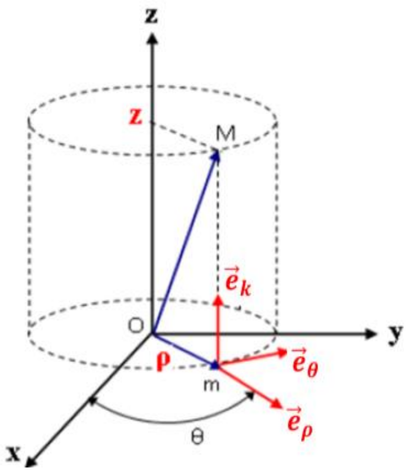
IV-3- الإحداثيات الأسطوانية:

تمثل الإحداثيات الأسطوانية في معلم ثلاثي الأبعاد حيث يتم تمثيل نقطة M في المعلم الاسطواني ذو القاعدة $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ بالثلاثية (ρ,θ,z) حيث:

$\boldsymbol{\rho}$ تمثل البعد عن المحور Oz $(\rho \geq 0)$.

$\boldsymbol{\theta}$ تمثل زاوية الدوران حول المحور Oz $(0 \leq \theta \leq 2)$

z هو المسافة بين المستوي (Oxy) و النقطة M $(-\infty \leq z \leq +\infty)$



الشكل (I-14): الاحداثيات الاسطوانية

إذن نعرف شعاع موضع النقطة $M(\rho,\theta,z)$ في المعلم الاسطواني $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_{\theta,}\vec{k})$ كمايلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}}$$

و نعرف طويلته بـ: $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

- **العلاقة بين المعلم الفضائي الكارتيزي $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و المعلم الإسطواني $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k})$:**

لدينا في المعلم الكارتيزي ثلاثي الابعاد:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

ايضا من خلال الرسم المقابل نجد:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{j} = sin\theta\overrightarrow{e_\rho} + cos\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

ملاحظة: اشعة الاساس $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k})$ هي اشعة متعامدة و متجانسة و مباشرة اي:

$$\vec{k} = \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta,\quad \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \wedge \vec{k},\quad \vec{e}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho$$

مثال: أوجد الإحداثيات الإسطوانية للنقطة: $M(1,3,-2)$

لدينا :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\theta = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{3}{1} = 71.56°$$

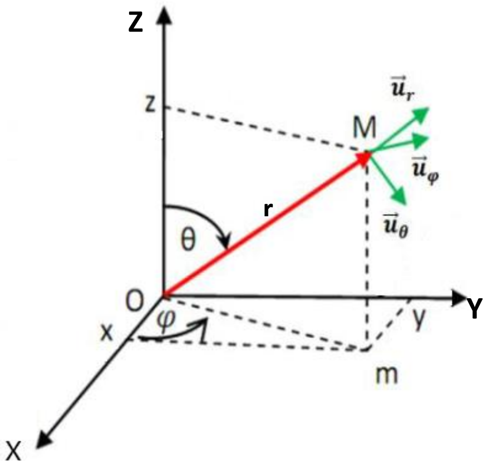
$$z = -2$$

$$M(1,3,-2) \rightarrow M\left(\sqrt{10}, 71.56, -2\right)$$

IV-4- الإحداثيات الكروية:

تمثل الإحداثيات الكروية في معلم ثلاثي الأبعاد ايضا، حيث يتم تمثيل نقطة M في المعلم الكروي ذو القاعدة $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ بالثلاثية $M(r,\theta,\varphi)$ حيث:

- r يمثل بعد موضع النقطة M عن المبدأ O حيث $0 \le r \le +\infty$.
- θ تمثل الزاوية التي يصنعها شعاع الموضع $\vec{O}$ مع المحور (Oz) حيث: $0 \le \theta \le \pi$



الشكل (I-15): الاحداثيات الكروية

- φ تمثل الزاوية التي يصنعها شعاع الموضع $\vec{O}$ مع المحور $\overrightarrow{Om}$ حيث m يمثل مسقط النقطة M على المستوي (oxy) .

حيث $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

نعرف شعاع الموضع في الاحداثيات الكروية كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{r}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}}$$

- **العلاقة بين المعلم الفضائي الكارتيزي$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ و المعلم الكروي $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$:**

للانتقال بين الاحداثيات الكروية و الديكارتية نستعمل العلاقات التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = r\sin\theta\cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = r\sin\theta\sin\varphi} \\ \boldsymbol{z = r\cos\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \boldsymbol{\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)} \\ \boldsymbol{\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)} \end{cases}$$

ايضا يكن ان نكتب العلاقات التي تربط بين اشعة وحدة المعلمين كالتالي:

بما ان:

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = (r\sin\theta\cos\varphi)\vec{\imath} + (r\sin\theta\sin\varphi)\vec{\jmath} + (r\cos\theta)\vec{k}$$

فان:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{\sin\theta\cos\varphi})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{\sin\theta\sin\varphi})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{\cos\theta})\vec{\boldsymbol{k}}$$

و كذلك ن الشكل المقابل نجد:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}} = (\boldsymbol{\cos\theta\cos\varphi})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{\cos\theta\sin\varphi})\vec{\boldsymbol{\jmath}} - (\boldsymbol{\sin\theta})\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}$$

و منه نلخص:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = (sin\,\theta\cos\varphi)\vec{\imath} + (\sin\theta sin\varphi)\vec{\jmath} + (cos\theta)\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\theta} = (cos\,\theta\cos\varphi)\vec{\imath} + (\cos\theta sin\varphi)\vec{\jmath} - (sin\theta)\vec{k} \\ \overrightarrow{e_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases}}$$

ملاحظة: اشعة الاساس $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_{\theta,}\vec{e}_\varphi)$ هي اشعة متعامدة و متجانسة و مباشرة اي:

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$$

V- الانتقالات العنصرية في جملة الاحداثيات:

V-1- الاحداثيات الكارتيزية:

نكتب شعاع موضع النقطة M في المعلم الكارتيزي كما يلي:

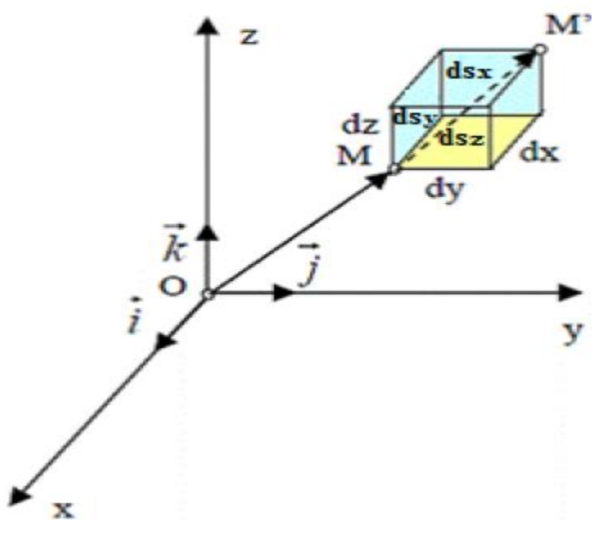
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

في الإحداثيات الكارتيزية الانتقال المتناهي في الصغر $\overrightarrow{MM'}$ يمكن تحليله إلى ثلاثة انتقالات صغيرة جدا وفق أشعة الوحدة حيث يكون انتقال النقطة M خلل زمن عنصري dt كما يلي:

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}}$$

اي أن الانتقال يكون على المحاور الثلاثة والطول العنصري يصبح:

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$



الشكل (16-I): الانتقال العنصري في المعلم الكارتيزي

- **المساحة العنصرية:**

$$dS_x = dy.dz, dS_y = dx.dz, dS_z = dx.dy$$

- **الحجم العنصري:**

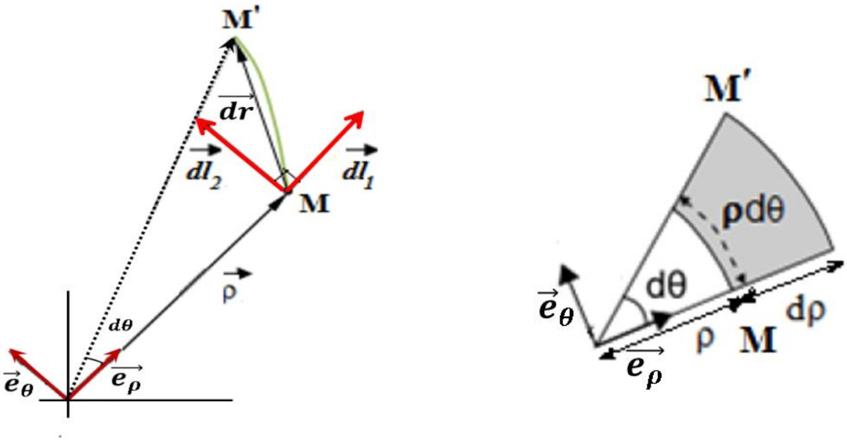
$$dV = dx.dy.dz$$

V-2- الاحداثيات القطبية:

نكتب شعاع موضع النقطة M في المعلم القطبي $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{e_\rho}}$$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات القطبية يكافئ مجموع انتقاليين عنصريين متعامدين فيما بينهما أحدهما قطري في اتجاه $\overrightarrow{e_\rho}$ و الآخر عرضي في اتجاه $\overrightarrow{e_\theta}$.



الشكل (I-17): الانتقال العنصري في المعلم القطبي

$$\boldsymbol{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{dr} = dl_1\overrightarrow{e_\rho} + dl_2\overrightarrow{e_\theta}}$$

- $\overrightarrow{dl_1}$ هو انتقال ناتج عن تغير ρ في الطول بالمقدار $d\rho$ مع ثبات الزاوية θ فهو U وفق اتجاه $\overrightarrow{e_\rho}$.
- $\overrightarrow{dl_2}$ هو انتقال ناتج عن تغير ρ في الاتجاه بسبب تغير الزاوية θ بالمقدار dθ مع ثبات الطول ρ و التغير هذه الحالة يتم وفق دائرة نصف قطرها ρ بإزاحة عنصرية $dl_2 = \rho d\theta$ محمولة على$\overrightarrow{e_\theta}$.

اذن الانتقال العنصري الكلي يكتب كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta}}}$$

و طويلة الانتقال العنصري من M الى 'M:

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{dr}| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}}$$

و السطح العنصري في الاحداثيات القطبية تكتب كالتالي:

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

مثال: أحسب باستعمال الإحداثيات القطبية محيط و مساحة دائرة نصف قطرها R.

الاجابة:

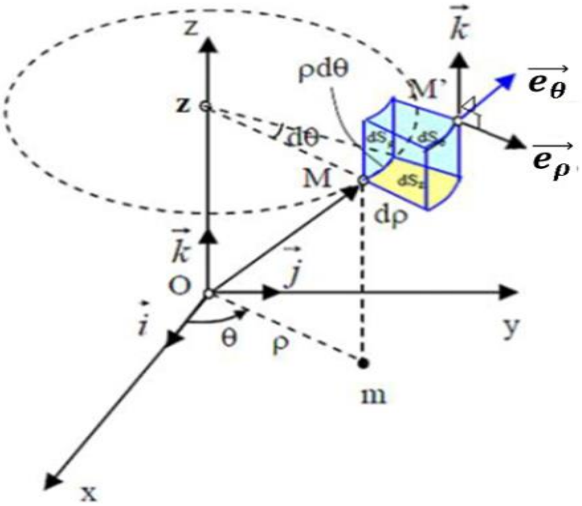
1. محيط الدائرة: $dl = \rho d\theta \Rightarrow l = \int_0^{2\pi} \rho d\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta = \boldsymbol{2\pi R}$
2. مساحة دائرة: $\boldsymbol{dS = \rho d\rho d\theta \Rightarrow s = \int_0^{R} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2}$

V-3- الاحداثيات الاسطوانية:

نكتب شعاع موضع النقطة M في المعلم الاسطواني $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ كما يلي:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$$

الانتقال العنصري في الإحداثيات الاسطوانية يكافئ مجموع ثلاثة انتقالات عنصرية متعامدة في الاتجاهات الثلاث $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.



الشكل (I-18): الانتقال العنصري في المعلم الاسطواني

اي ان: $\rho \to d\rho, \quad \theta \to \rho d\theta, \quad z \to dz$

و بالتالي تكتب عبارة الانتقال العنصري في الاحداثيات الاسطوانية كالتالي: $\boldsymbol{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dr}} =$

$$\boldsymbol{d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{k}}$$

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{dr}| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2}}$$

- **المساحة العنصرية:**

$$dS_{\perp r} = \rho d\theta dz, \;\; dS_{\perp z} = \rho d\rho d\theta$$

- **الحجم العنصري:**

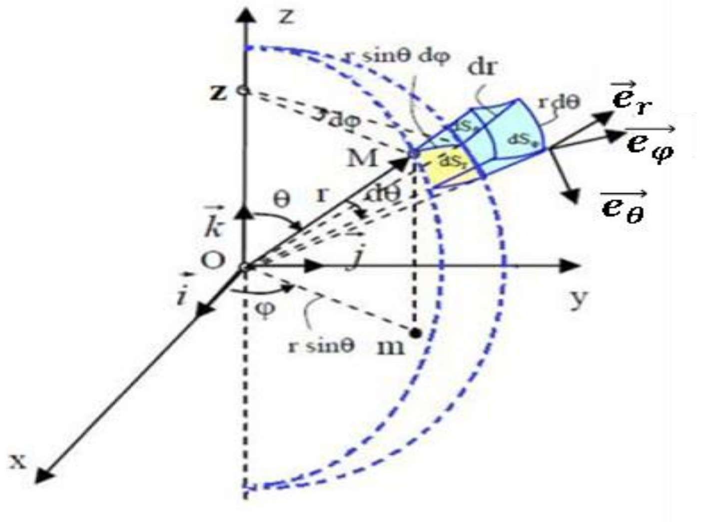
$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

V-4- الاحداثيات الكروية:

نكتب شعاع موضع النقطة M في المعلم الكروي $(\vec{e} \;\; ,\vec{e}_{\theta},\overrightarrow{e_{\varphi}})$

كما يلي: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\overrightarrow{e_r}$

الانتقال العنصري في الإحداثيات الكروية يكافئ مجموع ثلاثة انتقالات عنصرية متعامدة في الاتجاهات الثلاث $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta},\overrightarrow{e_{\varphi}})$.



الشكل (19-I): الانتقال العنصري في المعلم الكارتيزي

اي ان: $r \to dr, \;\; \theta \to rd\theta, \;\; \varphi \to \rho d\varphi = rsin\theta d\varphi$

و بالتالي تكتب عبارة الانتقال العنصري او شعاع الازاحة او الانتقال

في الاحداثيات الكروية كالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{dr}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{rd\theta}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{rsin\theta d\varphi}\overrightarrow{\boldsymbol{e_{\varphi}}}}$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{dr}}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{dr})^2 + (\boldsymbol{rd\theta})^2 + (\boldsymbol{rsin\theta d\varphi})^2}$$

- **المساحة العنصرية:**

$$dS_{\perp r} = r^2 d\theta sin\theta d\varphi$$

- **الحجم العنصري:**

$$dV = r^2 dr d\theta sin\theta d\varphi$$

مثال: حساب ساحة سطح و حجم كرة نصف قطرها R

مساحة الكرة:

$$dS_{\perp r} = r^2 d\theta sin\theta d\varphi \Rightarrow S = R^2 \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2[-cos\theta]_0^{\pi}[\varphi]_0^{2\pi} = \boldsymbol{4\pi R^2}$$

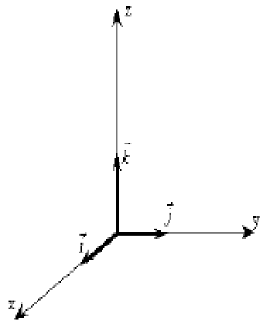
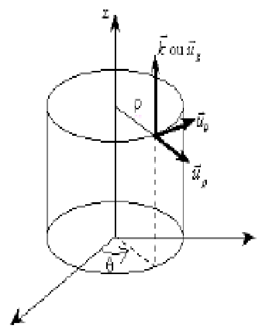
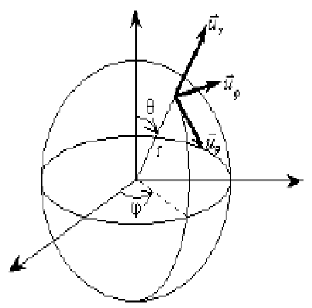
حجم كرة:

$$dV = r^2 dr d\theta sin\theta d\varphi \Rightarrow V = \iiint r^2 dr d\theta sin\theta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\boldsymbol{V = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-cos\theta]_0^{\pi}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^3}{2}}$$

ملحق: جدول يلخص المؤثرات التفاضلية في مختلف الاحداثيات

	الاحداثيات الكارتيزية	الاحداثيات الإسطوانية	الاحداثيات الكروية
			
	$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$	$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\infty \leq \theta \leq +\infty$	$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
	$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
	$dV = dxdydz$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$
$\overrightarrow{grad}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
div	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\left\{\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right\}$
$\overrightarrow{rot}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 sin\theta}\left(\frac{\partial(rsin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rsin\theta A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{k}$

الفصل الثالث

الحـــــــــركيات

3 الحركيـــــــات

I- مقدمـــــــــة

الحركيات هو علم يهتم بدراسة حركة الجسيمات أو حركة النقطة المادية دون التطرق للقوى المسببة لهذه الحركة. و النقطة المادية هي تلك الجسيمات المتحركة ذات الكتلة m وابعادها متناهية في الصغر(مهملة الابعاد)، وهي نقطة مميزة حركتها تمثل كل نقاط الجسم و كتلتها تساوي كتلة الجسم. ويطلق على النقطة المادية أحيانا إسم **المتحرك.**

نقول ان الجسم يتحرك اذا كان موضعه يتغير بدلالة الزمن.

نقوم هنا بعرض بعض المفاهيم التي سنعتمدها في هذا الفصل:

- **الحركة و السكون** هما مفهومان نسبيان فقد يكون الجسم متحركا بالنسبة لمعلم مرجعي وساكنا بالنسبة لمعلم مرجعي آخر، لهذا وجب عند دراسة الحركة تحديد معلم مرجعي تستند اليه الحركة.
- **النقطة المادية** هي أصغر جسم مادي ليس له أبعاد يحدد بإحداثياته بالنسبة لمعلم محدد.
- **المسار** هو جملة النقاط التي تشغلها النقطة المادية تدريجيا خلال الزمن وعادة ما نعبر عن المسار بمعادلة مستقلة عن الزمن تربط بين إحداثيات المتحرك.
- **المعادلة الزمنية للحركة:** عندما تكون النقطة المادية M(x,y,z) في حالة حركة فان احداثياتها تكون دوال للزمن اي ان:

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = h(t) \\ z(t) = g(t) \end{cases}$$

و تدعى هذه الاحداثيات **بالمعادلات الزمنية للحركة.**

II- مميزات الحركة:

يهتم علم الحركيات بالمقادير التي تصف حركة الجسم و المتمثلة في موضع الجسم ومساره وسرعته وتسارعه، والتي نعينها بإحداثيات مختلفة.

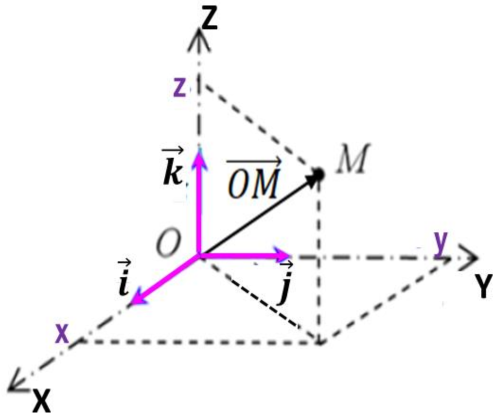
II-1- عبارة شعاع الموضع السرعة و التسارع في الإحداثيات الديكارتية:

II-1-1- شعاع الموضع: هو شعاع يعبر عن **موضع** المتحرك عند كل لحظة t.

يعرف شعاع موضع نقطة مادية M في لحظة t في معلم كارتيزي ذا الاساس $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ وفقا للعبارة التالية:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}+z(t)\vec{k}}$$

حيث x(t), y(t), z(t) تمثل احداثيات النقطة M و هي اسقاطات شعاع الموضع على محاور المعلم.



الشكل (I-1): شكل يوضح شعاع الموضع في العلم فضائي.

II-1-2- شعاع السرعة:

السرعة هي مقدار شعاعي يمثل معدل تغير شعاع الموضع بالنسبة للزمن. و تنقسم السرعة الى نوعين:

II-1-2-1- السرعة المتوسطة: هي النسبة بين المسافة المقطوعة من طرف المتحرك و الزمن المستغرق من طرف المتحرك و تعرف كما يلي:

$$\overrightarrow{V_{moy}}=\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{t'-t}=\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}=\frac{\Delta\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

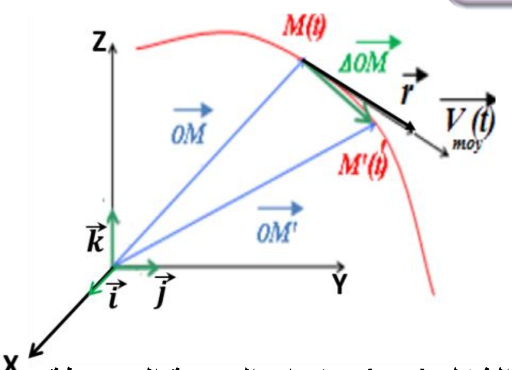
$$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{V_{moy}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\jmath}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}}$$

حيث: $\Delta\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{MM'}$

$\overrightarrow{MM'}$ يمثل شعاع الانتقال.

السرعة المتوسطة لنقطة M تكون موازية لشعاع الانتقال

ولا تتعلق بالمسار المتبع من قبل المتحرك خلال المدة Δt.



الشكل (I-2): شعاع السرعة المتوسطة

II-1-2-2- السرعة اللحظية: يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطية مادية في لحظة على انها مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن.

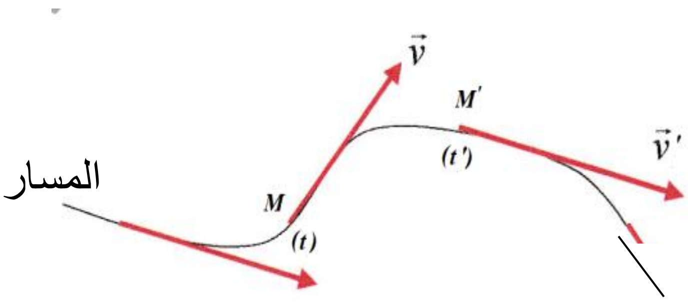
$$\vec{V}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Rightarrow\vec{V}(t)=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

و نكتب:

$$\boxed{\vec{V}(t)=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}}$$

حيث $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ تمثل مشتقات بالنسبة للزمن لإحداثيات النقطة المادية M.

يكون شعاع السرعة اللحظية مماسيا للمسار عند M و اتجاهه في اتجاه الحركة. إذا كانت طويلة السرعة ثابتة نقول أن الحركة منتظمة.



الشكل (I-3): شعاع السرعة اللحظية

ونكتب طويلة عبارة طويلة شعاع السرعة اللحظية في المعلم الفضائي كما يلي:

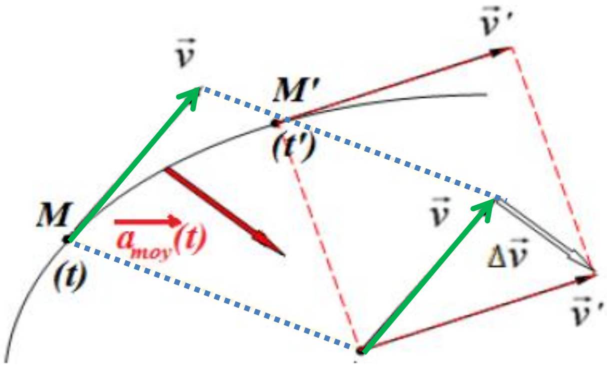
$$\|\vec{V}(t)\|=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

II-1-3- شعاع التسارع:

II-1-3-1- شعاع التسارع المتوسط: يعبر عن مقدار تغير شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن. فاذا كان للنقطة المادية سرعة لحظية $\vec{V}$ عند اللحظة الزمنية t و السرعة اللحظية $\vec{V'}$ عند اللحظة الزمنية *t'* فان شعاع التسارع المتوسط للنقطة المادية يكتب كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{a_{moy}}=\frac{\vec{V'}-\vec{V}}{t'-t}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

شعاع التسارع المتوسط $\overrightarrow{a_{moy}}$ يكون دوما موازي لـ $\Delta\vec{V}$ و متجه نحو تقعر المسار كما يوضح الشكل ادناه.



الشكل (I-4): شعاع التسارع المتوسط

II-1-3-2- شعاع التسارع اللحظي: يعرف شعاع التسارع اللحظي على انه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}}$$

حيث $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ تمثل المشتقات الثانية بالنسبة للزمن لإحداثيات النقطة المادية M.

و ايضا يمكن ان نكتب: $\vec{a}(t) = \dot{V}_x\vec{\imath} + \dot{V}_y\vec{\jmath} + \dot{V}_z\vec{k}$

- إذا كانت $\vec{a}(t) = 0$ نقول ان الحركة منتظمة أو المتحرك في حالة سكون.
- إذا كانت ثابت $= \vec{a}(t)$ نقول ان الحركة متغيرة بانتظام.
- $\vec{a}(t).\vec{V}(t) > 0$ نقول ان الحركة متسارعة (شعاعي السرعة و التسارع لهما نفس الاتجاه).
- $\vec{a}(t).\vec{V}(t) < 0$ نقول ان الحركة متباطئة (شعاعي السرعة و التسارع لهما عكس الاتجاه).

II-1-3-2- معادلة المسار:

و هي معادلة تربط بين الاحداثيات و تأخذ الشكل $f(x, y, z) = 0$.

فمثلا معادلة المسار

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0$$

تمثل مسار ذات شكل كروي مركزه O و نصف قطره هو R.

تمرين: تعطى احداثيات نقطة مادية M ب:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = bt} \\ \boldsymbol{y(t) = bt(1 - \alpha t)} \end{cases}$$

حيث b وα موجبان ثابتين

1- اوجد شعاع الموضع و شعاع السرعة اللحظية و شعاع التسارع اللحظي للمتحرك M.

2- معادلة المسار و حدد طبيعته.

الحل:

1- شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = bt \\ y = bt(1 - \alpha t) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = bt\vec{\imath} + bt(1 - \alpha t)\vec{\jmath}$$

2- شعاع السرعة اللحظية:

$$\vec{V} = \begin{cases} \dot{x} = b \\ \dot{y} = b - 2b\alpha t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = b\vec{\imath} + b(1 - 2\alpha t)\vec{\jmath}$$

3-شعاع التسارع اللحظي:

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2b\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -2\alpha b\vec{\jmath}$$

3- معادلة المسار وطبيعته:

$$x = bt \Rightarrow t = \frac{x}{b}$$

$$y = bt(1 - \alpha t) = b\left(\frac{x}{b}\right)\left(1 - \alpha\left(\frac{x}{b}\right)\right) = x\left(1 - \frac{\alpha}{b}x\right) = x - \frac{\alpha}{b}x^2$$

$$\boldsymbol{y = x - \frac{\alpha}{b}x^2}$$

المسار عبارة عن قطع مكافئ.

في بعض المسائل يصعب علينا دراسة الظواهر باستعمال الاحداثيات الكارتيزية لهذا نلجأ لاستعمال معالم اخرى لتبسيط الحساب. و من اكثر المعالم شيوعا هي المعلم القطبي، الاسطواني و الكروي.

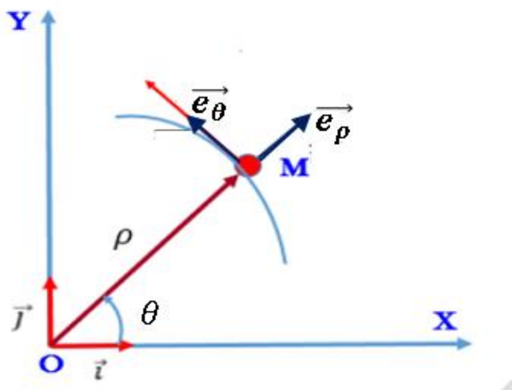
II--2- عبارة شعاع الموضع و السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية:

II-2-1- شعاع الموضع:

اذا كان مسار المتحرك موجود في مستوي فانه يمكن تحديد موضع المتحرك بواسطة الاحداثيات المستطيلة او القطبية.

لتكن النقطة المادية M و مسارها (C) موجود في المستوي. يعرف شعاع الموضع للنقطة M في المعلم القطبي $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho}$$



الشكل (I -5): الإحداثيات القطبية.

ρ يمثل طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$، و $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ يمثلان اشعة الوحدة في المعلم القطبي حيث أن:

$$\vec{e_r} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}, \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

II-2-2- شعاع السرعة:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

و بما ان: $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) = \dot{\theta}(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

اي ان:

$$\boxed{\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

ومنه:

$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

حيث:

$\dot{\rho}$ تمثل المركبة القطرية لشعاع السرعة.

$\dot{\theta}$ تمثل السرعة الزاوية للنقطة المادية M.

$\boldsymbol{\rho\dot{\theta}}$ تمثل المركبة العرضية أو المماسية لشعاع السرعة.

اذن عبارة السرعة في الاحداثيات القطبية تأخذ الشكل:

$$\boxed{\vec{V}(t) = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta}$$

$$V_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{و} \quad V_\theta = \rho\dot{\theta} = \rho\frac{d\theta}{dt}$$

و منه طويلة شعاع السرعة يكتب كما يلي:

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

II-2-3- شعاع التسارع:

باشتقاق شعاع السرعة نجد:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\theta})}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

لنحسب:

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}(-cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath}) = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$$

اذن:

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}}$$

نكتب عبارة التسارع كما يلي:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}(\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}) \Rightarrow \vec{a}(t)$$
$$= \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)}_{a_\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \underbrace{(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})}_{a_\theta}\vec{e}_\theta}$$

a_ρ : المركبة القطرية لشعاع التسارع.

a_θ**:** ا لمركبة العرضية او المماسية لشعاع التسارع

$\ddot{\theta}$**:** التسارع الزاوي للنقطة M.

اذن عبارة شعاع التسارع في الإحداثيات القطبية تكتب كما يلي:

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\theta\vec{e}_\theta}$$

حيث مركبات التسارع تأخذ الشكل التالي: $\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \end{cases}$

و عبارة طويلة التسارع تكتب: $|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$

II-3- عبارة شعاع الموضع و السرعة و التسارع في الإحداثيات الاسطوانية:

في المعلم الاسطواني $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ المتعامد و المتجانس، يحدد موضع النقطة M بواسطة الاحداثيات السلمية $\rho(t), \theta(t), z(t)$.

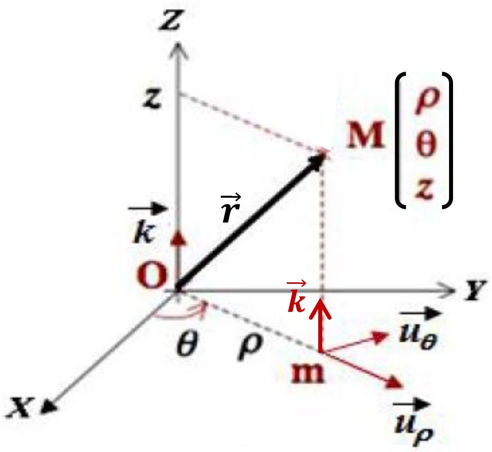
II-3-1- شعاع الموضع:

يعرف شعاع الموضع في الاحداثيات الاسطوانية كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}}$$

حيث ρ و θ يمثلان الاحداثيات القطبية لمسقط النقطة M على المستوي (OXY).

Z يمثل احداثية النقطة M وفق المحور (OZ).



الشكل (I-6): الإحداثيات الاسطوانية.

نذكر بالعلاقة التي تربط بين اشعة الوحدة في المعلم الديكارتي و الاسطواني:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\vec{i} + \rho\sin\theta\vec{j} + z\vec{k}}$$

نشير الى ان $\overrightarrow{e_\rho}$ و $\overrightarrow{e_\theta}$ هي اشعة متعلقة بالزمن فهي اشعة وحدة ثابتة في الطول و غير ثابتة في الاتجاه.

II-3-2- شعاع السرعة:

كما راينا سابق للحصول على عبارة شعاع السرعة نقوم باشتقاق شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e_\rho} + z\vec{k}) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{V} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{k}}$$

حيث مركبات شعاع السرعة في المعلم الاسطواني تكتب كما يلي:

$$V_\rho = \dot{\rho}, \qquad V_\theta = \rho\dot{\theta}, \qquad V_z = \dot{z}$$

و نعرف طويلة شعاع السرعة بالعبارة:

$$|\vec{V}| = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2}$$

II-3-3- شعاع التسارع:

للحصول على عبارة شعاع التسارع في الاحداثيات الاسطوانية نقوم باشتقاق شعاع السرعة.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{k})$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{K}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e_\rho}) + \ddot{z}\vec{K}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{K}}$$

اي ان مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات الاسطوانية هي:

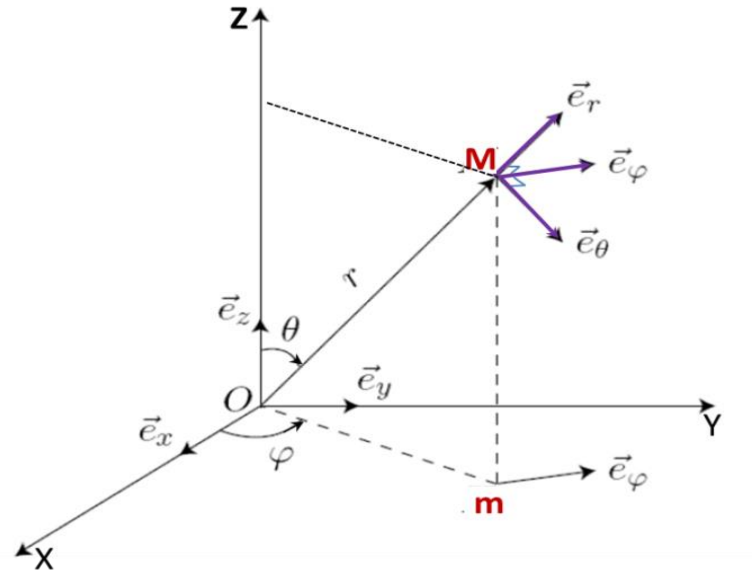
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}), \qquad V_z = \ddot{z}$$

و نعرف طويلة شعاع التسارع بالعبارة:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_\rho)^2 + (a_\theta)^2 + (V_z)^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + (\ddot{z})^2}$$

II-4- عبارة شعاع الموضع و السرعة و التسارع في الإحداثيات الكروية:

في المعلم الكروي المزود بالأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ ، و هي اشعة وحدة متعلقة بالزمن، نحدد موضع النقطة M بالدوال السلمية ρ, θ, φ التابعة للزمن كما هو موضح في الشكل المقابل.



الشكل(I-7): الإحداثيات الكروية.

نلاحظ من الشكل ان:

$|\overrightarrow{OM}| = r$ حيث r تمثل بعد النقطة M عن المبدأ O.

$\theta = (\widehat{OM, OZ})$ تمثل الزاوية المحصورة بين شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و المحور (OZ).

$\varphi = (\widehat{OX, Om})$ تمثل الزاوية المحصورة بين المحور (OX) و الشعاع $\overrightarrow{Om}$. حيث m تمثل المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (OXY).

II-4-1- شعاع الموضع:

نعرف شعاع موضع النقطة M في المعلم الكروي كما يلي:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$$

II-4-2- شعاع السرعة:

للحصول على عبارة شعاع السرعة في الاحداثيات الكروية نقوم باشتقاق شعاع الموضع:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\overrightarrow{e_r}) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$$

نذكر بالعلاقات التي تربط بين اشعة الوحدة في المعلم الكروي بأشعة وحدة المعلم الديكارتي:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases}$$

حيث:

$$\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

ايضا:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}\right) = \boldsymbol{\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi} \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}\right) = \boldsymbol{-\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{e}_\varphi} \\ \dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}) = \boldsymbol{-\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_r - \dot{\varphi}cos\theta\vec{e}_\theta} \end{cases}$$

بالتعويض في عبارة السرعة بعبارة مشتق $\vec{e}_r$ نجد:

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi}}$$

و بالتالي فان مركبات شعاع السرعة في الاحداثيات الكروية تأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{\boldsymbol{V_r = \dot{r}, \qquad V_\theta = r\dot{\theta}, \qquad V_\varphi = r\dot{\varphi}sin\theta}}$$

عبارة طويلة شعاع السرعة تكتب على الشكل التالي:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{(\boldsymbol{\dot{r}})^2 + \left(\boldsymbol{r\dot{\theta}}\right)^2 + (\boldsymbol{r\dot{\varphi}sin\theta})^2}$$

II-4-3- شعاع التسارع:

وفقا لتعريف التسارع نقوم باشتقاق شعاع السرعة:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi}\right)$$

$$= \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\boldsymbol{\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi}$$

$$\boldsymbol{+ r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}$$

و بالتعويض بعبارات مشتقات اشعة الوحدة نجد:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\dot{\varphi}sin\theta)^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 sin\theta\, cos\theta)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta)\vec{e}_\varphi$$

اي ان: $\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

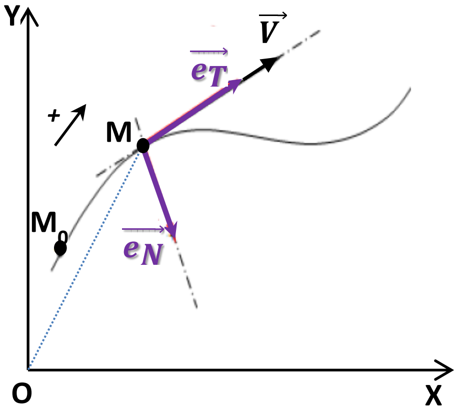
اذن مركبات التسارع تكتب على الشكل التالي:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\dot{\varphi}sin\theta)^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 sin\theta\, cos\theta \\ a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta \end{cases}$$

II-5- الحركة المنحنية و الاحداثيات الذاتية:

لتحديد احداثيات نقطة M تتحرك على **مسار منحني** كيفي نعتمد معلما متعامد مرتبط بالنقطة M، حيث يكون احد محاوره موازي لشعاع السرعة و موجه وفق الاتجاه الموجب للحركة و هو المماس للحركة و شعاع وحدته $\overrightarrow{u_T}$ و المحور الاخر عمودي عليه و متجه الى داخل انحناء المسار و شعاع وحدته $\overrightarrow{u_N}$. و لتحديد وضع النقطة المادية M نقوم بتحديد ما يسمى بالفاصلة المنحنية وفقا للخطوات التالية:

- نحدد الاتجاه الموجب للمسار هو اتجاه الحركة ثم نختار نقطة مرجعية ثابتة M_0 على المسار المنحني كمبدا للحركة.



الشكل(I-8): المعلم الذاتي

تعرف الاحداثية او الفاصلة المنحنية **S** على انها طول القوس من النقطة M_0 الى النقطة M.

$$S = S(t) = \widehat{M_0M(t)}$$

كما تمثل هذه العبارة المعادلة الزمنية للحركة.

و نعرف عبارة السرعة في الاحداثيات المنحنية كالتالي:

- **السرعة المتوسطة:** $\vec{V}_{mo} = \frac{S(t') - S(t)}{t' - t} = \frac{\widehat{MM'}}{t' - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

- طويلة السرعة اللحظية: $V_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$
- شعاع السرعة اللحظية: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dS}\right).\left(\frac{dS}{dt}\right)$

حيث $V = \frac{dS}{dt}$ وهي شدة السرعة اللحظية.

$\vec{e}_T = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dS}$ و هو شعاع الوحدة المماسي في اتجاه الحركة. **و منه:**

$$\boxed{\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{e}_T = \frac{dS}{dt}.\vec{e}_T}$$

- **شعاع التسارع اللحظي:**

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\|\vec{V}\|.\vec{e}_T) = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}.\vec{e}_T + \|\vec{V}\|\frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_N.\frac{V}{R}$$

حيث: $\frac{d\theta}{dt} = w = \frac{V}{R}$ و التي تمثل السرعة الزاوية.

و منه
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}.\vec{e}_T + \frac{V^2}{R}\vec{e}_N}$$

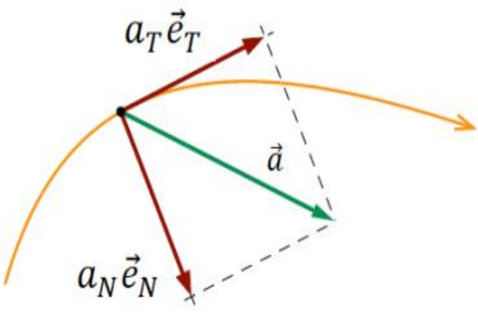
$\vec{e}_N = \frac{d\vec{e}_T}{dt}$ يمثل شعاع الوحدة الناظمي في اتجاه تقعر المسار.

و نسمي المعلم المزود بالإساس $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ المعلم الذاتي، حيث $\vec{e}_T \perp \vec{e}_N$

اي ان:
$$\vec{a} = a_T.\vec{e}_T + a_N\vec{e}_N$$

$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = a_T$ يمثل التسارع المماسي وهو مشتق طويلة السرعة بالنسبة للزمن.

$\frac{V^2}{R} = a_N$ يمثل التسارع المماسي و هو مربع السرعة مقسوم على نصف قطر المسار R.



الشكل (I-9): تمثيل لشعاعي التسارع المماسي و الناظمي

نذكر ان **التسارع المماسي** يعبر عن كيفية تغير قيمة السرعة، بينما **التسارع الناظمي** فيعبر عن تغير اتجاه الحركة.

اذن طويلة التسارع في الاحداثيات المنحنية تكتب كما يلي:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_T)^2 + (a_N)^2}$$

و عبارة نصف قطر المسار تحسب كما يلي:

$$R = \frac{V^2}{a_N}$$

ومن جهة اخرى لدينا:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_T)^2 + (a_N)^2} \Rightarrow a_N = \sqrt{(a)^2 - (a_T)^2}$$

و منه:

$$R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{(a)^2 - (a_T)^2}}$$

- **حالة خاصة:**

في حالة الحركة الدائرية المنتظمة تكون طويلة السرعة $\|\vec{V}\|$ ثابتة، و بالتالي فان:

$$a_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{a_N}$$

اي ان التسارع يكون **مركزيا** اي متجه نحو مركز المسار (الدائرة) في حالة الحركة الدائرية المنتظمة.

III- دراســة الحركات في المستوي:

III-1- الحركة المستقيمة:

أ- **الحركة المستقيمة المنتظمة:** نقول أن حركة نقطة مادية انها **حركة مستقيمة منتظمة** إذا كان المسار مستقيما وشعاع السرعة ثابت وبالتالي فإن التسارع معدوم.

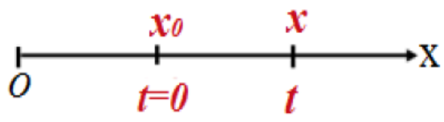
- **المعادلة الزمنية للحركة:** لنختار المحور (XO) كمعلم، و نحدد الشروط الابتدائية بحيث:

$t=0$، $x=x_0$ ، $V=V_0$

و من خلال عملية التكامل لعبارة السرعة نتحصل على عبارة الفاصلة بدلالة الزمن:

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0 \Rightarrow dx = V_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V dt \Rightarrow (x - x_0) = V_0(t - 0)$$

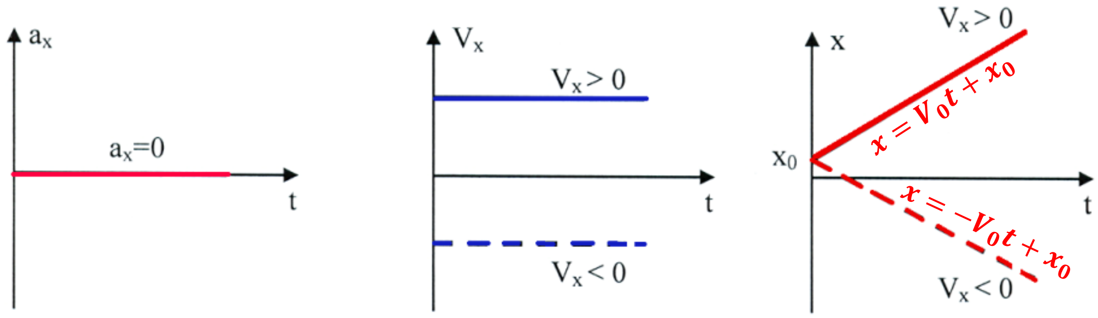
$$\boxed{\Rightarrow x(t) = V_0 t + x_0}$$



نسمي **x** الفاصلة اللحظية بينما **x_0** الفاصلة الابتدائية.

- **مخططات الحركة:**

كما هو موضح في الشكل ادناه مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من الانتقال، السرعة و التسارع بدلالة الزمن.



الشكل (10-I): مخططات الحركة.

ب- **الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:** نقول أن حركة نقطة مادية انها **حركة مستقيمة متغيرة بانتظام** إذا كان المسار مستقيما وشعاع التسارع ثابتا.

فمن خلال الشروط الابتدائية: **t=0**، **$x=x_0$** ، **$V=V_0$** نجد عبارة السرعة اللحظية كالتالي:

$$\boldsymbol{a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = a.dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t a.dt \Rightarrow (V - V_0) = at}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow V(t) = at + V_0}}$$

لدينا ايضا:

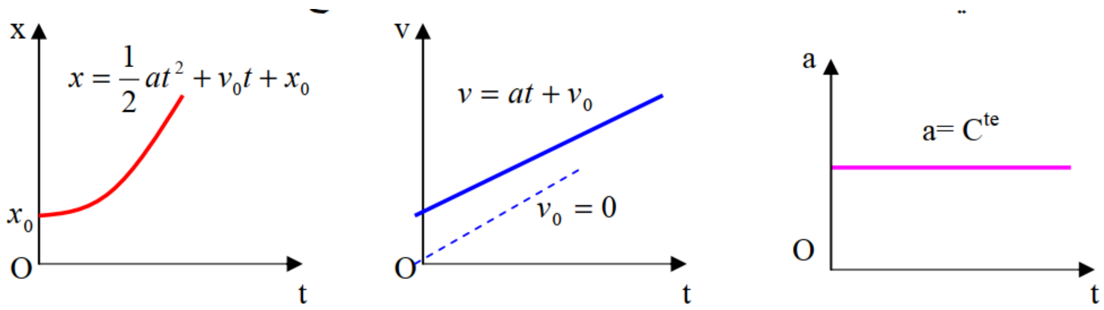
$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt = (\boldsymbol{at} + \boldsymbol{V_0})dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (\boldsymbol{at} + \boldsymbol{V_0})dt$$

$$\Rightarrow (x - x_0) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0}}$$

المعادلة الاخيرة تمثل المعادلة الزمنية للحركة.

مخططات الحركة: يوضح الشكل ادناه مخططات الحركة لكل من الانتقال، السرعة و التسارع بدلالة الزمن.



الشكل (11-I): مخططات الحركة.

III-2- الحركة المستقيمة الجيبية:

تكون حركة النقطة المادية حركة مستقيمة جيبية اذا كتبت المعادلة الزمنية لحركتها على الشكل:

$$\boldsymbol{x(t) = x_m \cos(wt + \varphi)}$$

أو:

$$\boldsymbol{x(t) = x_m sin(wt + \varphi)}$$

كما هو وضح في الشكل ادناه:

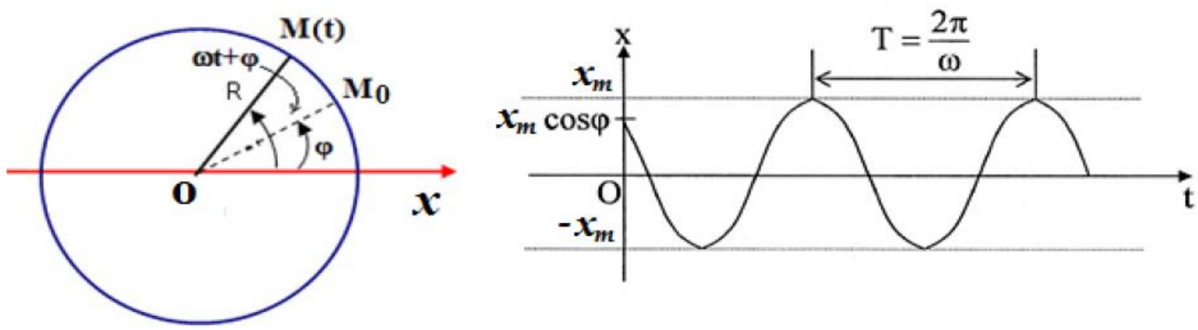
$x(t)$: الفاصلة أو المطال اللحظي.

x_m : سعة الحركة أو المطال الأعظمي.

ω: نبض الحركة.

φ: الطور أو الصفحة الابتدائية.

(ω t +φ): الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية



الشكل(12-I): الحركة المستقيمة الجيبية.

- باشتقاق المعادلة الزمنية للحركة نجد **عبارة السرعة:**

$$\boxed{\boldsymbol{V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -wx_m sin(wt + \varphi)}}$$

- و باشتقاق عبارة السرعة نجد **عبارة التسارع:**

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = -w^2 x_m cos(wt + \varphi) = -w^2 x(t)$$

$$\boxed{\Rightarrow a(t) = -w^2 x(t)}$$

اي ان التسارع يتناسب طردا مع السعة و يعاكسها في الاتجاه.

- **المعادلة الزمنية للحركة الجيبية:**

انطلاقا من عبارة التسارع نجد:

$$a(t) = -w^2 x(t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x(t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + w^2 x = 0}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يكون من الشكل:

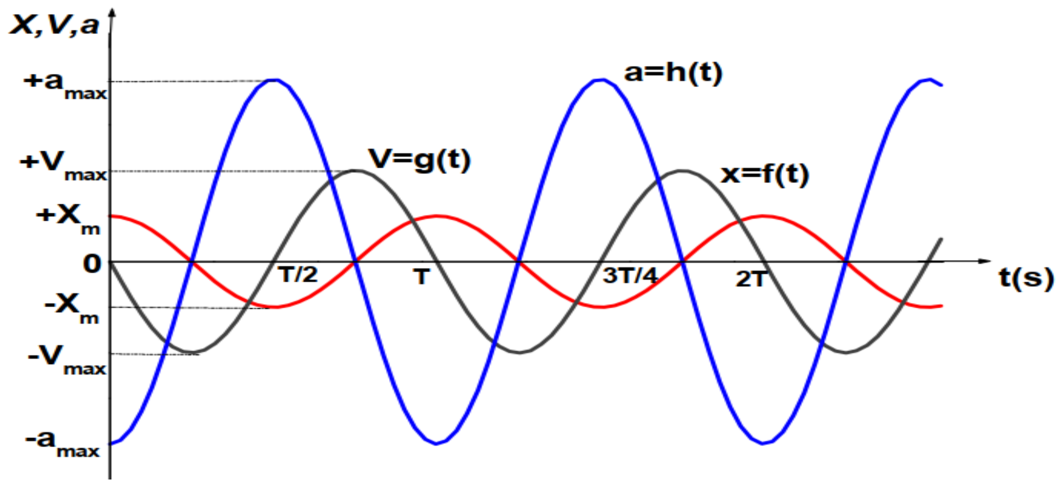
$$x(t) = A.\cos(wt) + B.\sin(wt)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة باستعمال التحويلات المثلثية على الشكل:

$$x(t) = x_m \cos(wt + \varphi)$$

بحيث نحدد ثوابت التفاضل x_m و φ من خلال معرفة الشروط الابتدائية لكل من السعة و السرعة الابتدائيتين.

مخططات الحركة: : يوضح الشكل ادناه مخططات الحركة لكل من الانتقال، السرعة و التسارع بدلالة الزمن.



الشكل (13-I): مخططات الحركة الجيبية.

مثال:

هزاز جيبي ممثل حركته ممثلة بالمعادلة التالية: $x(t) = 4\sin(0.1t + 0.5)$

ا) اوجد السعة، الدور، التواتر و الطور الابتدائي للحركة.

ب) أوجد عبارة السرعة و التسارع.

ج) الشروط الابتدائية.

د) ارسم مخططات الحركة.

الحل:

أ) **قيمة السعة:** $x_m = 4m$

قيمة الدور: $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi = 62.s$

قيمة التواتر: $N = \frac{1}{T} \Rightarrow N = 0.0159\ Hz$

قيمة الطور الابتدائي: $\varphi = 0.5\ rad$

ب) **عبارة السرعة و التسارع:**

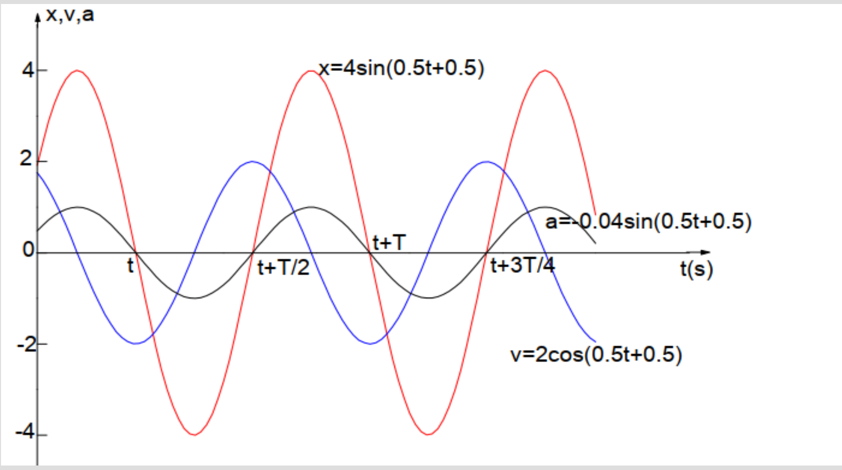
$$V(t) = \frac{dx}{dt} = 0.4cos(0.1t + 0.5)$$

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -0.04sin(0.1t + 0.5) = -0.04x(t)$$

ج) **ايجاد الشروط الابتدائية** :

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin(0.5) = \mathbf{1.92m};\ \ v_0 = 0.4\cos(0.5) = \mathbf{0.35m/s}$$

د) **مخططات الحركة:**



III- 3- الحركة الدائرية:

تكون حركة نقطة مادية حركة دائرية اذا كان مسار هذه النقطة عبارة عن دائرة مركزها O و نصف قطرها R. و يمكن دراسة هذه الحركة في الإحداثيات القطبية أو في الإحداثيات المنحنية.

أ) **شعاع السرعة و التسارع باستخدام الإحداثيات القطبية:**

نعرف اولا شعاع الموضع باعتبار ان ثابت $\rho = R =$

- **شعاع الموضع:** $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = R\overrightarrow{e_\rho}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_\rho}}$$

- **شعاع السرعة:** $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{e_\rho}) = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$$\boxed{\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$$

تسمى $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية للدوران و نرمز له بالرمز w، و نلاحظ أن شعاع السرعة في الحركة الدائرية يكون في كل لحظة مماسي للمسار، وتساوي طويلته جداء نصف القطر في السرعة الزاوية.

- **شعاع التسارع:**

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$$

$$\vec{a} = a_\rho\overrightarrow{e_\rho} + a_\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

تسمى $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي للدوران و نرمز له بالرمز α، حيث: a_ρ يمثل **التسارع الناظمي** المحمول على الناظم هو مؤشر لتغير حامل السرعة.

a_θ يمثل التسارع المماسي المحمول على المحور المماس للمسار هو مؤشر لتغير شدة السرعة.

ب) **شعاع السرعة و التسارع باستخدام الإحداثيات المنحنية:**

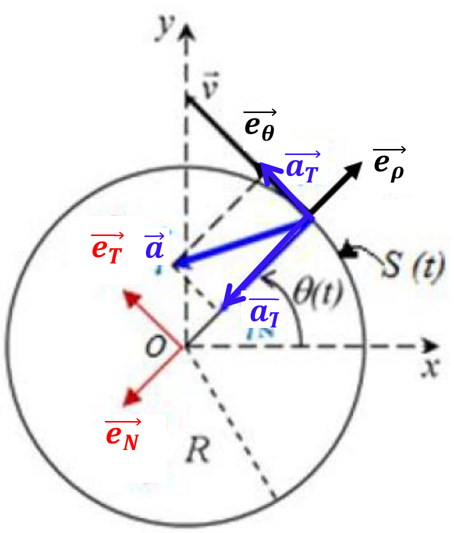
- لدينا الفاصلة المنحنية: $s(t) = R\theta(t)$
- شعاع السرعة $\vec{V} = V\overrightarrow{e_T} = \frac{ds(t)}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_T}$
- شعاع التسارع $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_T}) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{e_T} + \frac{V^2}{R}\overrightarrow{e_N}$

أي ان: $\vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_T} + R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_N}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$$

نلاحظ من الشكل ان:

$$\overrightarrow{e_\rho} = -\overrightarrow{e_N},\ \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_T}$$



الشكل(I-14): الحركة الدائرية

III-3-1- الحركة الدائرية المنتظمة:

تحصل هذه الحركة عندما يقطع الجسم أقواس متساوية خلال فواصل زمنية متساوية ويتحقق ذلك إذا كانت سرعتها الزاوية ثابتة اي ان:

$$w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = w(0) = constant$$

- و عبارة التسارع الزاوي تاخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{\alpha(t) = \frac{dw(t)}{dt} = 0}$$

- و عبارة الفاصلة الزاوية تاخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{\theta(t) = \int w(t)dt = w(0)t + \theta(0)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = \dot{\theta}t + \theta_0}}$$

حيث $\theta(0)$ و$w(0)$ يمثلان كل من الفاصلة الابتدائية و السرعة الزاوية الابتدائية

III-3-2- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

عندما يقطع الجسم أقواس غير متساوية في أزمان متساوية نقول انه يقوم بحركة دائرية غير منتظمة.

ويتحقق ذلك إذا كان تسارعها الزاوي ثابت ويكون لدينا:

$$\boldsymbol{\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = \alpha(0) =} \text{ثابت}$$

و السرعة الزاوية تكتب على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{w(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha(0)t + w(0)}$$

و الفاصلة المنحنية تكتب على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{\theta(t) = \int_0^t w(t)dt = \int_0^t [\alpha(0)t + w(0)]dt \Rightarrow}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha(0)t^2 + w(0)t + \theta(0)}}$$

حيث $\theta(0)$، $w(0)$ و $\alpha(t)$ يمثلان كل من الفاصلة الابتدائية و السرعة الزاوية الابتدائية و التسارع الزاوي الابتدائي.

ملحق: جدول يلخص صيغ حركيات نقطة مادية في مختلف الاحداثيات

جملة الإحداثيات	الكارتيزية	الإسطوانية
شعاع الموضع	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\vec{r} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$
شعاع السرعة	$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$	$\vec{V} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k}$
شعاع التسارع	$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$	$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\vec{k}$

جملة الاحداثيات	الكروية	المنحنية
شعاع الموضع	$\vec{r} = \vec{r}\overrightarrow{e_r}$	$\vec{r} = 0$
شعاع السرعة	$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$	$\vec{V} = V\overrightarrow{e_T}$
شعاع التسارع	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r(\dot{\varphi}sin\theta)^2)\overrightarrow{e_r}$ $+(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 sin\theta\ cos\theta)\vec{e}_\theta$ $+(2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta)\vec{e}_\varphi$	$\vec{a} = \left(\frac{dV}{dt}\right)\overrightarrow{e_T} + \left(\frac{V^2}{R}\right)\overrightarrow{e_\theta}$

الفصل الرابع

الحركة النسبية

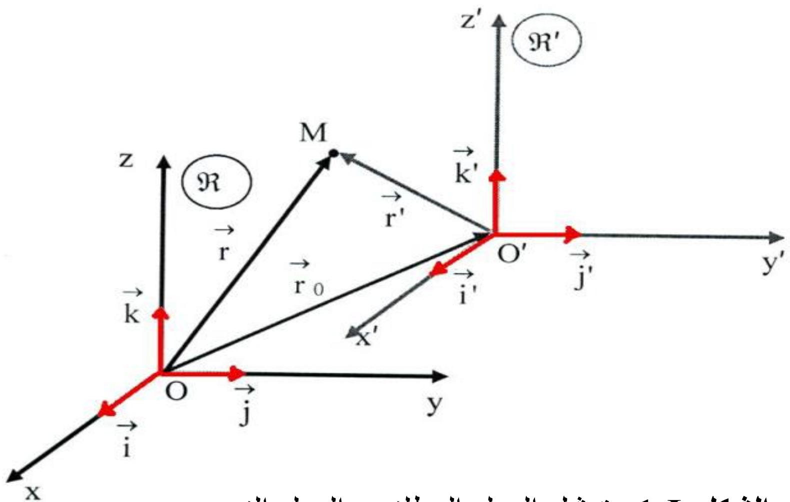
4 الحركة النسبية

I- مقدمة

كما اشرنا سابقا فان وصف حركة نقطة مادية يتعلّق بالجملة المرجعية المعتَمدة لدراسة هذه الحركة. أي ان مفهوم الحركة و السكون هما مفهومان نسبيان. فكل الحركات التي درسناها لحد الان نسبت لمعلم مرجعي ساكن. فكيف يكون وصف حركة نقطة مادية لو كان المعلم المرجعي او المسند اليه الحركة يتحرك بذاته بالنسبة لمعلم اخر. فمثلاً إذا رميت قذيفة من طائرة، تسير أفقيا بسرعة ثابتة، فإن مسار هذه القذيفة سيكون مستقيما شاقوليا بالنسبة للطائرة، على حين ترسم القذيفة قطعاً مكافئاً بالنسبة لمراقب ثابت على الأرضّ. سنتطرق في هذا الفصل الى مفهوم الحركة النسبية في حالة حركة نقطة مادية M بالنسبة لمعلمين احدهما معلم ثابت او مطلق (R) و الاخر متحرك نسبي (R').

في البداية نعرف بعض المفاهيم و المصطلحات الاساسية لوصف الحركة النسبية.

ليكن (R) و (R') معلمين متحركتين إحداهما بالنسبة إلى الأخرى، و قد تكون حركة المعلم (R') بالنسبة لـلمعلم (R) حركة انسحابية أو دورانية أو انسحابية ودورانية معاً. ولتكن $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أشعة وحدة المعلم (R) ذو المبدأ O، ولتكن $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ أشعة وحدة المعلم (R') ذو المبدأ O'، كما يوضح الشكل المقابل.



الشكل (I-1): تمثيل المعلم المطلق و المعلم النسبي

- ندعو اصطلاحاً حركة النقطة المادية M بالنسبة للمعلم (R) الحركة المطلقة وتدعى سرعة النقطة المادية M فيها بـالسرعة المطلقة ونرمز لها $\overrightarrow{v_a}$ أو $\vec{v}_{(M/R)}$ ونسمى تسارعها بالتسارع المطلق و نرمز له هذا المعلم بـ $\overrightarrow{a_a}$ أو $\vec{a}_{(M/R)}$.
- ندعو اصطلاحاً حركة النقطة المادية M بالنسبة للجملة (R') الحركة النسبية وتدعى سرعة النقطة المادية M فيها بـالسرعة النسبية ونرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\ \ }_r$ أو $\overrightarrow{v_r}_{(M/R')}$ ونسمى تسارعها بالتسارع النسبي و نرمز له هذه الجملة بـ $\overrightarrow{a_r}$ أو $\vec{a}_{(M//R')}$.
- الحركة التي يقوم بها المعلم المتحرك (R') سواء كانت انسحابية أو دورانية أو انسحابية ودورانية معا بالنسبة للمعلم الثابت (R) تدعى بحركة الجر وسرعة المعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت (المطلق) تدعى بسرعة الجر $\overrightarrow{v_e}$ أو $\vec{v}_{(O'/R)}$ و تسارعها يدعى بتسارع الجر $\overrightarrow{a_e}$ أو $\vec{a}_{(O'/R)}$.

II- الحركة المطلقة:

لندرس عبارة شعاع الموضع، شعاع السرعة وشعاع التسارع بالنسبة للمعلم الثابت أو المطلق $\mathrm{R}(,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

II-1- شعاع الموضع:

يعرف شعاع موضع النقطة المادية $M(x,y,z)$ في المعلم الثابت أو المطلق $\mathrm{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ كالتالي:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{k}}$$

II-2- شعاع السرعة المطلقة $(\boldsymbol{t})$ $\vec{\boldsymbol{V}}$:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

II-2- شعاع التسارع المطلق $(\boldsymbol{t})$ $\vec{\boldsymbol{a}}$:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{(M/R)} = \frac{d\vec{V_a}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_a = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}}$$

III- الحركة النسبية:

لندرس عبارة شعاع الموضع، شعاع السرعة وشعاع التسارع بالنسبة للمعلم النسبي $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ أو المتحرك بالنسبة للمعلم المطلق.

III-1- شعاع الموضع:

يعرف شعاع موضع النقطة المادية $M(x,y,z)$ بالنسبة للمعلم النسبي $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ كالتالي:

$$\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\vec{\imath'} + y'(t)\vec{\jmath'} + z'(t)\vec{k'}$$

III-2- شعاع السرعة النسبية $\vec{V}_r(t)$:

هو شعاع سرعة الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$

$$\vec{V}_r = \vec{V}_{(M/R')} = \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\boxed{\vec{V}_r = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'}}$$

III-3- شعاع التسارع النسبي $\vec{a}\ \ (t)$:

هو شعاع تسارع الجسم M بالنسبة للمعلم النسبي $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{(M/R')} = \frac{d\vec{V_r}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$$

$$\boxed{\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{\imath'} + \ddot{y}'\vec{\jmath'} + \ddot{z}'\vec{k'}}$$

ملاحظة: ننتبه إلى أن أشعة الوحدة $(\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'})$ تكون ثابتة داخل المعلم النسبي لكن متغيرة بالنسبة للمعلم المطلق و بالتالي يجب أخذها بالاعتبار عند الاشتقاق داخل هذا المعلم.

IV- علاقات التركيب:

أي دراسة العلاقة التي تربط بين المقادير المطلقة (شعاع الموضع، شعاع السرعة المطلقة، شعاع التسارع المطلق) و المقادير النسبية (شعاع الموضع، شعاع السرعة النسبية، شعاع التسارع النسبي).

IV- 1- تركيب أشعة الموضع:

لتكن النقطة المادية M تتحرك بالنسبة لمعلمين إحداهما ثابت (R) و الآخر متحرك (R') يتحرك بالنسبة للمعلم (R) بحركة كيفية دورانية أو انسحابية.

كما يوضح الشكل **(1-I)** فان:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

واعتمادا على مركبات الأشعة $\overrightarrow{OM}$ ، $\overrightarrow{O'M}$ و $\overrightarrow{OO'}$ نكتب:

$$\boldsymbol{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \left[x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k}\right] + \left[x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}\right]} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \overrightarrow{r'}}$$

$(\boldsymbol{x_{O'}}،\boldsymbol{y_{O'}}،\boldsymbol{z_{O'}})$ هي احداثيات النقطة $\boldsymbol{O'}$ بالنسبة للمعلم المطلق (R).

IV-2- تركيب أشعة السرعة:

بما أن:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{(M/R)} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}\right) = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)}_{\vec{V_e}} +$$

$$\underbrace{\left(x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)}_{\vec{V_r}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}(/\boldsymbol{R})} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{R'}/\boldsymbol{R})} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}(/\boldsymbol{R'})}}$$

$\vec{\boldsymbol{V}}_{(/\boldsymbol{R})}$ تمثل السرعة المطلقة

$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}(/\boldsymbol{R'})}$ تمثل السرعة النسبية.

$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{R'}/\boldsymbol{R})}$ تمثل سرعة الجر.

اذن علاقة تركيب السرعات تنص على أن السرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي المجموع الهندسي لسرعة الجر والسرعة النسبية.

نلاحظ ان سرعة الجر تتعلق من جهة بالشعاع $\overrightarrow{OO'}$ و بإحداثيات النقطة المتحركة و بدوران المعلم النسبي بالنسبة للمعلم المطلق من جهة ثانية. فأي حركة كيفية للمعلم النسبي، يمكن تحليلها إلى مجموع حركتين؛ إنسحابية و دورانية.

IV-3- تركيب أشعة التسارع:

نكتب علاقة تركيب التسارعات كالتالي :

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V_e}}{dt} + \frac{d\vec{V_r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left[x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \underbrace{\left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right)\right]}_{\vec{a_e}} + \underbrace{\left[\ddot{x}'\vec{\imath'} + \ddot{y}'\vec{\jmath'} + \ddot{z}'\vec{k'}\right]}_{\vec{a_r}}$$

$$+ \underbrace{2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]}_{\vec{a_c}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}(/\boldsymbol{R})} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{e}}|_{(\boldsymbol{R'}/\boldsymbol{R})} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}}|_{(/\boldsymbol{R'})} + \overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}|_{(/\boldsymbol{R'})}}$$

- $\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$: يمثل التسارع النسبي، أي تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك R'.
- $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)$: يمثل تسارع الجر، أي تسارع المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R.
- $\vec{a}_c = 2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right]$: يمثل تسارع كوريوليس.

اذن شعاع التسارع المطلق يساوي مجموع شعاع التسارع النسبي وشعاع تسارع الجر وشعاع تسارع كوريوليس.

V- الحركة الانسحابية للمعلم النسبي:

اذا كان المعلم النسبي (R') يقوم بحركة انسحابية بالنسبة للمعلم المطلق (R)، فان اشعة الوحدة $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ تكون ثابتة بالنسبة للمعلم المطلق و مشتقاتها بالنسبة للزمن معدومة. و ينتج عن ذلك شعاع سرعة الجر يكون غير متعلق بالنقطة M اي ان:

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V}_e = \vec{V}_T = \frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}$$

أي ان سرعة الجر هي سرعة انسحابية. و بالتالي نكتب **عبارة السرعة المطلقة** في هذه الحالة كالتالي:

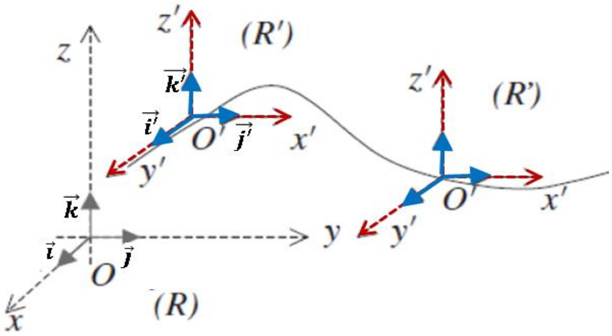
$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_T = \vec{V}_r + \vec{V}_{O'/R}}$$

اما بالنسبة للتسارع في حالة الحركة الانسحابية للمعلم النسبي بالنسبة للمعلم المطلق فان تسارع كوريوليس يكون معدوما و تسارع الجر يكتب على الشكل التالي:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_T = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}_{/R}}{dt^2}$$

وبالتالي تصبح عبارة **التسارع المطلق** تكتب كالتالي:

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_T + \vec{a}_r = \vec{a}_r + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}_{/R}}{dt^2}}$$



الشكل (I-2): تمثيل المعلم النسبي في حركة انسحابية بالنسبة للمعلم المطلق

مثال:

أبحرت سفينة في الاتجاه شمال °60 غرب (*N*60°*O*) بسرعة 4كم/سا بالنسبة للماء. جهة التيار المائي البحري هي بحيث تكون الحركة الناتجة بالنسبة للأرض في اتجاه الغرب بسرعة 5كم/سا. أحسب سرعة و اتجاه التيار المائي بالنسبة للأرض.

الإجابة:

أولا نقوم برسم المسألة كما هو موضح في الشكل المقابل.

لدينا السرعة المطلقة هي سرعة السفينة بالنسبة للأرض $(\vec{V}_a)$.

السرعة النسبية هي سرعة السفينة بالنسبة للتيار المائي $(\vec{V}\ \ )$.

سرعة الجر هي سرعة التيار المائي بالنسبة للأرض $(\vec{V}\ \ )$.

و هو المقدار المطلوب ايجاده.

من خلال الشكل نكتب:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \Rightarrow \vec{V}_e = \vec{V}_a - \vec{V}_r$$

$$\Rightarrow |\vec{V}_e| = \sqrt{|\vec{V}_a|^2 + |\vec{V}_r|^2 - 2|\vec{V}_a||\vec{V}_r| cos30°}$$

$$\Rightarrow |\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}}| = \mathbf{2.52} \boldsymbol{km/h}$$

ولتحديد حامل سرعة الجر لا بد من تحديد قيمة الزاوية α :

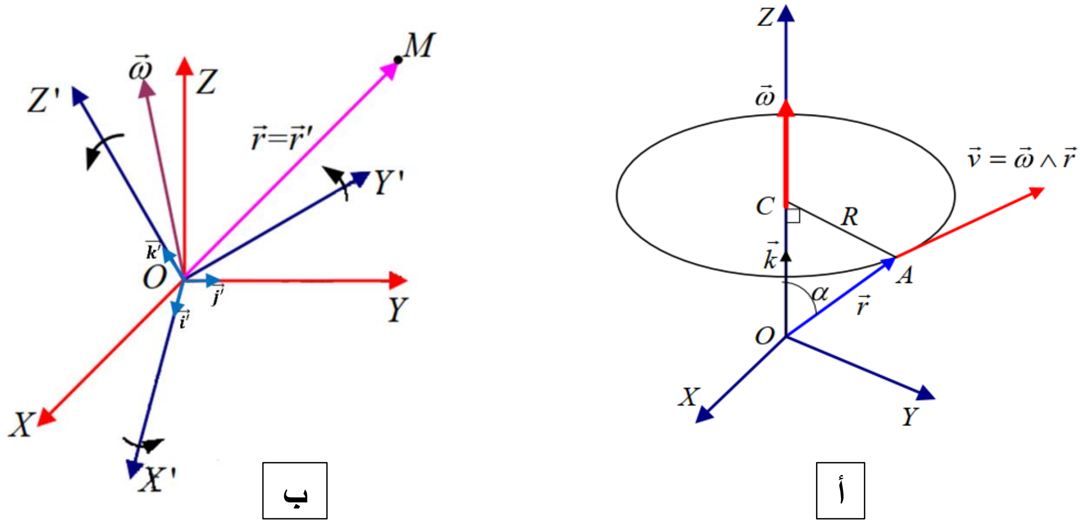
من الشكل لدينا:

$$\frac{|\vec{V}_r|}{sin\alpha} = \frac{|\vec{V}_e|}{sin30°} \Rightarrow sin\alpha = \frac{|\vec{V}_r|}{|\vec{V}_e|} sin30° = 0.4$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 23.6°}$$

V- الحركة الدوارنية للمعلم النسبي:

نعتبر في هذه الحالة ان المعلم النسبي (R') يقوم بحركة دوارنية حول المعلم الثابت (R) بحيث يكون مبدؤه O' ثابت و منطبق على المبدأ O، في حين تدور أشعة الوحدة $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ حول المحور (ZO) بسرعة زاوية w(t) كما هو موضح في الشكل ادناه.



الشكل (3-I): (أ) شعاع السرعة الزاوية، (ب) تمثيل المعلم النسبي في حركة دوارنية بالنسبة للمعلم المطلق.

فالسرعة الزاوية هي مقدار شعاعي محمول على المحور العمودي على مستوي الحركة (ZO) في اتجاه يحدد باستعمال قاعدة اليد اليمنى.

نلاحظ من الشكل ان:

$$\vec{w} = w\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

بالتالي نكتب أشعة الدوران اللحظية للمعلم (R') بالنسبة للمعلم (R) في حالة الحركة الدائرية كما يلي:

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \frac{d\vec{\imath'}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{w}.\vec{\jmath'} = \vec{w}\Lambda\vec{\imath'}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \vec{w}\Lambda\vec{\imath'}\ , \qquad \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \vec{w}\Lambda\vec{\jmath'}\ , \qquad \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{w}\Lambda\vec{k'}}$$

$\vec{w}$ يمثل شعاع السرعة الزاوية لدوران محاور المعلم النسبي (R') بالنسبة للمعلم المطلق (R).

و بالتالي تكتب عبارة شعاع السرعة الجر في هاته الحالة كالتالي:

$$\vec{V_e} = x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} = x'(\vec{w}\wedge\vec{\imath'}) + y'(\vec{w}\wedge\vec{\jmath'}) + z'(\vec{w}\wedge\vec{k'})$$

$$\Rightarrow \vec{V_e} = \vec{w} \wedge \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{rot}} = \vec{\boldsymbol{w}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}$$

$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{rot}}$ تمثل سرعة الجر نتيجة دوران المعلم النسبي.

و بالتالي تعرف عبارة شعاع السرعة المطلقة كما يلي:

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} = \vec{V_r} + \vec{V}_{rot}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{w}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين السرعات في الحالة التي يقوم فيها المعلم النسبي بحركة دورانية بالنسبة للمعلم المطلق.

أما بالنسبة للعلاقة التي بين **التسارعات** في الحالة التي يقوم فيها المعلم النسبي بحركة دورانية بالنسبة للمعلم المطلق فانه من خلال تعريف شعاع التسارع:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V_r} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{d\vec{V_r}}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

لدينا ايضا:

$$\frac{d\vec{V_r}}{dt} = \underbrace{\left[\ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'}\right]}_{\vec{a_r}} + \underbrace{\left[\dot{x}'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]}_{\vec{w}\wedge\vec{V_r}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{r}}} + \vec{\boldsymbol{w}} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$$

$$\vec{w} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{w} \wedge \left[\dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}\right] + \vec{w} \wedge \left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\vec{w}\wedge\overrightarrow{O'M}}\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{w}} \wedge \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{\boldsymbol{dt}} = \left(\vec{\boldsymbol{w}} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}\right) + \vec{\boldsymbol{w}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{w}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}\right)$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} = \dot{\vec{w}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

ومنه بالتعويض في عبارة التسارع المطلق نجد:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \left(\vec{a_r} + \vec{w} \wedge \vec{V}_r\right) + \left(\left(\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right) + \left(\dot{\vec{w}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a}_a = \left[\left(\dot{\vec{w}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right] + \vec{a_r} + 2\left(\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)}$$

و نكتب:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين **أشعة التسرعات** في الحالة التي يقوم فيها المعلم النسبي بحركة دورانية بالنسبة للمعلم المطلق. حيث:

$\left[\left(\dot{\vec{w}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right]$ يمثل تسارع الجر نتيجة دوران المعلم النسبي.

$2\left(\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)$ يمثل تسارع كوريوليس.

$\vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ يمثل التسارع المركزي.

IV- الحركة الكيفية للمعلم النسبي:

هي عبارة عن تركيب لحركتين، إنسحابية و دورانية، و تكون سرعة الجر هي مجموع سرعتي الانسحاب و الدوران أي ان:

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_{rot} + \vec{V}_T$$

$$\Rightarrow \vec{V}_e = \vec{V}_r + \vec{V}_{rot} + \vec{V}_T$$

أما عبارة التسارع المطلق في هذه الحالة يكتب كالتالي:

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a_T} + \left[\left(\dot{\vec{w}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{w} \wedge \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right] + \vec{a_r} + 2\left(\vec{w} \wedge \vec{V}_r\right)$$

الفصل الخامس

تحريك النقطة المادية

5 تحريك النقطة المادية

I- مقدمــــــــــــة

التحريك هو علم يهتم بدراسة العلاقة بين الحركة و مسبباتها، على عكس علم الحركيات و الذي يهتم بدراسة الحركة بدلالة الزمن بدون التطرق لمسبباتها. فدراسة تحريك نقطة مادية هو تحليل العلاقة بين القوة او العزم و تغيرات حركة الجسم. و قبل الخوض في دراسة هذا العلم سنطرق اولا الى بعض المفاهيم الاساسية التي سنعتمد عليها.

II- مفاهيم اساسية:

II-1- العطالة: مصطلح فيزيائي يعني مقاومة الجسم الساكن للحركة ومقاومة الجسم المتحرك بتزويده بعجلة ثابتة أو تغيير اتجاهه.

II-2- المعلم العطالي (المعلم الغاليلي): المعالم العطالية هي المعالم التي لا تتسارع و لا تدور. فالمعلم العطالي هو معلم مرجعي متميز واحدة تكون فيها حركة أية نقطة مادية معزولة حركة مستقيمة منتظمة. وهو كل معلم يتحقق فيه مبدأ العطالة. فكل معلم يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لجملة كوبرنيك فهو معلم غاليلي. و من بين هذه المعالم نذكر:

- **معلم كوبرنيك** (المرجع الهليومركزي)**:** هو معلم مرتبط بالمجموعة الشمسية، مركزه هو مركز كتل المجموعة، و محاوره موجهة نحو نجوم بعيدة تعتبر من وجهة نظرنا ثابتة.
- **معلم كيبلر:** مركز المعلم هو مركز عطالة الشمس و محاوره تعطى بثلاث نجوم بعيدة و تبدو ثابتة.
- **المعلم الأرضي:** محاوره مرتبطة بالأرض و مركزه نقطة من نقاط الأرض.

II-3- القوة: نعرف القوة بأنها مقدار شعاعي يصف تأثيرا قادرا على احداث حركة أو تغيير الحالة الحركة لنقطة مادية، او أنه قادرا على تشويه جسم مادي.

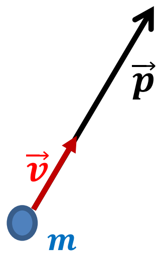
II-4- الجمل المعزولة: نقول عن جملة ما أنها جملة معزولة إذا لم تكن خاضعة لأي تأثير خارجي ولا تؤثر هي في هذا الوسط الخارجي. بينما اذا كانت محصلة جميع القوى الخارجية المؤثرة في الجملة المادية تساوي الصفر فنقول إن الجملة شبه معزولة.

II-5- كمية الحركة (شعاع الدفع الخطي): هو مقدار فيزيائي هام لأنه يجمع بين عنصرين يميزان الحالة الحركية للجسيم وهما كتلته و سرعته. نعرف شعاع الدفع الخطي $\vec{p}$ وسرعتها $\vec{v}$ لنقطة مادية ذات كتلة m بالنسبة لمعلم R كما يلي:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

كما يتضح من هذه العلاقة ان كمية الحركة هي مقدار شعاعي له نفس اتجاه السرعة.

كما ان كمية الحركة (شعاع الدفع الخطي) الكلية لجملة معزولة محفوظة دوًما، أي ثابتة في القيمة و ثابتة في الاتجاه.



الشكل (I-1): شعاع كمية الحركة.

II-6- انحفاظ كمية الحركة: لنفترض نقطتين ماديتين m_1 و m_2 حرتين غير خاضعتين إلا للتأثيرات المتبادلة بينهم، أي انهما معزولتين عن باقي الكون.

فعند اللحظة t:
$$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

فعند اللحظة 't :
$$\overrightarrow{p'} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$$

و بما ان كمية الحركة الكلية لجملة معزولة محفوظ دوًما مهما تغير الزمن فان:
$$\vec{p} = \overrightarrow{p'}$$

أي ان:
$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} \Rightarrow \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p'_1} = \overrightarrow{p'_2} - \overrightarrow{p_2}$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{p_1}} = -\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{p_2}}}$$

هذا القانون يمثل قانون انحفاظ كمية الحركة. و ينص على ان ما يفقده الجسم الاول من كمية حركة يكتسبه الجسم الثاني و العكس بالعكس. أي ان كمية الحركة الكلية للجملة تبقى ثابته.

III- القوانين الثلاثة لنيوتن:

III-1- القانون الاول لنيوتن (مبدأ العطالة):

يصف هذا القانون ميل الأجسام للمحافظة على حالتها الحركية وممانعة تغييرها. أي أن الجسم الساكن يظل ساكناً، والجسم المتحرك بسرعة محددة و ثابتة على خط مستقيم يستمر بحركته بالسرعة والاتجاه نفسه بالنسبة لمعلم مرجعي ،ما لم تؤثر عليه قوة خارجية عليه تجبره على تغيير ذلك. ويطلق على هذه الظاهرة خاصية القصور الذاتي أو مبدأ العطالة ، لذا يسمى قانون نيوتن الأول بقانون القصور الذاتي أو مبدأ العطالة.

III-2- القانون الثاني لنيوتن (القانون الاساسي للتحريك):

يتناسب تغير الدفع الخطي بالنسبة للزمن لجسيم في معلم عطالي (R) مع محصلة القوى التي يخضع لها.

أي ان:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}}$$

نلاحظ في هذه العلاقة أنها تربط بين السرعة والقوة، أي أنها تربط الحركة بمسبباتها.

- اذا كانت كتلة الجسم متغيرة مع الزمن فان القانون الاساسي للتحريك يكتب على الشكل التالي:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

- إذا كانت كتلة الجسم ثابتة فان القانون الاساسي للتحريك يصبح يكتب على الشكل التالي:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

يوضح قانون نيوتن الثاني في هذه الحالة تناسب تسارع الجسم $\vec{a}$ والذي يكتسبه نتيجة لقوة دفع ما، تناسباً طرديا ع مجموع القوى الخارجية المؤثرة فيه ويكون في اتجاهها، ويوضح هذا القانون ماهية العلاقة بين القوة المؤثرة على جسم معين ومقدار التغير في الحالة الحركية له.

ملاحظة:

في حالة ما اذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم معدومة $(\sum \vec{F} = 0)$ فان التسارع يكون معدوما $\vec{a} = 0$ ايضا و بالتالي تكون حركة الجسم عطالية اي ان $\vec{v} = cst$. و هو ما يمثل القانون الاول لنيوتن.

III-2-1- صلاحية القانون الثاني للتحريك:

يتطلب تطبيق هذا القانون بعض الشروط الواجب توفرها، و المتمثلة في:

- القانون الثاني لنيوتن لا يصلح إلا في معلم عطالي.
- عند تطبيق هذا القانون على الأجسام المادية يجب اعتبار هذه الأجسام نقاًطا مادية لا أبعاد لها.

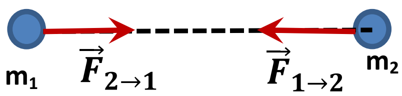
- يصلح هذا القانون ويعطي نتائج جيدة فقط على الأجسام التي لا تتعدى سرعتها عشر سرعة الضوء.

III-2-2- الخطوات العامة المتبعة لتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

- ✓ تحديد الجملة المدروسة.
- ✓ رسم تخطيطي للجملة مع توضيح كل المؤثرات الخارجية المؤثرة على الجملة المدروسة.
- ✓ تحديد القوى المؤثرة على الجملة المدروسة، مع توضيح هذه القوى على الشكل .
- ✓ اختيار معلم مناسب إذا لم يكن مفروض في المسألة .
- ✓ كتابة العلاقة الشعاعية للقانون الثاني لنيوتن .
- ✓ إسقاط علاقة القانون الاساسي للتحريك على المحاور لتحديد المعادلات التي تضبط المسألة.
- ✓ حساب المجاهيل المطلوبة .

III-3- القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعل و رد الفعل):

ينص القانون الثالث لنيوتن على انه عندما تكون جسيمتان في حالة تأثير متبادل، تكون القوة المؤثرة على احداهما مساوية و معاكسة للقوة المؤثرة على الجسيمة الاخرى. اي أن لكل فعل رد فعل مساويا له في المقدار ومعاكسا له في الاتجاه. و كما يبين الشكل المقابل فان:



الشكل (I-2): الفعل و رد الفعل.

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

و من اهم خصائص قوة الفعل و رد الفعل نذكر:

- قوة الفعل و رد الفعل لهما نفس الحامل.
- قوة الفعل و رد الفعل لهما نفس طبيعة التأثير.
- قوة الفعل و رد الفعل متزامنتين أي تحدثان في آن واحد.
- لا يمكن اعتبار أحدهما سببًا للآخر.

IV- القوى الاساسية في الطبيعة:

IV-1- مفهوم القوة: القوة هي مقدار شعاعي و تستخدم لوصف تأثيرا قادرا على احداث حركة أو تغيير الحالة الحركة لجسم مادية، او أنه قادرا على تشويه جسم مادي بصفة دائمة او مؤقتة. و من ناحية اخرى طبقا لقانون نيوتن الثاني، تعرف القوة بأنها مقدار الجهد المبذول و الذي يتسبب في تسارع الجسم.

و لتطبيق قانون نيوتن الثاني يتوجب علينا تعريف الجملة بوضوح و تحديد دقيق لمختلف القوى التي يطبقها الوسط الخارجي على الجملة. ففي الطبيعة يوجد قسمان من القوى:

أ- **القوى ذات التأثير عن بعد:** و تدعى بالقوى الأساسية مثل: قوة الجاذبية، القوة الكهربائية،.....

ب- **القوى التلامسية:** أو ذات التأثير عن قرب مثل: قوى الاحتكاك و التوترات.

IV-2- القوى ذات التأثير عن بعد

IV-2-1- قوة الجاذبية

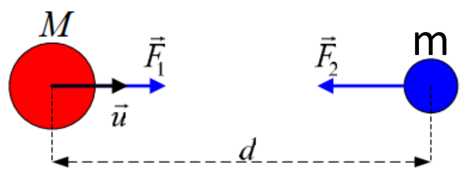
أ-**قانون الجذب العام:** قانون الجذب العام لنيوتن (1685م) هو اساس النظرية التي تفسر كثير من الظواهر بدءا من الظواهر التي تفسر حركة الكواكب و وصولا الى السقوط الحر للأجسام مرورا بحركة المد و الجزر. يفسر هذا القانون قوة التجاذب بين جسمين ذي كتلتين M و m تفصل بينهما مسافة d حيث تنشأ بينهما قوتي تجاذب من الشكل:

$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_1} = G\frac{mM}{d^2}\vec{u}}$$

حيث G هو ثابت التجاذب الكتلي قيمته في النظام الدولي: $G=6.67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}$

$\vec{u}$ شعاع وحدة حامله الخط الرابط بين الكتلتين m و M.

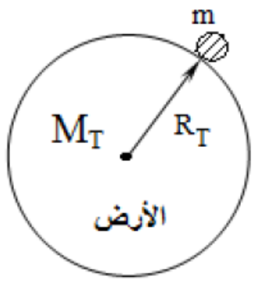


الشكل(I-3): تمثيل قوة التجاذب.

IV-2-2- حقل الجاذبية الارضية:

ان حقل الجاذبية الأرضية هو نفسه حقل الجاذبية الناتج عن جسم نقطي له كتلة الأرض وموجود في مركز الأرض O. نستنتج من ذلك أن حقل الجاذبية الأرضي g_0 المتولد في نقطة على سطح الارض:

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{R_T^2}\vec{u}_{Om} = m\overrightarrow{g_0}$$



الشكل(4-I): تمثيل حقل الجاذبية على سطح الارض

$$\Rightarrow\ g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

حيث:

M_T تمثل كتلة الارض و تساوي $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg.

R_T تمثل نصف قطر الارض و تساوي $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$ m.

و منه:

$$g_0 = 9.8N.kg^{-1}$$

كما نستنتج حقل الجاذبية الأرضي g_0 المتولد في نقطة تبعد ارتفاع z على سطح الارض كالتالي:

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{u}_{Om} = m\vec{g}$$

$$\Rightarrow\ g = G\frac{M_T}{(R_T+z)^2} = g_0\frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$$

IV-2-3- قوة الثقل:

نعرف قوة الثقل لجسم كتلته m على انها قوة جذب الأرض لهذا الجسم ونكتب:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

حيث شعاع الجاذبية $\vec{g}$ هو شعاع موجه نحو مركز الأرض وفق شاقول النقطة المادية.

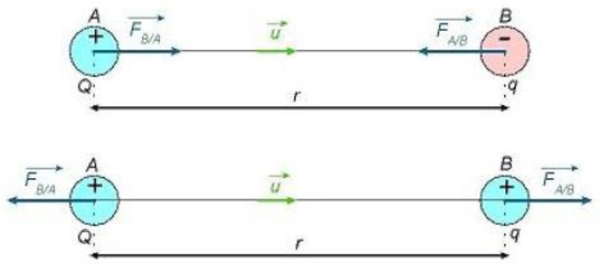
وبالتالي فان شعاع الثقل دوما متجه شاقولي نحو مركز الارض (من الاعلى للأسفل)، و لكل جسم لديه ثقل ذات قيمة ثابتة على سطح الأرض.

IV-2-4- القوة الكهربائية:

و هي قوة تنشا عن التأثير المتبادل بين الشحن الكهربائية.

حيث يوجد هناك تناظر بين علاقة قوة الجاذبية و عبارة القوة الكهربائية، ففي حالة شحنتين كهربائيتين q و Q تفصلها المسافة r فان عبارة القوة الكهربائية تأخذ الشكل التالي:

$$\vec{F} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{Qq}{r^2}\vec{u}$$



IV-3- القوى التلامسية:

IV-3-1- قوة رد فعل لحامل صلب أملس (بدون احتكاك):

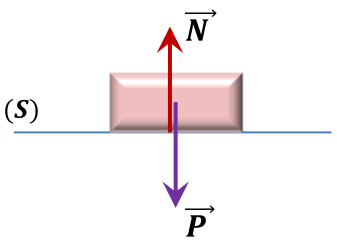
ليكن الجسم m في حالة توازن موضوع فوق سطح طاولة و الذي يكون خاضع للقوة $\vec{P}$ التي تمثل قوة ثقل الجسم الناتجة على كل تجاذبات جزيئات الجسم الملامسة لسطح الطاولة، و القوة $\vec{N}$ وهي قوة معاكسة لقوة الثقل و تمثل قوة رد فعل الطاولة على الجسم و تمثل محصلة كل تجاذبات جزيئات سطح الطاولة الملامس لسطح الجسم. في حالة الاتزان فان:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

الجسم في حالة السكون فان $\vec{a} = 0$:

$$\vec{P} + \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{P} = -\vec{N}$$

و تدعى هاتين القوتين بقوى الترابط نظرا لوصل الجسمين مع بعضهما.



الشكل(I-6): رد فعل الحامل.

IV-3-2- قوى الاحتكاك:

تظهر قوى الاحتكاك عندما يكون هناك تلامس بين سطحين غير أملسين لجسمين صلبين. قوة الاحتكاك هي قوة مقاومة تعاكس الحركة النسبية للجسمين، أو كذلك عندما يتحرك جسم مادي في مائع فإن جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوة ممانعة للحركة. نذكر هنا عدة انواع من قوى الاحتكاك:

IV-3-2-1- قوى الاحتكاك الصلب الساكن:

أ- **قوة الاحتكاك السكوني:** ينشأ الاحتكاك السكوني من ملامسة أو اتصال جسم ساكن ما بسطح أو جسم آخر. و قوة الاحتكاك السكوني هي القوة التي تبقي الجسم في حالة سكون حتى في وجود قوى خارجية تسعى إلى تحريكه. في هذه الحالة، تكون محصلة قوى الاحتكاك السكوني هي قوة تعاكس محصلة هذه القوى الخارجية ويبقى الجسم ساكنا.

- **حالة جسم موضوع على مستوي افقي:**

لكي يتحرك الجسم الموضوع فوق المستوي الافقي، يجب أن نطبق عليه قوة دنيا $\vec{F}$.

الجسم ساكن و منه حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

حيث: $\vec{f_s}$ تمثل قوة الاحتكاك السكوني التي تعيق الحركة.

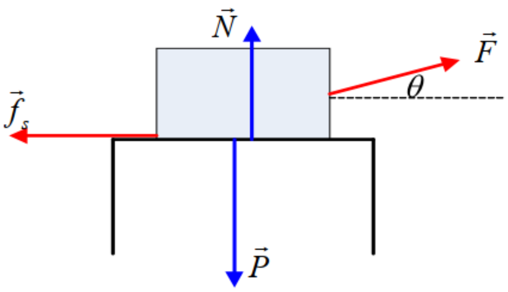
$\vec{N}$ تمثل قوة رد الفعل.

بإسقاط هذه العبارة الشعاعية على المحورين الشاقولي والأفقي فنجد:

$$\begin{cases} \boldsymbol{N - P + F.sin\theta = 0} \\ \boldsymbol{F.cos\theta - f_s = 0 \Rightarrow f_s = F.cos\theta} \end{cases}$$

كما ان قوة الاحتكاك السكوني تتناسب مع شدة القوة الناظمية N ، وذلك حسب العلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{f_s = \mu_s N}}$$



الشكل(I-7): تمثيل قوة الاحتكاك.

$\boldsymbol{\mu_s}$ ثابت موجب يسمى معامل الاحتكاك السكوني.

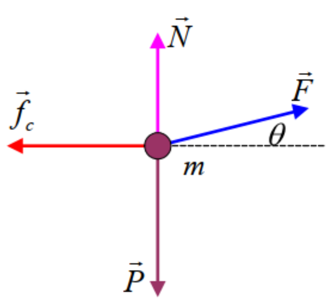
ب- قوة الاحتكاك الحركي:

قوة الاحتكاك الحركي هي القوة التي تقاوم حركة الجسم عندما ينتقل على سطح خشن، و تحسب شدتها بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{f_c = \mu_c N}}$$

$\boldsymbol{f_c}$ تمثل قوة الاحتكاك الحركي و تكون دائما متجهة عكس اتجاه الحركة.

$\boldsymbol{\mu_c}$ يمثل معامل الاحتكاك الحركي و قيمته دائما ثابتة و موجبة.



ففي حالة حركة جسم موضوع على مستوي افقي، و بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

و بالإسقاط على المحور الناظمي و الافقي نجد:

$$\begin{cases} N - P + F.sin\theta = 0 \\ F.cos\theta - f_c = ma \end{cases}$$

الشكل(I-8): تمثيل قوة الاحتكاك الحركي.

و منه يمكننا تحديد عبارة قوة الاحتكاك الحركي:

$$\boxed{f_c = F.cos\theta - ma}$$

- **مقارنة بين كل من الإحتكاك السكوني والإحتكاك الحركي:**

أ- في حالة الاحتكاك السكوني الجسم في حالة حركة و في حالة الاحتكاك الحركي الجسم في حالة حركة.

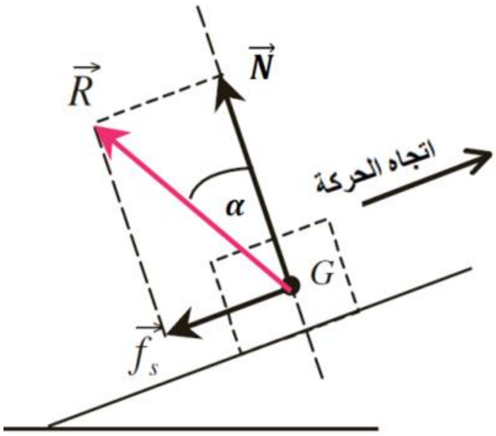
ب- معامل الاحتكاك السكوني أكبر دوما من معامل الاحتكاك الحركي $\mu_s > \mu_c$.

و هذا يفسر صعوبة تحريك جسم ساكن بالدفع، ولكن عندما يبدأ الجسم فعلا بالحركة يتطلب قوة دفع أقل للمحافظة على حركته.

ج- تمثيل قوة الاحتكاك الحركي او السكوني f_c و f_s دوما عكس اتجاه الحركة.

د- نلاحظ أن قوة الاحتكاك الحركي و السكوني كلاهما يتناسب مع شدة القوة الناظمية $\vec{N}$.

ذ- من خلال الشكل المقابل يمكننا كتابة العلاقة التالية:



$$\boxed{\begin{aligned} tg\alpha &= \frac{f_c}{N} = \mu_c \\ tg\alpha &= \frac{f_s}{N} = \mu_s \end{aligned}}$$

حيث α تدعى بزاوية الاحتكاك و هي الزاوية المحصورة بين شعاع رد الفعل الكلي $\vec{R}$ و شعاع رد الفعل الناظمي $\vec{N}$، حيث:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{R_T}$$

IV-3-2-2- قوى الاحتكاك الميوعية:

عندما يتحرك جسم مادي في مائع (غاز أو سائل) فإن جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوة احتكاك ممانعة للحركة. فعندما ينتقل جسم صلب في مائع بسرعة ضعيفة نسبيا تنشأ قوة احتكاك تحسب بالقانون التالي:

$$\boxed{\vec{f_f} = -K\eta\vec{v}}$$

$\vec{v}$ تمثل سرعة الجسم.

η يمثل معامل اللزوجة ويتعلق بالمائع(kg/ms)، كما تنخفض قيمته في السوائل بارتفاع درجة الحرارة بينما تزداد بزيادة درجة الحرارة في الغازات.

K يمثل ثابت يتعلق بشكل الجسم.

مثلا بالنسبة لكرة نصف قطرها R فان:

$$K = 6\pi R$$

و الذي يدعى بعلاقة ستوكس و بالتالي:

$$\overrightarrow{f_f} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

IV-3-2-3- قوى الاحتكاك المرونة:

نجدها في الحركات التوافقية لأن القوى المرنة تحدث حركات دورية. كما اشرنا سابقا عبارة التسارع في الحركات المستقيمة الجيبية يكتب كما يلي:

$$\vec{a} = -w^2\overrightarrow{OM}$$

و بتطبيق المبدا الاساسي للتحريك نجد:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = -mw^2\overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F} = -k\overrightarrow{OM}}$$

هذا يعني ان في الحركات المستقيمة الجيبية تكون محصلة القوى المطبقة على النقطة المادية تتناسب طردا مع شعاع الموضع و تعاكسه في الاتجاه.

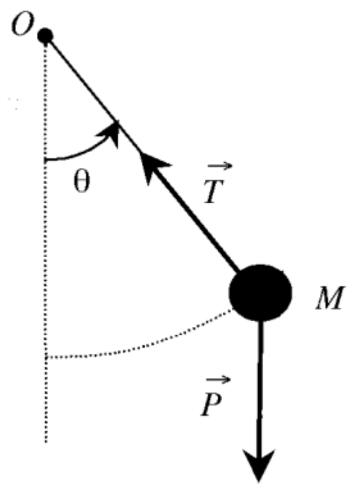
و بالاسقاط على المحور Ox نجد:

$$F = -kx$$

حيث k ثابت الإرجاع أو ثابت المرونة للنابض.

IV-3-2-4- قوى التوتر:

نجدها في حالات كثيرة, مثلا الحركة التوافقية للنواس.

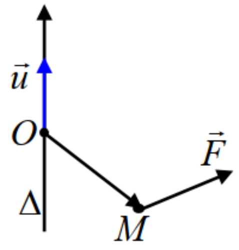


الشكل(I-9): تمثيل قوة توتر الخيط.

V- العزم الحركي:

V-1- عزم القوة: هي كمية فيزيائية تعبر عن مقدرة القوة على إحداث حركة دورا نية للجسم حول محور الدوران. و ينتج عن القوة عزم الدوران و هي تختلف عن القوة في تحريك الأجسام.

ولتكن M نقطة مادية كتلتها m، تتحرك في معلم غاليلي R مبدؤه O. و لتكن $\vec{F}$ قوة مؤثرة في النقطة المادية M. نعرف عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O بالمقدار الشعاعي التالي:

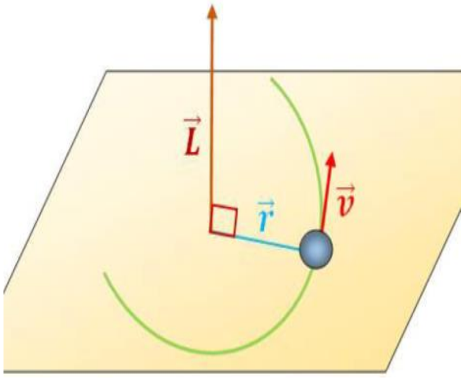


$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{F}$$

حيث كل قوة يمر حاملها من O يكون عزمها بالنسبة لـ O معدوما.

V-2- العزم الحركي:

العزم الحركي، وسيلة مهمة و مساعدة للمبدأ الأساسي في التحريك. فهي تسمح بإيجاد معادلة الحركة، خاِصة في حالة نقطة مادية تتحرك حول محور ما. في علم غاليلي (R) مبدؤه O تتحرك نقطة مادية M ذات كتلة m، نعرف العزم الحركي لهذه النقطة المادية بالنسبة لـ O بأنه مقدار شعاعي عبارته تكتب على الشكل التالي:



الشكل(I-10): تمثيل العزم الحركي.

$$\vec{L}_{/0}(M) = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{p} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\vec{v}$$

$\vec{p}$ يمثل شعاع كمية الحركة، و $\vec{v}$ تمثل شعاع سرعة النقطة المادية.

نظرا للتشابه بين هذه العبارة وعبارة عزم القوة يمكن أن نقول أن العزم الحركي هو عزم كمية الحركة.

من ناحية اخرى نلاحظ من العلاقة السابقة أن العزم الحركي هو عبارة عن الجداء الشعاعي لشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ وشعاع كمية الحركة $\vec{p}$، وبالتالي شعاع العزم الحركي هو شعاع عمودي على كل من شعاع الموضع وشعاع السرعة، فهو شعاع عمودي على مسار النقطة المادية M.

V-3- نظرية العزم الحركي:

في نقطة ثابتة O من معلم غاليلي, المشتقة بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية يساوي عزم القوة المطبقة عليه في هذه النقطة.

$$\frac{d\vec{L}_{/0}(M)}{dt}=\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\Lambda m\vec{v}\right)}{dt}=\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\Lambda m\vec{v}+\overrightarrow{OM}\Lambda m\frac{d(\vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/0}(M)}{dt}=\vec{v}\Lambda m\vec{v}+\overrightarrow{OM}\Lambda m\vec{a}=\overrightarrow{OM}\Lambda m\vec{a}$$

و بتطبيق القانون الاساسي للتحريك نجد:

$$\frac{d\vec{L}_{/0}(M)}{dt}=\overrightarrow{OM}\Lambda\vec{F}$$

و في الاخير نتحصل على عبارة نظرية العزم الحركي:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt}=\sum\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F})}$$

- عندما يكون $\vec{L}_{/0}$ ثابت فهذا دلالة على ان الحركة مستوية.
- عندما يكون $\vec{L}_{/0}$ معدوما فهذا دلالة على ان الحركة مستقيمة $(\overrightarrow{OM}\ //\ \vec{V})$.

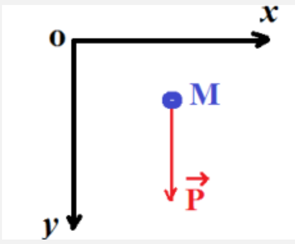
تطبيق:

تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي (Oz) عمودي على المستوي (Ox,Oy) للحركة موضعها معرف في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية، أحسب:

1- عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة "O" بدلالة g, x, m .
2- العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة "O".
3- أوجد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M.

الاجابة:

1- حساب عزم الثقل بالنسبة للنقطة "O":



لدينا:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ \vec{P} = mg\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = xmg\vec{k}$$

2- ايجاد العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة "O":

لدينا من تعريف كمية الحركة $\vec{P}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ \vec{P} = mv_x\vec{\imath} + mv_y\vec{\jmath} = m\dot{x}\vec{\imath} + m\dot{y}\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{/0} = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(\dot{y}x - \dot{x}y)\vec{k}$$

3- بتطبيق نظرية العزم الحركي لدينا:

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}_{ext})}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) = \frac{d}{dt}(m(\dot{y}x - \dot{x}y)) = xmg\vec{k}$$

$$\Rightarrow m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \ddot{x}y - \dot{x}\dot{y})\vec{k} = mgx\vec{K}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x\ddot{y} - \ddot{x}y = gx}$$

VI- تطبيق حول القانون الاساسي للتحريك:

VI- 1- دراسة حركة القذيفة:

يتميز مجال الجاذبية الارضية بشعاع حقل الجاذبية الارضية الموجه نحو مركز الأرض هذا الحقل ليس منتظما ولكن يمكن اعتباره كذلك في منطقة محدودة من الفضاء أي في مجال حركة القذيفة.

تنطلق قذيفة نقطية كتلتها m من نقطة O بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{V_0}$. في اللحظة t=0 ندرس الحركة في معلم متعامد و متجانس (O,x,y) نعتبره معلما غاليليا. تعمل سرعة القذيفة $\overrightarrow{V_0}$ زاوية α مع مسارها. في حالة ما اذا كان الجسم خاضع لقوة ثقله $\vec{P}$ و مقاومة الهواء $\vec{f} = -K\vec{V}$ هي معاكسة للحركة.

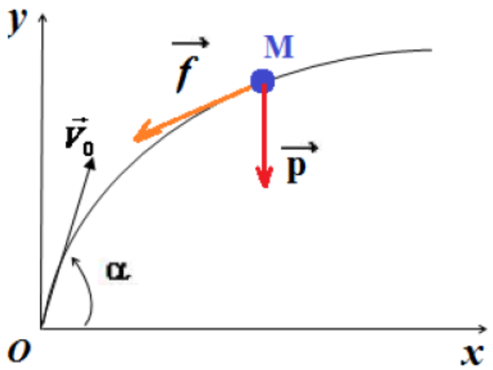
- لدراسة حركة القذيفة سنتبع الخطوات العامة المتبعة لتطبيق القانون الثاني لنيوتن المذكورة اعلاه:

أ) رسم تخطيطي للمسالة مع تحديد كل القوى المؤثرة على الجسم المدروس.

القوى المؤثرة: الكرية خاضعة لثقلها $\vec{P}$ وقوة مقاومة الهواء $\vec{f}$.

$$\overrightarrow{V_0}\begin{cases} V_{0x} = V_0 cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 sin\alpha \end{cases}$$

ب) تعيين معلم مناسب (O,x,y) لدراسة المسالة.



الشكل(I-11): تمثيل حركة قذيفة.

ج) تطبيق القانون الاساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

للحصول على المعادلات الزمنية للحركة نقوم بالإسقاط على المحاور (Ox) و (Oy):

بالاسقاط على المحور (Ox): $-kV_x = ma_x$

بالاسقاط على المحور (Oy): $-kV_y - mg = ma_y$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} + kV_x = 0 \\ m\dfrac{dV_y}{dt} + kV_y = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + \dfrac{k}{m}V_x = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ \dfrac{dV_y}{dt} + \dfrac{k}{m}V_y = -g \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني .

المعادلة (2) تمثل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بوجود طرف ثاني.

لحل المعادلة (1):

$$\frac{dV_x}{dt}+\frac{k}{m}V_x=0\Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}\dot{x}=0$$

المعادلة المميزة هي: $r^2+\frac{k}{m}r=0$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\frac{k}{m}\right)^2>0$$

المميز موجب اذن المعادلة (1) تقبل حلين من الشكل:

$$r_1=0,\qquad r_2=-\frac{k}{m}$$

اذن حلها من الشكل:

$$x(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}\Rightarrow \boldsymbol{x(t)=A+Be^{-\frac{k}{m}t}}$$

و من الشروط الابتدائية لدينا:

$\underline{\boldsymbol{t=0}:\quad \boldsymbol{x=0},\qquad \boldsymbol{V_{ox}=V_0cos\alpha}}$

$$A+Be^{-\frac{k}{m}(0)}=0\Rightarrow A=-B$$

$$x(t)=A+Be^{-\frac{k}{m}(t)}\Rightarrow \dot{x}(t)=-\frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}(t)}$$

$$\Rightarrow V_0cos\alpha=-B\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}(0)}\Rightarrow V_0cos\alpha=-\frac{k}{m}B$$

$$\Rightarrow B=-\frac{V_0m}{k}cos\alpha\Rightarrow A=-B=\frac{V_0m}{k}cos\alpha$$

و منه:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{V_0 m}{k}\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

$$\boldsymbol{V_0(t) = V_0\cos\alpha\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

$$\boldsymbol{a_x = -\frac{k}{m}V_0\cos\alpha e^{-\frac{k}{m}t}}$$

لحل المعادلة (2):

$$\frac{dV_y}{dt} + \frac{k}{m}V_y = -g \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$$

حل هذه المعادلة التفاضلية عبارة عن مجموع حلين :الحل العام و الحل الخاص:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- **الحل العام $y_h(t)$:**

حل المعادلة بدون طرف ثاني: $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = 0$

و الحل يأخذ الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y_h(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t}}$$

- **الحل الخاص y_p :**

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g$$

و بما ان الطرف الثاني في حالتنا عبارة عن كثير حدود درجته صفر، نفرض أن y_p كثير حدود من الدرجة الأولى وعليه:

$$\boldsymbol{y_p = Ct \Rightarrow \dot{y}_p = C \Rightarrow \ddot{y}_p = 0}$$

و بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$0 + \frac{k}{m}c = -g \Rightarrow c = -\frac{gm}{k}$$

اذن: $$\boxed{y_p = -\frac{gm}{k}t}$$

و بالتالي الحل الكلي يأخذ الشكل التالي:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\boldsymbol{y(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t}$$

من الشروط الابتدائية:

$\underline{\boldsymbol{t = 0:\quad y = 0,}}$

$$0 = A' + B'e^{-\frac{k}{m}(0)} - \frac{mg}{k}(0) \Rightarrow A' = -B'$$

$\underline{\boldsymbol{t = 0: V_{oy} = V_0 sin\alpha}}$

$$y(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t \Rightarrow \dot{y}(t) = V_y = -\frac{k}{m}B'e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$\dot{y}(0) = V_0 sin\alpha = \frac{-k}{m}B'e^{-\frac{k}{m}(0)} - \frac{mg}{k} \Rightarrow B' = -\frac{m}{k}(V_0 sin\alpha + \frac{gm}{k})$$

$$A = -B' = \frac{m}{k}(V_0 sin\alpha + \frac{gm}{k})$$

و لدينا: $y(t) = A' + B'e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t$

و منه:

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{m}{k}\left(V_0 sin\alpha + \frac{gm}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t}$$

$$\boldsymbol{V_y = \left(V_0 sin\alpha + \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}}$$

$$\boldsymbol{a_y = -\frac{k}{m}\left(V_0 sin\alpha + \frac{gm}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}}$$

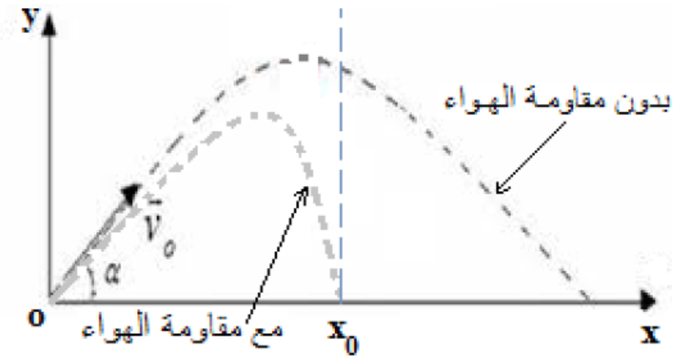
$$\overrightarrow{OM}=\begin{cases} x(t)=\frac{V_0 m}{k}cos\alpha(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \\ y(t)=-\frac{m}{k}\left(V_0 sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-\frac{gm}{k}t \end{cases}$$

مركبات شعاع سرعة القذيفة:

$$\vec{V}_M=\begin{cases} V_x(t)=V_0 cos\alpha(e^{-\frac{k}{m}t}) \\ V_y(t)=\left(V_0 sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right)-\frac{gm}{k} \end{cases}$$

مركبات شعاع تسارع القذيفة:

$$\vec{a}_M=\begin{cases} a_x(t)=-\frac{k}{m}V_0 cos\alpha(e^{-\frac{k}{m}t}) \\ a_y(t)=-\frac{k}{m}\left(V_0 sin\alpha+\frac{gm}{k}\right)\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right) \end{cases}$$



الشكل(I-12): تمثيل مسار قذيفة.

VI -2- دراسة حركة النواس البسيط:

يتكون النواس البسيط من جسم صغير M (نعتبره نقطة مادية) كتلته m كثافته جد عالية، معلق بطرف خيط طوله l مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط وقد ثبت الطرف الآخر للخيط بنقطة ثابته O (أبعاد الجسم جد صغيرة أما طول الخيط).

1- حدد وضع توازن الجملة.

2- نزيح النواس عن وضع توازنه ثم نحرره بدون سرعة ابتدائية، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نظرية العزم الحركي.

الاجابة:

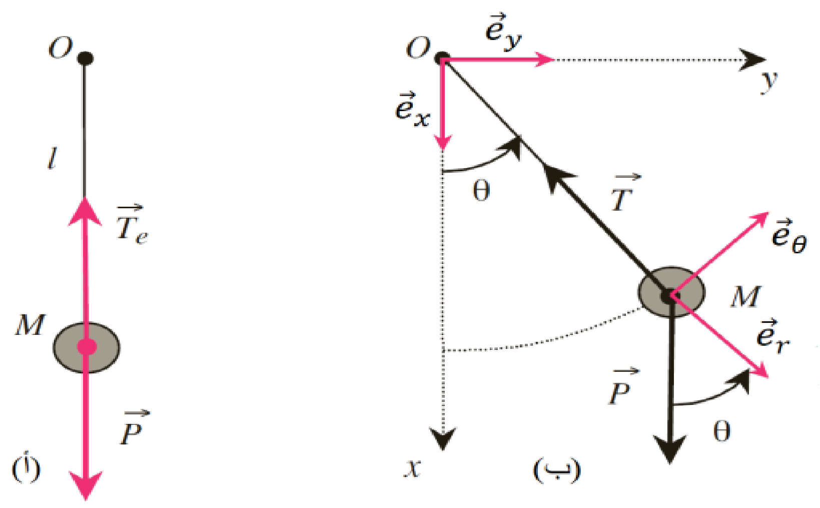
نعتبر المعلم الارضي هو المعلم الغاليلي ذات المبدأ O. و القوى المؤثرة علة الجسم M هي قوة الثقل $\vec{P}$ و قوة توتر الخيط $\vec{T}$. نهمل جميع قوى الاحتكاك)انظر الشكل ادناه).

بتطبيق القانون الاساسي للتحريك نجد:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ يمثل تسارع الجملة.

أ- في وضعية توازن الجملة $\vec{a} = \vec{0}$



الشكل(13-I): تمثيل القوى المؤثرة لنواس بسيط (أ) في حالة الاتزان و (ب) في حالة الحركة.

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P} = -m\vec{g}$$

توتر الخيط معاكس مباشرة لقوة الثقل، ومنه فالخيط يأخذ الوضع الشاقولي عند التوازن (الشكل).

ب- في وضعية الحركة:

نقوم اولا باختيار معلم مناسب للمسالة. نرى ان الاحداثيات القطبية هي الانسب لدراسة هذه المسالة لان مسار الجسم عبارة عن جزء من دائرة مركزها O ونصف قطرها $l=r$. شعاع التسارع في هذه الحالة شعاع التسارع يكتب كالتالي:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

بما ان r=l مقدار ثابت فان شعاع التسارع يكتب:

$$\vec{a} = (-l\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (l\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

و منه نكتب القانون الاساسي للتحريك:

$$\vec{P}+\vec{T}=m(-l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}+l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta})$$

بإسقاط كل من الثقل وتوتر الخيط على الأساس $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})$ نجد:

$$\begin{cases}\vec{P}=mgcos\theta\overrightarrow{e_r}-mgsin\theta\overrightarrow{e_\theta}\\ T=-T\vec{e}_r\end{cases}$$

و بالتعويض في معادلة القانون الاساسي للتحريك نتحصل على ما يلي:

$$\begin{cases}mgcos\theta-T=-ml\dot{\theta}^2\\ -mgsin\theta=ml\ddot{\theta}\end{cases}$$

من المعادلة الاخيرة نجد:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}sin\theta=0$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية غير خطية، و ليس من السهل حل المعادلة بهذا الشكل، الا في ظل شروط معينة.

ففي حالة θ صغيرة جدا فانه يمكننا اجراء التقريب التالي: $sin\theta\approx\theta$ و منه نكتب وهي المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0}$$

لنضع: $\frac{g}{l}=w^2$ نجد ان:

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}+w^2\theta=0}$$

حل هذه المعادلة يكتب على الشكل:

$$\boldsymbol{\theta=\theta_m sin(wt+\varphi)}$$

أي ان الجسم يهتز على جانبي وضع التوازن بحركة جيبيه دورانية بسعة زاوية عظمى وهي مقدار الازاحة الابتدائية. دور النواس البسيط الذي يقوم باهتزازات حرة غير متخامدة وذات سعة صغيرة يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

- يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية السابقة مباشرة من خلال نظرية العزم الحركي بالنسبة للنقطة O:

عزم توتر الخيط $\vec{T}$ بالنسبة للنقطة O هو:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{T} = l\vec{e}_r\Lambda T\vec{e}_r = \vec{0}$$

أما عزم قوة الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة O هو:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM}\Lambda\vec{P} = l\vec{e}_r\Lambda(mgcos\theta\overrightarrow{e_r} - mgsin\theta\overrightarrow{e_\theta}) = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

يمكننا كتابة العزم الحركي للجسم بالنسبة لـ O يعطي بالعبارة:

$$\vec{L}_{/0} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\vec{v} = l\vec{e}_r\Lambda(ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = ml^2\dot{\theta}(\vec{e}_r\Lambda\vec{e}_\theta) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

و من خلال نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_{/0}}{dt} = \sum\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/0}(\vec{F}) \Rightarrow ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z} = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

وفي حالة الزاوية θ صغيرة جدا:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

و بالتالي يمكن كتابة عبارة توتر الخيط من خلال معادلات القانون الاساسي للتحريك المذكورة سابقا:

$$\boxed{T = m(gcos\theta - l\dot{\theta}^2)}$$

الفصل السادس

العمل و الطاقة

6 العمل و الطاقة

I- مقدمـــــــــــــة

نلاحظ في حياتنا اليومية، انه يجب تطبيق قوة ما على اي جسم لتحريكه من مكان الى اخر. فيكتسب هذا الجسم طاقة حركية، اذ تتغير سرعته من الصفر الى قيمة معتبرة. نقول في هذه الحالة ان القوة المطبقة قد قامت بعمل اثناء انتقال الجسم، و ان هذا العمل اكسب الجسم طاقة حركية. في هذا الفصل سنعرج الى عمل قوة ما ونظرية الطاقة الحركية، كما نعرف نوعا خاصا من القوى وهي القوى المحافظة و القوى الغير محافظة، وكذا مفهوم الطاقة الكامنة.

II- مفاهيم اساسية:

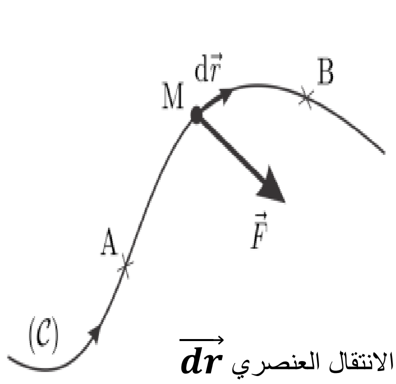
II-1- العمل: العمل الميكانيكي في علم الفيزياء هو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما وبمسافة ما. و يتعلق العمل بعدة عوامل نذكر منها: شدة القوة المنجزة للعمل، الزاوية المحصورة بين شعاع القوة و شعاع الانتقال، مقدار الانتقال لنقطة تأثيرها من A إلى B.

II-2- الطاقة: هي القدرة على أداء عمل. فمثلا زيادة سرعة سيارة أو رفع حجر يتطلب عملا. و تقاس الطاقة والعمل بالوحدات نفسها. فالقدرة هي معدّل بذل الشغل، أما القوة هي الدفع أو الجذب المبذول على الجسم. وتؤدي القوة عملا طالما أنها تحرّك الجسم، ويمكن تعيين كمية العمل بشدة القوة المستخدمة والمسافة التي يتحركها الجسم. والطاقة التي تقترِن بالحركة تُسّمى الطاقة الميكانيكية.

III- تعريف عمل القوة:

لنفترض نقطة مادية M تتحرك على مسار C و ذلك بتأثير قوة $\overrightarrow{\ }$ متغيرة مع الزمن. نعرف العمل الغنصري δW المنجز من طرف القوة $\vec{F}$ اثناء انتقال النقطة المادية M انتقالا عنصريا (صغير) $\overrightarrow{dr}$ بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr}}$$



الشكل (1-I): تمثيل عمل القوة $\vec{F}$ اثناء الانتقال العنصري $\overrightarrow{dr}$

وحدة العمل في جملة الوحدات الدولية IS هي الجول (Joule).

إذا انتقلت النقطة المادية على المسار C من النقطة A الى النقطة B، فان عمل القوة $\vec{F}$ أثناء هذا انتقال هو:

$$\boldsymbol{W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr}}$$

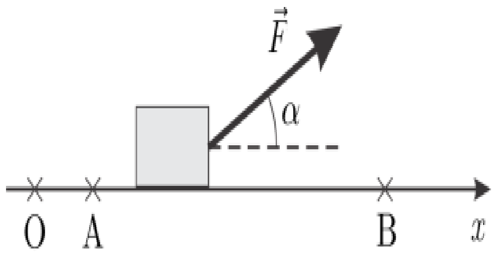
نلاحظ ان عمل القوة $\vec{F}$ يتعلق في الحالة العامة بالمسار المتبع من طرف النقطة M من النقطة A الى النقطة B.

- بعض القوى لا يتعلق عملها بالمسار المتبع، فنسمي هذه القوى بالقوى المحافظة.
- عندما تكون القوة عمودية على المسار فان عمل هذه القوة يكون معدوما.

$$\boldsymbol{\vec{F} \perp \overrightarrow{dr} \Rightarrow \delta W = 0}$$

- اذا كان عمل القوة موجبا ($W_{A\to B} > 0$) فإننا ندعو هذا العمل عملا محركا.
- اذا كان عمل القوة سالبا ($W_{A\to B} < 0$) فإننا ندعو هذا العمل عملا مقاوما.
- إذا كانت القوة $\vec{F}$ قوة ثابتة (اي ان شدتها و اتجاهها ثابتين) فان:

$$\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} = W_{A\to B} = \vec{F}.\int_A^B \overrightarrow{dr} = \vec{F}.(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{F.AB\ cos\alpha}$$



الشكل **(I-2)**: تمثيل القوة الثابتة $\vec{F}$ اثناء الانتقال العنصري من

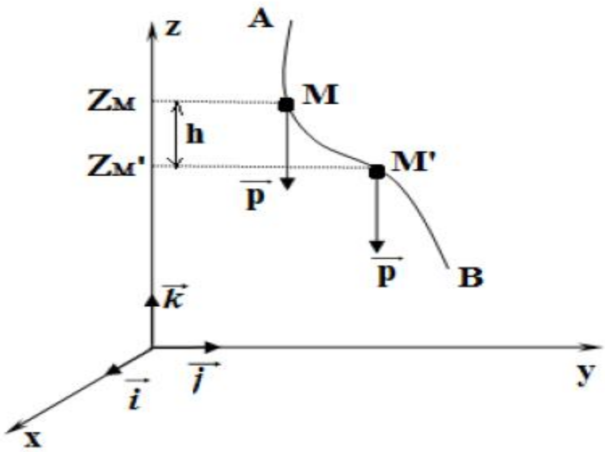
يبدو جليا ان عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع، بل له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيم أو منحني، و يتعلق فقط بالمسافة المباشرة AB والزاوية (α) المحصورة بين شعاعي القوة $\vec{F}$ والانتقال الكلي $\overrightarrow{AB}$.

IV – أمثلة على بعض أعمال القوى:

IV –1- عمل قوة الثقل:

نفترض نقطة مادية M كتلتها m تنتقل في الفضاء بين نقطتين A وB بتأثير عدة قوى. من بين هذه القوى نذكر قوة الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$، والتي تمثل قوة جذب الأرض لهذا الجسم. و لنفترض ان $\vec{g}$ منتظم. في هذه الحالة يكون العمل العنصري لقوة الثقل اثناء الانتقال العنصري $\overrightarrow{dr}$:

$$\boldsymbol{\delta W = \vec{P}.\overrightarrow{dr}}$$



الشكل (3-I): تمثيل عمل قوة الثقل أثناء الانتقال من A الى B.

باعتماد المعلم الكارتيزي (O, x, y, z) فان قوة الثقل تكون دائما شاقوليه متجهة نحو الأسفل، نقطة تأثيرها هي مركز الثقل لهذا الجسم. عندما ينتقل الجسم من النقطة A إلى B فان عمل قوة الثقل العنصري يكتب كما يلي:

$$\delta W = \vec{P}.\overrightarrow{dr} = (-mg\vec{k}).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}) = -mgdz$$

و من خلال عبارة العمل العنصري نستطيع أن نكتب عمل قوة الثقل بين النقطتين A و B:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dr} = \int_A^B -mgdz = -mg\int_A^B dz = -mg(r_B - r_A)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow W_{A\to B} = mg(r_A - r_B) = mgh}$$

حيث: $r_A - r_B = h$ و الذي يمثل فرق الارتفاع بين النقطتين A و B.

أي ان عمل قوة الثقل لا يتعلق بالمسار التي تسلكه النقطة M أثناء انتقالها من A الى B ، بل يتعلق بفرق الارتفاع بينهما فقط، وهي قوة الثقل هي قوة محافظة.

- عندما يصعد الجسم الى أعلى، فان $(z_B > z_A)$ ويكون عمل الثقل سالبا، أي أنه عمل مقاوم .

• عندما ينزل الجسم الى أسفل، فان $(z_B < z_A)$ ويكون عمل الثقل موجبا، أي أنه عمل محرك.

IV –2- عمل قوة المرونة:

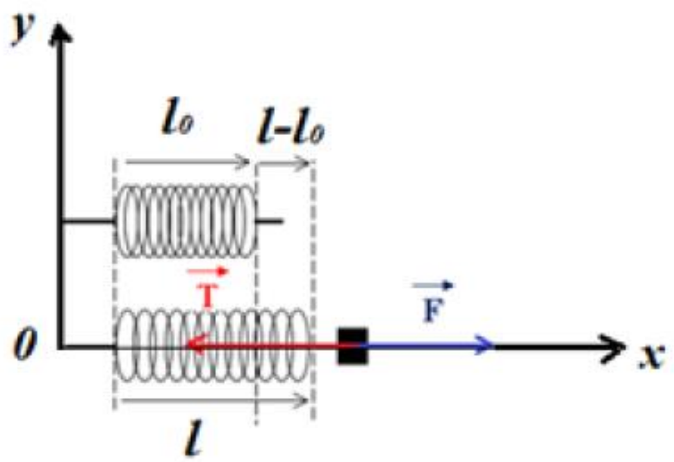
ليكن لدينا نابض تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$. و ليكن l_0 طول النابض في حالة الراحة (طوله الاصلي)، و l طول النابض في حالة تأثير القوة $\vec{F}$. و لتكن $\vec{T}$ قوة ارجاع النابض.

في حالة الاتزان:

$$\vec{F} = \vec{T}$$

$$\vec{F} = \vec{T} = -k(l - l_0)\vec{i} = -k\Delta l\vec{i} = -kx\vec{i}$$

نعتبر إزاحة عنصرية $\vec{dl} = dx\vec{i}$ للنهاية M للنابض، فنكتب عبارة العمل العنصري كالتالي:



$$\delta W = \vec{T}.\vec{dl} = (-kx\vec{i}).(dx\vec{i}) = -kxdx$$

عمل قوة توتر النابض عندما تنتقل النقطة M من الوضع x_A الى الوضع x_B يعطى بالعبارة التالية:

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B -kxdx = -k\int_A^B xdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k(x_B - x_A)$$

$$\boxed{W_{AB}(\vec{T}) = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = \frac{1}{2}kX^2}$$

نلاحظ أيضا ان عمل قوة المرونة (او توتر النابض) لا يتعلق بالمسار المتبع بل يتعلق فقط بالوضع الابتدائي A والنهائي B.

V- الاستطاعة:

تعرف الاستطاعة على انها نسبة العمل المنجز على الزمن اللازم لإنجازه، والاستطاعة هي مقدار سلمي مثلها مثل العمل و الطاقة.

عندما نقوم بعمل $\boldsymbol{W}$ خلال مدة $\boldsymbol{\Delta t}$ فعندئذ نعبر عن الاستطاعة المتوسطة P_m كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{P_m = \frac{W}{\Delta t}}}$$

عندما تؤول Δt الى الصفر، فنعبر على الاستطاعة اللحظية بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{P = \lim_{\Delta t \to 0} P_m = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dr}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}}$$

اذن عبارة الاستطاعة اللحظية:

$$\boxed{\boldsymbol{P = \vec{F}.\vec{v}}}$$

حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على الجسم

$\boldsymbol{\vec{v}}$ سرعة الجسم المتحرك.

في جملة الوحدات الدولية يعبر عن الاستطاعة بوحدة الواط (watt) ورمزه W.

حيث: $1W = J/s = 1Nm/s$

VI- نظرية الطاقة الحركية:

VI-1- الطاقة الحركية:

الطاقة الحركية هي نوع من الطاقة التي يملكها الجسم بسبب حركته. و نعرف الطاقة الحركية لنقطة مادية M كتلتها m و تتحرك بالسرعة $\vec{v}$ بالعبارة التالية:

$$\boxed{\mathbf{E_c} = \boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m}}}$$

حيث $\vec{p}$ تعبر عن كمية الحركة.

و من خصائص الطاقة الحركية نذكر:

- كل جسم في حالة حركة فإنه يملك طاقة حركية.
- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع كتلة الجسم m.
- الطاقة الحركية تتناسب طردا مع مربع سرعة الجسم $\vec{v}$.
- الطاقة الحركية تتعلق بالمعلم الذي ندرس من خلاله الحركة.

- وحدة الطاقة الحركية هي الجول.

VI-2- نظرية الطاقة الحركية:

لنفترض نقطة مادية M كتلتها m، تتحرك في جملة عطالية R، بتأثير عدة قوى محصلتها $\vec{F}$. ولنحسب العمل العنصري لهذه القوة:

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

و بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك، نجد:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

أي ان:

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dr} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt = m\vec{v}.d\vec{v}$$

و بما أن:

$$v^2 = \vec{v}.\vec{v}$$

و باشتقاق طرفي هذه المعادلة نجد:

$$2vdv = 2\vec{v}d\vec{v}$$

و منه نتحصل على عبارة العمل العنصري:

$$\delta W = m\vec{v}.d\vec{v} = mvdv = md\left(\frac{1}{2}v^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\delta W = dE_c}}$$

وعندما تنتقل M من نقطة A إلى نقطة أخرى B، يكون عمل القوة $\vec{F}$ هو:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

حيث يمثل الفرق $E_c(B) - E_c(A)$ تغير الطاقة الحركية بين النقطة A و النقطة B.

ومنه تكتب نظرية الطاقة الحركية كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2}}$$

تمثل هذه العلاقة نظرية الطاقة الحركية. و تنص هذه النظرية على أن عمل محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية في معلم غاليلية عند انتقالها من الموضع A الى الموضع B يساوي تغير الطاقة الحركية بين هذين الموضعين.

VI-3- القوى المحافظة و الغير المحافظة:

أ- القوى المحافظة:

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها محافظة أو مشتقة من كمون إذا كان عملها مستقلا عن المسلك المتبع ويتعلق فقط بنقطتي البداية والنهاية. في هذه الحالة نقول أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة (مشتقة من كمون)، و تسمى قوة محافظة $\vec{F_c}$. ونذكر من امثلة هذه القوى: قوة الثقل، قوة الجاذبية، قوة ارجاع النابض، أي قوة ثابتة بصفة عامة.

نبرهن في هذه الحالة أنّه يوجد دالة سلّمية $\varphi(x,y,z)$ بحيث:

$$\boxed{\vec{F}(\text{محافظة}) \Leftrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\varphi}$$

و تدعى الدالة السلمية $\varphi(x,y,z)$ الطاقة الكامنة الموافقة للقوة $\vec{F}$.

ب- القوى الغير محافظة:

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها غير محافظة اذا كان عملها يتعلق بالمسار المتبع و يرمز لها بــ $\vec{F}_{Nc}$. بصفة عامة بصفة عامة القوى التي تتعلق بالزمن او تلك التي تعتمد على شعاع السرعة لا تكون محافظة، من بين القوى غير المحافظة هي قوى الاحتكاك، التي تقاوم حركة الأجسام، و تكون مسؤولة عن تعطيل الحركة و تخامدها، و تؤدي إلى تبديد الطاقة الحركية ضياع أو تحويل غير مفيد (إلى حرارة تضيع في الوسط المحيط، و تعتبر المستهلك الأساسي للطاقة المستخدمة). يمكن لجسيمة ان تكون خاضعة لتأثير قوى محافظة وقوى غير محافظة في آن واحد.

VI-4- الطاقة الكامنة:

الطاقة الكامنة هي شكل من أشكال الطاقة. و هي الطاقة الموجودة في الجسم بسبب موضعه، اي تغيير بتغير موضع الجسم، وتسّمى أحيانا الطاقة المختزنة. وهي تمثل الشغل المبذول فعلا، فإذا رفعنا جسم من الأرض إلى منضدة، فإن طاقة وضع الجسم سوف تزداد بمقدار كمية الشغل اللازمة لرفعه إلى منضدة. ويمكن تحويل الطاقة الكامنة إلى أشكال أخرى من الطاقة. فإذا ما دفعنا هذا الجسم من فوق المنضدة فسوف يبدأ في السقوط وتتحول طاقته الكامنة إلى طاقة حركية.

إن عمل القوى المحافظة لا يتعلق بالمسار المتبع، يتعلق فقط بنقطة البداية ونقطة النهاية. يمكن التعبير عن عمل هذه القوى من خلال دالـــــة تسمى الطاقة الكامنة E_p.

$$\boxed{\mathbf{W_{AB}(\vec{F}_c) = \boldsymbol{E_p}(A) - \boldsymbol{E_p}(B) = -\Delta \boldsymbol{E_p}}}$$

$\vec{F}_c$: تمثل قوة محافظة.

ان التغير في الطاقة الكامنة بين النقطتين A و B يساوي عكس عمل القوة المحافظة المطبقة بين النقطتين المعتبرتين A و B. و بالتالي نقول إن عمل القوة المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة.

و من أجل التغيرات المتناهية في الصغر فان:

$$\boldsymbol{\Delta E_p \simeq dE_p}$$

و بما ان:

$$dE_p = W_{AB}(\vec{F}_c) = -\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

ففي المعلم الكارتيزي:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \qquad (*)$$

و من جهة اخرى:

$$dE_p = -\vec{F_c}.\overrightarrow{dl} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (**)$$

و بمطابقة $(*)$ مع $(**)$ نجد:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

وبالتالي:

$$dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right).(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{dE_p = -\overrightarrow{grad}E_p.\overrightarrow{dl}}}$$

اي أن:

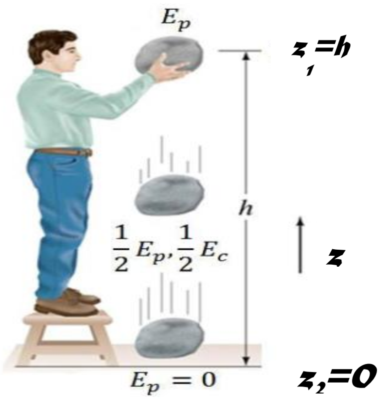
$$\overrightarrow{F_C} = -\overrightarrow{grad}Ep \Leftrightarrow Ep = -\int \vec{F}_c.\vec{dl} + C$$

حيث ثابت التكامل.

VI-5- أمثلة عن الطاقة الكامنة لقوى محافظة:

VI-5-1- الطاقة الكامنة الثقالية:

عندما نقوم برفع جسم ما من سطح الأرض إلى ارتفاع معين، فإنه يستدعي منا أن نبذل عملا ضد الجاذبية الأرضية و الجسم يبدأ في تخزين هذا العمل المبذول على هيئة طاقة كامنة. هذا الشكل من أشكال الطاقة مرتبط بحقل الجاذبية الأرضية و هذه الطاقة تدعى الطاقة الكامنة الثقالية. كما تتعلق هذه الطاقة بالارتفاع عن سطح الأرض. الجسم يكتسب هذه الطاقة عندما يزداد ارتفاعه عن سطح الأرض. وعندما نترك الجسم ليسقط لحاله فإن الطاقة الكامنة المخزنة فيه تتحول بشكل تدريجي إلى طاقة حركية وينتج عن ذلك زيادة سرعة الجسم مع انخفاض الارتفاع.



و لإيجاد عبارة الطاقة الكامنة الثقالية E_p الموافقة لقوة الثقل:

- في حالة صعود جسم نحو الأعلى لدينا:

$$\vec{F} = \vec{P} = -mg\vec{k}$$

من التعريف العام للطاقة الكامنة نجد:

$$E_p(z) = -\int \vec{F_c}.\vec{dl} + C = -\int \vec{P}.\vec{dl} + C = -\int -mg\vec{k}.dz\vec{k} + C = mgz + C$$

$$\boxed{E_p(z) = mgz + C}$$

حيث C ثابت يتعلق بالمرجع المختار للطاقة الكامنة الثقالية. فعند:

$$z = 0 \Rightarrow E_p(z = 0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

و بالتالي نتحصل على عبارة الطاقة الكامنة الثقالية كالتالي:

$$E_p(z) = mgz$$

في الحالة العامة إذا ارتفع الجسم عن موضعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تزداد وإذا انخفض الجسم عن ارتفاعه الأصلي فإن طاقته الكامنة الثقالية تنقص.

VI-5-2-الطاقة الكامنة المرونية:

لنفترض ان جسما M كتلته m يتحرك حركة مستقيمة بدون احتكاك وفق المحور (xO) بتاثير نابض، ثابت صلابته k. كما رأينا سابقا أن النابض يؤثر في هذا الجسم بقوة إرجاع تكتب بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{T} = -kx\vec{\imath}}$$

بحيث x تمثل استطالة النابض. ولنبحث عن دالة الطاقة الكامنة المرونية E_p:

$$E_p(x) = -\int \vec{T}.\overrightarrow{dl} = -\int -kx\vec{\imath}.dx\vec{\imath} = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

عند توازن النابض:

$$x = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow C = 0$$

و منه نكتب عبارة الطاقة الكامنة المرونية:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

VI-5-3- الطاقة الكامنة القوة الكهربائية:

تعطى عبارة القوة الكهربائية وفق قانون كولوم كالتالي:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

و بتطبيق عبارة تعريف الطاقة الكامنة نجد:

$$E_p = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r.dr\vec{e}_r = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}.dr$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E_p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r} + c$$

من اجل r بعيدة جدا يكون الكمون في المالانهاية معدوما ايضا أي أن: $E_p(\infty) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E_p} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q_1q_2}}{\boldsymbol{r}}$$

VI-5-4- الطاقة الكامنة لقوة الجاذبية:

لنعتبر جسماً كتلته m_1 ساكناً في O. ولنفترض أن جسما اخر كتلته m_2 يقع في نقطة A من الفضاء على بعد r من m_1. يؤثر الجسم m_1 في m_2 بقوة التجاذب الكوني و التي تعطى بقانون نيوتن:

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$$

حيث $\vec{e}_r$ هو شعاع الواحدة الموّجه من O نحو A. و G ثابت الثقالة.

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$$

بما أن:

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -\overrightarrow{grad}E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r$$

$$\frac{dE_p}{dr} = -G\frac{m_1m_2}{r^2} \Rightarrow E_p(r) = \int -G\frac{m_1m_2}{r^2}dr \Rightarrow E_p(r) = -G\frac{m_1m_2}{r} + C$$

من اجل r كبيرة جدا:

$$r \to \infty,\ E_p \to 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{E_p} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_1m_2}}{\boldsymbol{r}}}$$

تتناسب هذه الطاقة عكسا مع r. و في الحالة الخاصة اذا اعتبرنا ان الكتلة الاولى هي كتلة الارض، و الكتلة الثاني هي كتلة جسم اخر متحرك بجوار سطح الارض، نبرهن ان هذه الطاقة تؤول للطاقة الكامنة الثقالية.

VI-5-5- خصائص القوى المشتقة من كمون:

- من اجل القوى المحافظة $\vec{F}$ يكون العمل معدوما داخل مجال مغلق: $\oint dW = 0$
- دوران القوى المحافظة معدوم اي ان: $\overrightarrow{rot}\,\vec{F_c} = \vec{0}$

- في حالة القوى المشتقة من الطاقة الكامنة فإن عملها يساوي ويعاكس التغيير في الطاقة الكامنة على نفس المسار:

$$\boldsymbol{W_{A\to B}(\vec{F}_c) = -\Delta E_p}$$

VI-5-6- الطاقة الميكانيكية:

رأينا سابقا ان تغير الطاقة الحركية بين نقطتين يساوي عمل محصلة القوى بين هاتين النقطتين. لكن في الواقع يمكننا ان نعتبر ان محصلة القوى عبارة عن مجموع محصلتين، إحداهما محصلة القوى المحافظة $\vec{F}_c$ و الاخرى محصلة القوى الغير محافظة $\vec{F}_{nc}$ أي أن:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \triangle E_c \Rightarrow W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}}) + W_{AB}(\overrightarrow{F_c}) = E_c(B) - E_c(A) \qquad (*)$$

يمكن التعبير عن عمل القوى المحافظة بدلالة الطاقة الكامنة التي تشتق منها. ليكن الطاقة E_p الكامنة الكلية، أي مجموع الطاقات الكامنة التي تشتق منها كل قوة محافظة، اي أن:

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_c}) = E_p(A) - E_p(B)$$

و بالتعويض في العادلة (*) نجد:

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}}) + \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(E_c(B) - E_c(A)\right) - \left(E_p(A) - E_p(B)\right) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}})$$

$$\Leftrightarrow \left(E_c(B) + E_p(B)\right) - \left(E_c(A) + E_p(A)\right) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}})$$

$\left(E_c(B) + E_p(B)\right)$ يدعى هذا الحد بالطاقة الكلية او الطاقة الميكانيكية للجسم عند النقطة B، و نرمز لها بالرمز $E_M(B)$. و هي عبارة عن مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنقطة المادية M عندما تكون في النقطة B.

و عليه يمكننا كتابة العلاقة الاخيرة كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M = W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}})}}$$

VI-5-7- نظرية الطاقة الميكانيكية:

ان التغير في الطاقة الميكانيكية لنقطة مادية بين موضعين يساوي مجموع اعمال القوى غير المحافظة فقط بين هذين الموضعين.

$$\boldsymbol{E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M = \sum W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{nc}})}$$

نلاحظ من هنا أن الطاقة الكلية غير ثابتة و التغير فيها يساوي عمل القوى غير المحافظة و الذي يمثل فقدان الطاقـة.

أما في حالة خضوع الجسم لقوى محافظة فقط فان الطاقة الميكانيكية تكون محفوظة خلال الزمن:

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{F_{nc}}) = 0 \Rightarrow \Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M(B) = E_M(A) = cte$$

$$\boldsymbol{E_M = E_c + E_p = cte}$$

أي أن التغير في الطاقة الحركية يساوي التغير في الطاقة الكامنة.

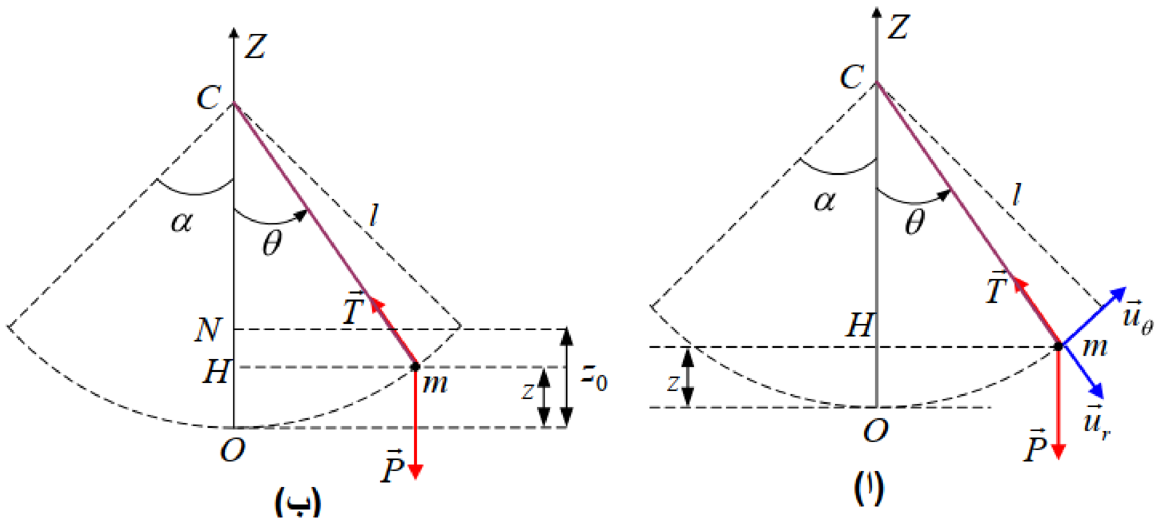
$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

هذا يعني أنه إذا كانت الجملة معزولة ميكانيكيا فإن الطاقة الميكانيكية محفوظة.

<u>مثال تطبيقي: الهزاز التوافقي البسيط</u>

الهزاز التوافقي البسيط هو كل جملة تقوم بحركة دورية حول وضع توزن مستقر و لا تخضع لاي تخامد ثل الاحتكاكات و لا اي اثارة خارجية اخرى.

يمثل الشكل ادناه نواس بسيطا خيطه عديم الامتطاط و طوله l. و تخضع الكتلة m المرتبطة باخر الخيط لقوة ثقلها $\vec{P}$ و قوة توتر الخيط $\vec{T}$.



الشكل **(4-I)**: تمثيل النواس البسيط

كما نعلم ان قوة الثقل تشتق من كمون بينما عمل التوتر معدوما نظرا لان حامله عمودي على المسار في كل لحظة. نأخذ كمبدأ للطاقة الكامنة المستوي الافقي المار من النقطة O. و من اجل موضع معين للكتلة m فان:

$$Ep = mgz = mg(OH) = mg(CO - CH) = mgl(1 - cos\theta)$$

و عبارة السرعة المماسية للمسار:

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

يمكننا حساب الطاقة الميكانيكية للنواس كالتالي:

$$E_M = E_C + E_p = mg(1 - cos\alpha) + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 = cte$$

بوضع $w_0{}^2 = \frac{g}{l}$، عبارة الطاقة الميكانيكية تصبح من الشكل:

$$\boldsymbol{\dot{\theta}^2 + 2w_0{}^2(1 - \cos\alpha) = K}$$

حيث ثابت تحدده الشروط الابتدائية. فمثلا اذا اخذنا $\dot{\theta}_0 = 0$ من اجل $\alpha = \theta_0$ ففي هاته الحالة وحسب الشكل (ب). نجد:

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow \Delta E_c = \Delta E_p \Rightarrow mg(z_0 - z) = \frac{1}{2}m\ddot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow mgl(cos\theta - cos\alpha) = \frac{l^2}{2} m\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + 2\boldsymbol{w_0}^2(\cos\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{cos\theta}) = 0$$

و باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن نتحصل معادلة الحركة و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \boldsymbol{w_0}^2\boldsymbol{sin\theta} = 0$$

من اجل اهتززات صغيرة السعة فان:

$$\theta < 10^0 \Rightarrow sin\theta \approx \theta$$

أي ان:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \boldsymbol{w_0}^2\boldsymbol{\theta} = 0$$

و الحل العام لهذه المعادلة:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}\cos(\mathbf{wt} + \boldsymbol{\varphi})$$

اي ان الحركة دورانية جيبية نبضها $\boldsymbol{w_0}$ و دورها:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{w_0}} = 2\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{g}}}$$

VI-5-8- تصادم الجسيمات:

أ- انحفاظ كمية الحركة: نقول عن جملة معزولة انها تلقت صدمة أذا طرأت على سرعات عناصرها تغيرات متبرة بين اللحظتين، ما قبل الاصطدام و ما بعد الاصطدام، حيث يحدث تبادل في كمية الحركة و الطاقة بين مختلف الاجسام المتصادمة.

لتكن $\overrightarrow{p_1}$ و $\overrightarrow{p_2}$ كميتي الحركة لجسميتين قبل التصادم و $\overrightarrow{p'}_1$ و $\overrightarrow{p'}_2$ كميتي الحركة بعد التصادم. الجملة معزولة و التاثيرات المتبادلة بين الجسيمتين ذات الكتلتين m_1 و m_2 تحدث في منطقة محددة من الفراغ و صغيرة جدا. لذا نقول ان التصادم نقطي.

بما ان الجملة معزولة فان في كمية الحركة و الطاقة الحركية محفوظتان. و نكتب :

$$\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{p'}}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{p'}}_2 = \boldsymbol{cte} \Rightarrow \Delta\vec{\boldsymbol{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m_1\vec{v}_1 + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2}$$

ب- التصادم المرن:

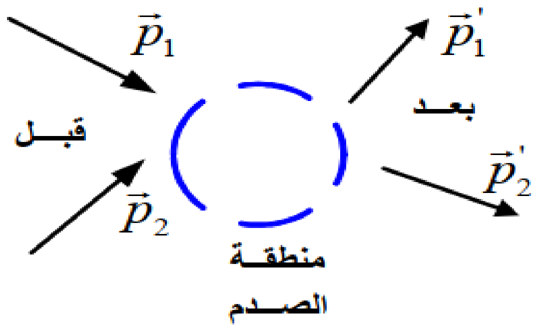
نقول ان التصادم بين جسيميتين **مرنا** إذا بقيت الطاقة الحركية الكلية للجملة محفوظة اثناء التصادم. فالجسيمتان لا تتحدان بعد التصادم.

نرمز الى الطاقة الحركية للجملة قبل التصادم بـ E_c و بعد التصادم بـ E'_c

ووفقا لمبدا الانحفاظ نكتب: $\boldsymbol{E_c(\text{قبل التصادم}) = E'_c(\text{بعد التصادم}) \Leftrightarrow \Delta E_c = 0}$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2}$$



الشكل **(I-5)**: تمثيل التصادم المرن

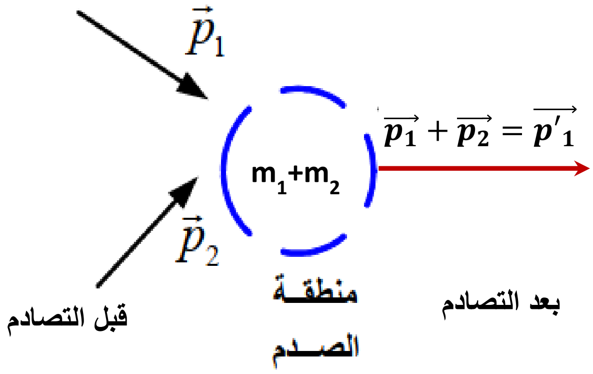
ج- التصادم اللين:

هو تصادم غير مرن، اي ان الجسيمتين المتصادمتين تتحدان بعد التصادم لتكونا جملة واحدة فيصبح لهما نفس السرعة. إذا تتناقص الطاقة الحركية اثناء التصادم و يحدث ضياع في الطاقة على شكل حرارة. إذن لا يوجد انحفاظ للطاقة الحركية. فاذا كان $\overrightarrow{p_1}$ و $\overrightarrow{p_2}$ كمية الحركة للجسيمتين قبل التصادم و $\overrightarrow{p'}_1$ كمية حركة للجسيمتين متحدتيين بعد التصادم، و نكتب:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'}_1 = cte \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2(m_1 + m_2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2$$



الشكل **(6-I)**: تمثيل التصادم اللين

تطبيق1:

قذيفة كتلتها 800غ تتحرك وفق خط مستقيم افقي بسرعة 1م/ثا لتصيب هدفا ساكنا كتلته 800غ. الهدف المصاب يتحرك وفق محور يصنع زاوية -30° مع الافق.

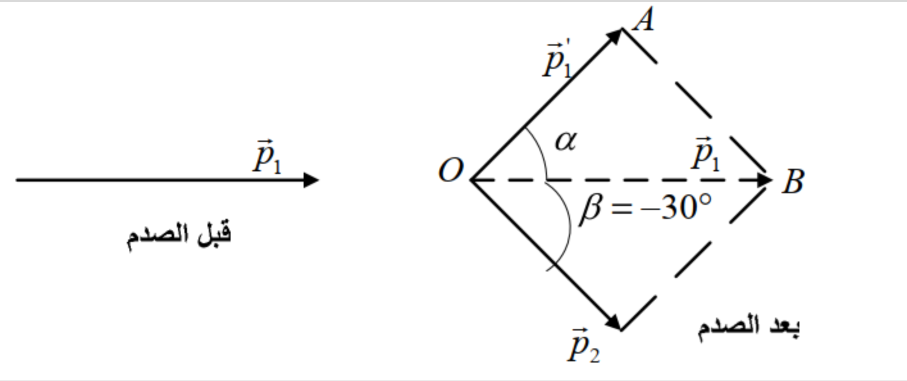
ا- حدد جهة و شدة سرعة القذيفة بعد الاصطدام.

ب- حدد شدة سرعة الهدف بعد الاصطدام.

الاجابة:

أ- تحديد جهة و شدة سرعة القذيفة:

الرسم التالي يوضح جهة القذيفة بعد التصادم.



لدينا:

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{{p'_1}^2}{2m_1} + \frac{{p_2}^2}{2m_2} \\ m_1 = m_2 = m \end{cases} \Rightarrow p_1^2 = {p'_1}^2 + p_2^2$$

نلاحظ من الشكل ان:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 60°$$

و ايضا:

$$cos\alpha = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{v'_1}{v_1} \Rightarrow \boldsymbol{v'_1 = v_1 cos\alpha = 0.5m/s}$$

ب- تحديد شدة سرعة الهدف بعد الاصطدام:

من الشكل نلاحظ أن:

$$\cos(-30) = \frac{mv}{mv_1} = \frac{v}{v_1} \Rightarrow \boldsymbol{v = 0.87m/s}$$

تطبيق2:

تتحرك جسيمة كتلتها 6 كغ بسرعة 15م /ثا لتصطدم عموديا مع جسيمة كتلتها 5كغ تتحرك بسرعة 20 م/ثا. إذا كان الاصطدام لينا:

أ- جد كمية حركة الجملة قبل التصادم؟

ب- احسب سرعة الجسيمتين بعد التصادم؟

الاجابة:

أ- ايجاد كمية حركة الجملة قبل التصادم:

لدينا:

$$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \Rightarrow p = \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2} = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}$$

$$p = \sqrt{(6 * 15)^2 + (5 * 20)^2} = 134.5kgm/s$$

$$\boldsymbol{p = 134.5kgm/s}$$

ب- حساب سرعة الجسيمتين بعد التصادم:

لدينا تصادما لين اي ان:

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} \Rightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

طويلة سرعة الجسيمتين بعد التصادم هي:

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{134.5}{11} = 12.23m/s$$

$$\boldsymbol{|\vec{v}| = 12.23m/s}$$

المراجع

1- Cours De Physique Mécanique Du Point, Cours Et Exercices Corrigés, Licence 1re Et 2e Années, Alain Gibaud, Michel Henry, 2e Edition DUNOD, 2007.

2- Mecanique Du Point Materiel, Ahmed Fizazi, OPU, Alger 2012.

3- Mécanique Générale, Cours et exercices corrigés, Sylvie Pommier, Yves Berthaud, DUNOD, 2010.

4- Physique, Exercices Et Problèmes, 1re Années, Jean-Marie Brébec, Tania Chaboud, Thierry Desmarais, Alain Favier, Marc Ménétrier, Régine Noël, Hachette supérieure, 2003.

5- Hugh D. Young and Roger A. Freedman. University Physics. PEARSON Addison-Wesly, New York, 12th edition, .2008

6- مصطفى العليوي، هاني قوبا، ميكانيك النقطة المادية، (2016) الإصدار الثاني.

7- إبراهيم سعدالله، الفيزياء الأساسية للجامعة الميكانيك. ديوان المطبوعات الجامعية (2017).