4.3 Propagation des ondes dans les lignes à constantes réparties[1]

La théorie fait partie du cours de physique; aussi nous bornerons-nous aux cas particuliers qui nous intéressent.

Les équations différentielles de la tension et du courant sont (d'après la règle de Kirschoff et des noeuds) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -R'i - L'\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -G'u - C'\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

où	R' = résistance ohmique	(Ω/m)
	L' = inductance	(H/m)
	C' = capacité	(F/m)
	G' = conductance transversale	(S/m)

d'où l'on déduit l'équation commune à u et i

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R'G'u + (R'C' + L'G')\frac{\partial u}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

L'étude de la solution générale est assez complexe ; dans le cas où l'on a affaire à des ondes de haute fréquence, on peut admettre que les paramètres R et G ont peu d'influence, face à L et C. En posant

$$R = G = o$$

ce qui revient à admettre que la ligne est sans pertes, c'est-à-dire que l'amortissement du phénomène est nul (il n'est d'ailleurs pas considérable dans les lignes usuelles), l'équation précédente devient :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dont la solution générale est de la forme : $U = f_1 (x - vt) + f_2 (x + vt)$

avec $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{c_o}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} =$ vitesse de propagation du phénomène

[1]voir également "Energie Electrique", vol. XII, pp. 205 et suivantes, EPFL, Aguet + Morf [6]

où c_o = vitesse de la lumière $(3\ 10^8$ m/s)

μ_r = perméabilité (1 dans le vide, dans l'air)
ε_r = constante diélectrique de l'isolant
f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires dépendant des conditions initiales.

$f_1\ (x - vt)$ est une onde progressive

$f_2\ (x + vt)$ une onde rétrograde.

$$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$ = impédance d'onde

câble d'énergie	10 ...	60 Ω
câble télécomm.	100 ...	150 Ω
ligne aérienne	300 ...	600 Ω

La résolution du système d'équation donne pour le courant, en posant :

$$i = \frac{u}{Z} = \frac{f1(x - vt)}{Zw} - \frac{f2(x + vt)}{Zw}$$

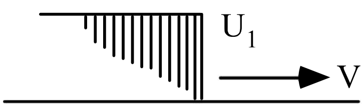
4.3.1 Réflexion - Réfraction

Lorsqu'une onde se propage dans un réseau, à chaque discontinuité, c'est-à-dire chaque fois que les paramètres changent de valeur, donc aussi l'impédance d'onde Z_W qui devient :

$$Z_{w2} = \sqrt{\frac{L'_2}{C'_2}}$$

une réflexion et une réfraction partielles vont se produire

Pour simplifier, considérons une onde rectangulaire se propageant à la vitesse v, le long d'une ligne d'impédance Z_{W1}

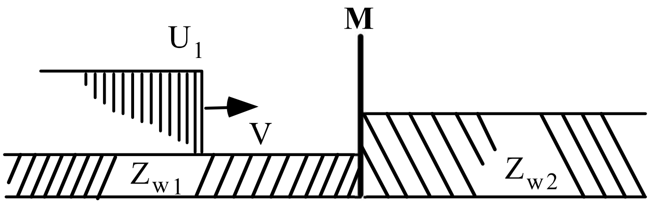


$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

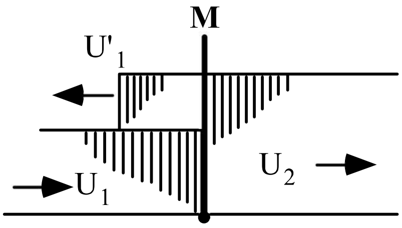
Il y circulera également un courant

$$i_1 = \frac{U_1}{Z_{w1}}$$

A l'extrémité de la ligne, se trouve (pt. M) un élément (ligne, câble, transfo, par ex.) dont l'impédance d'onde est Z_{W2}



u_1 est l'onde incidente, respectivement i_1; appelons u_2 l'onde réfractée (transmise) et $u_1^{'}$ l'onde réfléchie.



un instant plus tard

à tout instant :	$u_1 + u_1^{'} = u_2$	(1)
D'autre part,	$i_1 + i_1^{'} = i_2$	(2)
	$u_1,\ i_1,\ u_2,\ i_2$	sont des ondes progressives
	$u_1^{'}$ et $i_1^{'}$	sont des ondes rétrogrades

donc :

$$u_1 = Z_{w1} i_1 \qquad i_1 = \frac{u_1}{Z_{w1}}$$

$$u_2 = Z_{w2} i_2 \qquad i_2 = \frac{u_2}{Z_{w2}}$$

$$u_1^{'} = -Z_{w1} i_1^{'} \qquad i_1^{'} = \frac{u_1^{'}}{Z_{w1}}$$

En introduisant la valeur des courants dans l'équation (2) et en combinant avec l'équation (1), on établit que :

$$u_1^{'} = \frac{Z_{w2} - Z_{w1}}{Z_{w2} + Z_{w1}} u_1$$

$$u_2 = \frac{2\, Z_{w2}}{Z_{w2} + Z_{w1}} u_1$$

$$r_u = \frac{Z_{w2} - Z_{w1}}{Z_{w2} + Z_{w1}}$$ est le facteur de réflexion

$$t_u = \frac{2\,Z_{w2}}{Z_{w2} + Z_{w1}}$$ est le facteur de transmission

L'onde réfléchie sera **positive** si $Z_{W2} > Z_{W1}$; dans ce cas, il y aura augmentation de la surtension au point de transition ; par exemple, passage d'une ligne aérienne à un transfo, ou d'un câble à une ligne aérienne. Dans une telle situation, **c'est donc à l'endroit de la transition que l'on peut craindre une rupture de diélectriques**.

Cas particuliers :

a) ligne à vide : $Z_{W2} = \infty$

$r = +1$ $t = 2$

la tension est doublée à l'extrémité de la ligne; le courant est nul car :

$$i_2 = \frac{u_2}{Z_{w2}} = 0$$

$$i'_1 = -\,i_1$$

l'onde réfléchie est de même phase et de même amplitude.

b) ligne à terre ou en court-circuit : $Zw2 = 0$

$r = -1$ $t = 0$

la tension est nulle, mais le courant est doublé :

$$i'_1 = i_1 \,;\; l_2 = 2\,i_1$$

l'onde réfléchie est déphasée de 180° et de même amplitude

c) ligne adaptée $Zw2 = Zw1$

$r = 0$ $t = 1$

il n'y a pas de réflexion.

4.3.2 Détection des défauts dans les câbles

Les ruptures, courts-circuits, dans les câbles présentent des discontinuités d'impédance. La détection des défauts utilise les principes décrits ci-dessus en envoyant une onde dans l'objet. Le temps d'aller-retour ainsi que la forme d'onde réfléchie permettent de localiser et définir le défaut.

Cette méthode est aussi utilisée pour localiser les décharges partielles dans les câbles, lors de l'essai correspondant.