1- 1 - Introduction à l'automatique

L'automatique est généralement définie comme la science qui traite des ensembles qui se suffisent à eux-mêmes et où l'intervention humaine est limitée à l'alimentation en énergie et en matière première.

L'objectif de l'automatique est de remplacer l'homme dans la plupart des tâches (tâches répétitives, pénibles, dangereuses, trop précises, trop rapides) qu'il réalise dans tous les domaines sans intervention humaine.

Les systèmes automatiques permettent donc :

* de réaliser des opérations trop complexes ou délicates ne pouvant être confiés à l'homme,
* de se substituer à l'opérateur pour des tâches répétitives,
* d'accroître la précision,
* d'améliorer la stabilité d'un système et sa rapidité.

De tels dispositifs se rencontrent fréquemment dans la vie courante, depuis les mécanismes biologiques du corps humain jusqu'aux usines entièrement automatisées.

Une telle science englobe un grand nombre de disciplines et, par conséquent, un automaticien devrait être à la fois :

* Mathématicien
* Electricien
* Mécanicien
* Economiste

1- 1.1 - Exemple

Nous sommes entourés d'un grand nombre de systèmes automatiques, machine à laver, ascenseur, distributeur de boisson, robot, suivi de trajectoire d'un missile.

1- 1.2 - Classification

Le domaine des applications de l'automatique est très vaste et varié, mais l'observation de l'industrie contemporaine conduit à une certaine classification qui se résume en deux grandes familles selon les données que traitent ces systèmes :

* ***Les automatismes séquentiels***
* ***Les asservissements***

Ces deux parties de l'automatique sont nettement différentes, elles s'appuient sur des notions théoriques qui n'ont que de lointains rapports entre elles et les techniques qui permettent de les réaliser sont, aussi, très différentes.

1- 1.2.a - Les automatismes séquentiels

C'est la branche de l'automatique qui organise le déroulement des différentes opérations relatives au fonctionnement d'un ensemble complexe.

Un automatisme à séquence impose l'ordre dans lequel les opérations se déroulent, s'assure que chaque opération est bien terminée avant d'aborder la suivante, décide de la marche à suivre en cas d'incidents.

Bien entendu, un automatisme séquentiel peut avoir à contrôler des asservissements et des régulateurs (voir § 1- 1.2.b) parmi les ensembles qu'il gère.

Ce type d'automatisme est utilisé par exemple dans la mise en route et l'arrêt d'installations complexes (centrales automatiques), sur les machines outils et, en général, dans presque toutes unités de production automatisées.

Il faut noter également que toutes les séquences d'alarme et de sécurité industrielle font partie des applications de ce type d'automatisme.

Les automatismes sont des systèmes logiques qui ne traitent que des données logiques (0/1, vrai/faux, marche/arrêt,...). Ils utilisent les moyens de commutation offerts par l'électronique (circuit logique) et la mécanique (logique pneumatique). Le calcul de ces automatismes impose de connaître l'algèbre de Boole et la théorie des circuits séquentiels.

Ils sont classés en 2 branches :

* Systèmes combinatoires : les sorties du système ne dépendent que des variables d'entrées.
* Systèmes séquentiels : les sorties dépendent bien sûr de l'évolution des entrées mais aussi de l'état précédent des sorties.

Exemple : Machine à laver, manipulateur pneumatique, ascenseur, distributeur de boissons.

1- 1.2.b - Les asservissements

Un système asservi est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne.

Cette branche de l'automatique se décompose en deux autres sous branches (séparées artificiellement par l'usage) :

* ***Régulation*** : maintenir une variable déterminée, constante et égale à une valeur, dite de consigne, sans intervention humaine. Exemple : Régulation de température d'une pièce.
* ***Systèmes asservis*** : faire varier une grandeur déterminée suivant une loi imposée par un élément de comparaison. Exemple : Régulation de la vitesse d'un moteur, Suivi de trajectoire d'un missile.

L'asservissement est essentiellement analogique et utilise la partie analogique des trois moyens de base dont on dispose : mécanique, électrotechnique et électronique. La théorie des asservissements nécessite une bonne base mathématique classique.

1- 1.3 - Systèmes continus et invariants

- *Système continu* : un système est dit continu lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions du type f(t), avec t une variable continue, le temps en général. On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets (ou échantillonnés), par exemple les systèmes informatiques.
- *Système invariant* : On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de comportement ne se modifient pas avec le temps.

1- 1.4 - Evolution de l'automatique

Ces dernières années, l'automatique s'est considérablement modernisée, surtout depuis l'avènement des calculateurs numériques. Les systèmes automatiques conduits par calculateurs assurent la quasi-totalité des tâches :

- ils collectent et traitent les informations issues des capteurs qui fournissent l'ensemble des variables d'entrée.
- ces variables d'entrée constituent les données sur lesquelles des calculs numériques seront effectués. Ils correspondent à la résolution numérique de systèmes d'équations qui constituent le "modèle mathématique".
- le résultat de ce traitement fourni en binaire est converti en variables continues et est injecté dans le processus, afin de modifier son évolution dans un sens désiré.

En plus de ces tâches qui sont classiques en automatique, le calculateur joue un rôle optimalisateur. C'est-à-dire qu'il exécute le travail à faire aux meilleures conditions économiques en minimisant les déchets, en tenant compte du carnet de commande, etc. Cet aspect, lui, est nouveau. Ce genre de problème était traité séparément. Ce procédé permet de tenir compte d'un nombre considérable de variables, donc de traiter des problèmes jusqu'alors impossibles. En plus, il fait intervenir directement les variables économiques au niveau de chaque organe (moteur, pompe, etc ...). Or, jusqu'à présent, les variables économiques n'intervenaient que globalement. Il permet donc de traiter ce problème de façon beaucoup plus rationnelle.

Les systèmes automatiques conduits par calculateurs nécessitent une bonne connaissance de la programmation en langage machine, de fortes connaissances mathématiques (pour élaborer le modèle) et surtout une connaissance parfaite du processus à réguler, ce qui est le plus délicat. Ceci nécessite encore de bonnes connaissances en théorie de l'information, en statistique et en recherche opérationnelle.

1- 2 - Boucle de régulation

1- 2.1 - Notion d'asservissement

L'objectif d'un système automatisé est de remplacer l'homme dans une tâche donnée. Nous allons, pour établir la structure d'un système automatisé, commencer par étudier le fonctionnement d'un système dans lequel l'homme est la " partie commande ".

Exemple : conducteur au volant d'un véhicule

> Le conducteur doit suivre la route. Pour cela, Il observe la route et son environnement et évalue la distance qui sépare son véhicule du bord de la route. Il détermine, en fonction du contexte, l'angle qu'il doit donner au volant pour suivre la route. Il agit sur le volant (donc sur le système) ; puis de nouveau, il recommence son observation pendant toute la durée du déplacement. Si un coup de vent dévie le véhicule, après avoir observé et mesuré l'écart, il agit pour s'opposer à cette perturbation.

Si l'on veut qu'un asservissement remplace l'homme dans diverses tâches, il devra avoir un comportement et des organes analogues à ceux d'un être humain. C'est-à-dire qu'il devra être capable d'***apprécier***, de ***comparer*** et d'***agir***.

Exemple : ouverture de porte pour accès à une maison.

> Un autre exemple d'asservissement très simple est celui d'un homme qui veut entrer dans une maison : à chaque instant, ses yeux "mesurent" l'écart qui existe entre sa position et la porte. Son cerveau commande alors aux jambes d'agir, en sorte que cet écart diminue, puis s'annule.

Les yeux jouent alors le rôle d'organes de ***mesure*** (ou de capteurs), le cerveau celui de ***comparateur*** et les jambes celui d'***organe de puissance***.

Tout asservissement comportera ces trois catégories d'éléments qui remplissent les 3 grandes fonctions nécessaires à sa bonne marche (fig. 1–1) :

- ***Mesure*** (ou observation)
- Comparaison entre le but à atteindre et la position actuelle (***Réflexion***)
- ***Action*** de puissance

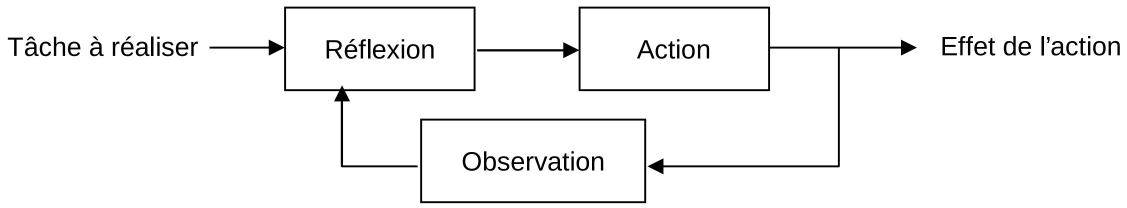


Fig. 1–1 : Concept général d'un asservissement

1- 2.2 - Systèmes bouclés et non bouclés

1- 2.2.a - Exemple 1 : Tir au canon

Pour mieux saisir la notion de système bouclé, prenons un exemple avec 2 cas. Dans le premier, nous considérons un système non bouclé et nous mettrons en évidence ses faiblesses. Dans le second, nous montrerons les avantages qu'apporte le ***bouclage***.

Premier cas : tir au canon sur une cible.

> On considère une cible à détruire et un canon. Pour atteindre le but que l'on s'est proposé, on règle l'angle de tir du canon et la charge de poudre de l'obus en fonction des coordonnées de la cible et d'autres paramètres connus à l'instant du tir. Une fois l'obus parti, si ces paramètres extérieurs viennent à changer, par exemple si la cible se déplace, on ne peut plus agir sur sa direction : l'obus est abandonné à lui-même.

Deuxième cas : tir au canon sur une cible avec une fusée téléguidée et un radar.

> Considérons la même cible et une fusée téléguidée. Dans ce cas, même si la cible se déplace ou un vent latéral fait dévier la fusée de sa trajectoire initiale, elle atteindra quand même son but. En effet, à chaque instant, un radar donnera les positions respectives de la fusée et de la cible. Il suffira de les comparer pour en déduire l'erreur de trajectoire et agir sur les gouvernes de la fusée pour rectifier cette erreur. Dans ce cas, le système n'est plus abandonné à lui-même car il comporte une boucle de retour qui est constituée par le radar, qui "mesure" la position de la fusée et qui en informe l'opérateur, et par une télétransmission qui permet de modifier la trajectoire par action sur les gouvernes.

> *La boucle de retour apporte donc, au prix d'une complication certaine, un gain de précision énorme.*

1- 2.2.b - Exemple 2 : Asservissement de vitesse d'une voiture

Supposons que l'on veuille maintenir constante la vitesse (V) d'une voiture. A la valeur (V) de la vitesse correspond une valeur (e) de la course de l'accélérateur. Il suffirait donc, en principe, de maintenir (e) constant pour que (V) le soit. Chacun sait que la réalité est différente.

En effet, le vent, les variations de pente et le mauvais état de la route modifient (V). Ces paramètres extérieurs qui influent sur la vitesse sont appelés ***grandeurs perturbatrices*** ou ***perturbations***. Si elles n'existaient pas, la boucle de régulation serait inutile.

Pour que la vitesse reste constante, il faut utiliser un tachymètre qui mesure la vitesse réelle. Le chauffeur compare à tout instant cette vitesse réelle et la vitesse prescrite; Il en déduit un écart plus ou moins grand et enfonce plus ou moins l'accélérateur en fonction de cet écart.

Si on appelle grandeur de sortie (ou sortie) la vitesse réelle et grandeur d'entrée (ou entrée) la vitesse imposée, le chauffeur et le tachymètre assurent une liaison entre l'entrée et la sortie, ils constituent donc une chaîne de retour.

On peut donner un schéma très simple pour illustrer cet exemple (fig. 1–2) :

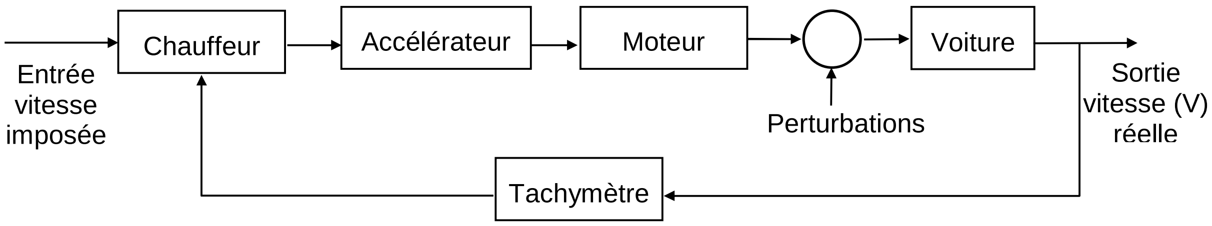


Fig. 1–2 : Exemple d'asservissement de vitesse d'un véhicule

1- 2.3 - Définitions - Constitutions élémentaires

On peut donc définir un asservissement comme un ***système bouclé ou à boucle fermée*** comportant une ***amplification de puissance***, une ***mesure*** et une ***comparaison***.

A partir de ces 3 notions, on peut définir un schéma fonctionnel valable pour tous les systèmes présentant ces caractéristiques (fig. 1–3) :

* Le triangle : représente la fonction amplification de puissance.
* Le cercle : représente la fonction comparaison (qui s'effectue en faisant une différence).
* Le rectangle : représente la fonction mesure et transformation.

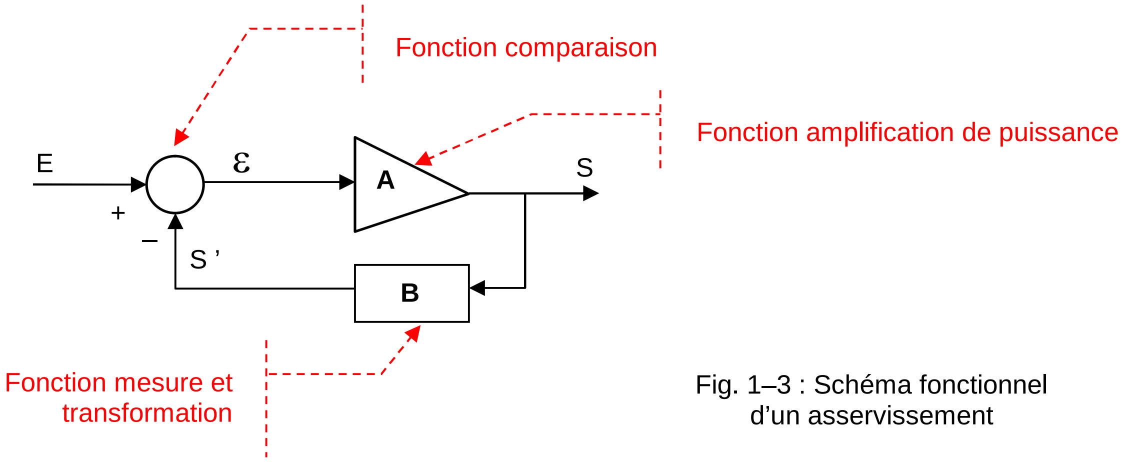


Fig. 1–3 : Schéma fonctionnel d'un asservissement

S *Grandeur* *de sortie*	La sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système. Il peut s'agir d'une tension, d'un déplacement, d'un angle de rotation, d'un niveau, d'une vitesse, etc...
E *Grandeur d'entrée* *ou référence* *ou consigne*	La consigne, est l'entrée d'action, c'est la grandeur réglante du système. Sa nature peut être différente de celle de (S). Seule importe sa valeur numérique. Si (E) et (S) sont de natures différentes, il suffit de définir une correspondance numérique entre ces deux grandeurs. Par exemple, on dira qu'un volt à l'entrée représente 100 tours/mn.
£ *erreur* *ou écart* *entrée - sortie*	On appelle écart ou erreur, la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables, on la réalisera donc en général entre la consigne et la mesure de la sortie. Elle est fournie par le comparateur et est proportionnelle à la différence (E–S'). Elle peut être de nature différente. Par exemple, E et S' étant des tensions, on pourra avoir ε sous forme de courant tel que ε = (E–S') / R (R est une résistance).
S' *Mesure* *de la sortie*	Elle est fournie par la chaîne de retour, généralement après transformation. S' doit obligatoirement avoir même nature physique que E. Ce qui est évident si on veut donner un sens à la différence (E - S'). Un des rôles de la chaîne de retour est donc d'assurer la conversion de la mesure de S dans la grandeur physique de E.

D'une manière générale, le système comprend (fig. 1–4) :

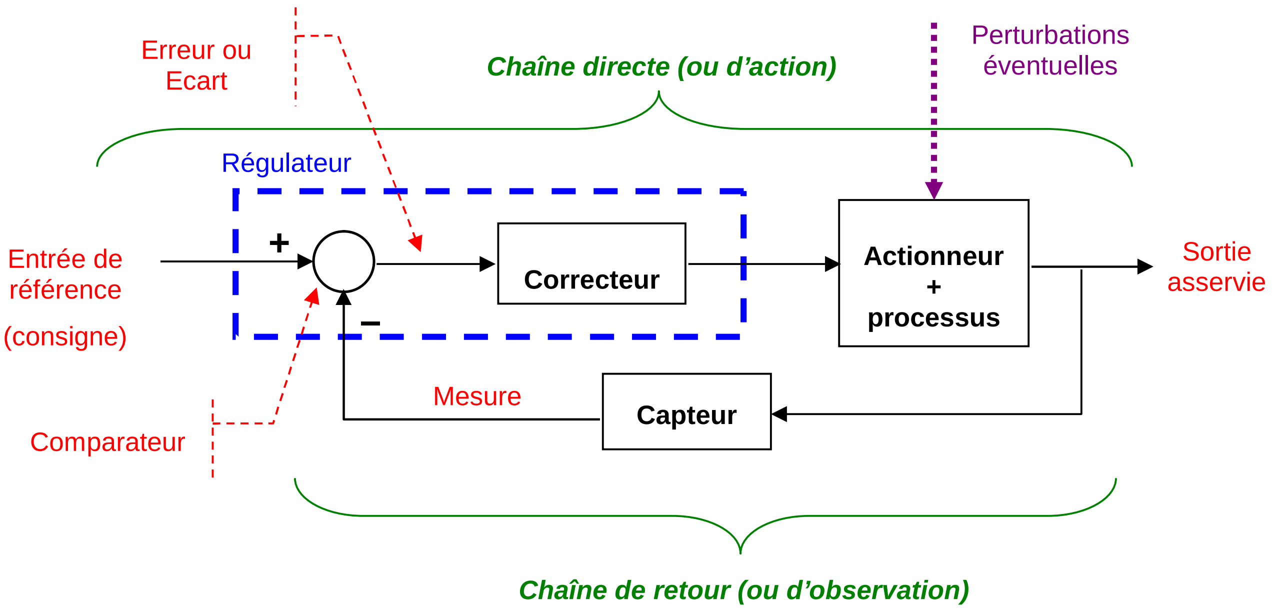


Fig. 1–4 : Organisation fonctionnelle d'un système asservi (schéma fonctionnel)

Chaîne directe ou d'action	* Englobe tous les organes de puissance (nécessitant un apport extérieur d'énergie) et qui exécute le travail. * Comporte généralement nombreux éléments, notamment des amplificateurs. * La nature de ces éléments n'est pas spécifiée sur le schéma, il peut s'agir aussi bien d'engins électriques, mécaniques, pneumatiques, etc…
Chaîne de retour ou de réaction	* Analyse et mesure le travail effectué et transmet au comparateur une grandeur physique proportionnelle à ce travail. * Elle comprend généralement un capteur qui donne une mesure de la grandeur S, qui est ensuite amplifiée et transformée avant d'être utilisée.
Comparateur ou détecteur d'écart	* Compare le travail effectué à celui qui était à faire et délivre un signal d'erreur proportionnel à la différence entre une grandeur de référence (E) et la grandeur physique issue de la chaîne de retour. * Ce signal d'erreur, après amplification, agira sur les organes de puissance dans un sens tel que l'erreur tendra à s'annuler.
Régulateur	Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.
Actionneur	C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité.
Capteur	Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.
Perturbation	On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations

1- 2.4 - Régulation et systèmes asservis

Nous avons fait la distinction dans l'introduction entre régulation et asservissement. Nous pouvons maintenant préciser de façon nette cette différence :

* ***Un régulateur*** : maintient l'erreur ε entre l'entrée E et la sortie S nulle, *quelles que soient les perturbations*, la grandeur d'entrée *E restant constante* ou variant par palier. E est alors appelée consigne ou référence.

* ***Un système asservi*** : maintient l'erreur ε nulle ou minimale *quelles que soient les variations de E*. Généralement, E est une fonction du temps qui peut être périodique, mais qui doit toujours rester continue et finie.

Il faut remarquer que les contraintes sont plus grandes pour un système asservi que pour un régulateur, puisque aucune contrainte de vitesse de variation n'est imposée pour E.

1- 2.5 - Propriétés des systèmes linéaires

Quand un système est linéaire, il jouit de propriétés importantes qui permettent une étude plus commode, en particulier le « *principe de superposition* linéaire » qui se traduit par les relations :

Entrée ***Sortie***

Additivité :

$$\begin{cases} e_1(t) & \Rightarrow \quad s_1(t) \\ e_2(t) & \Rightarrow \quad s_2(t) \\ e_1(t)+e_2(t) & \Rightarrow \quad s_1(t)+s_2(t) \end{cases}$$

où e(t) et s(t) sont les grandeurs d'entrée et de sortie

Homogénéité :

$$\begin{cases} e(t) & \Rightarrow \quad s(t) \\ \lambda.e(t) & \Rightarrow \quad \lambda.s(t) \end{cases}$$

Ce principe traduit le fait que les effets sont proportionnels aux causes et que les causes ajoutent leurs effets.

1- 3 - Régimes transitoires des asservissements

1- 3.1 - Définitions

Entrée Permanente	Entrée d'un système dont l'expression, en fonction du temps, est du type constante, linéaire, parabolique ou périodique
Régime Permanent	Il est atteint par un système quand, soumis à une entrée permanente, sa sortie est du même type que l'entrée c'est-à-dire constante, linéaire, parabolique ou périodique. Ce régime est aussi appelé régime forcé.
Régime Transitoire	Il correspond au fonctionnement du système quand il passe d'un type de régime permanent à un autre.

Pratiquement, un asservissement travaille toujours en régime transitoire ; en effet, même un régulateur dont l'entrée est constante doit constamment revenir au régime permanent, car des perturbations qui constituent des entrées secondaires l'en écartent. Il en est de même pour les asservissements.

L’aptitude du servomécanisme à revenir au régime permanent sera caractérisée par ses performances dynamiques.

1- 4 - Mise en équation d'un système - Résolution

1- 4.1 - Mise en équation

Nous avons dit précédemment que nous nous bornions à l’étude des systèmes linéaires. Donc, les équations rencontrées seront des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Considérons un système quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) (fig. 1–7).

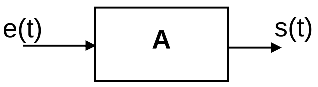


Fig. 1–7 : Représentation d’un système quelconque à 1 entrée – 1 sortie

Si on applique un signal à l’entrée, on recueillera, à la sortie, un signal qui sera liée au signal d’entrée par une équation différentielle de type :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \ldots\ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0\, s \quad = \quad b_k \frac{d^k e}{dt^k} + \ldots\ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0\, e$$

* Les coefficients ai et bj sont les paramètres du système et ils sont sensés être connus, ce qui est le cas dans la pratique pour la plupart des systèmes courants. Ils représentent diverses constantes de temps et divers coefficients de proportionnalité accessibles à la mesure.
* La difficulté de la mise en équation réside surtout au niveau de la connaissance du processus lui-même. En réalité, l'équation différentielle à laquelle on arrive n'est souvent qu'une approximation qui consiste à négliger des termes d'ordre plus élevé. Cette précision suffit dans la plupart des cas, bien qu'une étude plus poussée soit quelque fois nécessaire.
* Une fois l'équation du système établie, il faut exprimer la valeur de la sortie en fonction du temps pour connaître les régimes permanents et transitoires. Pour cela, il existe 2 méthodes (voir fig. 1–8) :

Méthode Classique

Consiste à résoudre l'équation différentielle décrivant ce système, c'est–à–dire trouver une réponse forcée et une réponse libre pour le système. Mais cette méthode ne permet pas toujours de trouver une solution et peut amener à une difficulté de résolution dès que l'ordre de l'équation différentielle dépasse 2.

Méthode Opérationnelle

Basée sur le calcul opérationnel ou, essentiellement, sur la transformée de Laplace qui mettra en relation, une fonction de la variable du temps f(t) avec une fonction de la variable complexe F(p) dépendant de la pulsation.

Notation : $\mathcal{L}[\,f(t)\,] = F(p)$ avec $p = a + j.b$ (nombre complexe)

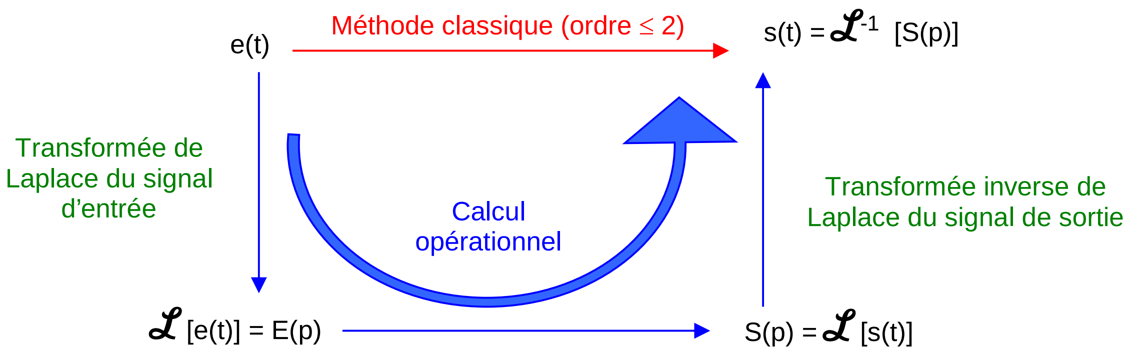


Fig. 1–8 : Détermination de la sortie du système par la méthode classique et par le calcul opérationnel

Pour un rappel sur l'utilisation de la transformée de Laplace, voir l'annexe A.

1- 4.2 - Utilisation de la transformée de Laplace

En appelant S(p) et E(p) les transformées de s(t) et de e(t), si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + ... + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0\, s \quad = \quad b_k \frac{d^k e}{dt^k} + ... + b_1 \frac{de}{dt} + b_0\, e$$

On aura :

$$a_n\, p^n\, S(p) + ... + a_1\, p\, S(p) + a_0\, S(p) \quad = \quad b_k\, p^k\, E(p) + ... + b_1\, p\, E(p) + b_0\, E(p)$$

d'où :

$$S(p) = \frac{b_k\, p^k + ... + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + ... + a_1\, p + a_0} \,.\, E(p)$$

Si l'on connaît l'image E(p) de e(t), il est facile, grâce aux tables de transformées de Laplace, de revenir à l'original de S(p).

D'une manière générale, cette notation n'est valable que si :

* le système est linéaire à coefficients constants,
* toutes les variables et leurs dérivées sont nulles pour $t < 0$ (le système part du repos absolu),
* le système est dissipatif, donc sa réponse tend, plus ou moins, vers un régime permanent indépendant des conditions initiales.

NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT

2- 1 - Introduction

Rappelons que :

* SI nous considérons un système quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) (fig. 2–1) :

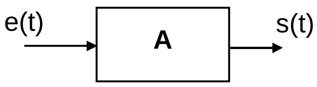


Fig. 2–1 : Représentation d'un système quelconque à 1 entrée – 1 sortie

* ALORS, Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera, à la sortie, un signal qui sera liée au signal d'entrée par une équation différentielle de type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + ... + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0\, s \quad = \quad b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} + ... + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0\, e(t)$$

En appelant S(p) et E(p) les transformées Laplace de s(t) et de e(t), si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle, on aura :

$$a_n\, p^n\, S(p) + ... + a_1\, p\, S(p) + a_0\, S(p) \quad = \quad b_k\, p^k\, E(p) + ... + b_1\, p\, E(p) + b_0\, E(p)$$

d'où :

$$S(p) = \frac{b_k\, p^k + ... + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + ... + a_1\, p + a_0} \,.\, E(p)$$

Par définition, la FONCTION DE TRANSFERT du système de la figure (2–1) est le quotient :

$$F(p) = \frac{b_k\, p^k + ... + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + ... + a_1\, p + a_0}$$

C'est aussi le rapport de la transformée de Laplace de la sortie à la transformée de Laplace de l'entrée quand toutes les conditions initiales sont nulles. Dans ce cas, on a :

$$S(p) = F(p)\, .\, E(p)$$

La Fonction de Transfert caractérise la dynamique du système. Elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques. Ainsi, dorénavant, un système sera décrit par sa fonction de transfert et non par l'équation différentielle qui le régit.

Notons enfin, que cette fonction de transfert est aussi appelée transmittance par analogie avec l'impédance dans les systèmes électriques.

2- 2 - Fonction de transfert d'un ensemble d'éléments

2- 2.1 - Eléments en série (ou cascade)

Soit n éléments de fonction de transfert $G_1(p)$ ....$G_n(p)$ mis en série (la sortie du premier est reliée à l'entrée du second, etc...) (fig. 2–2).

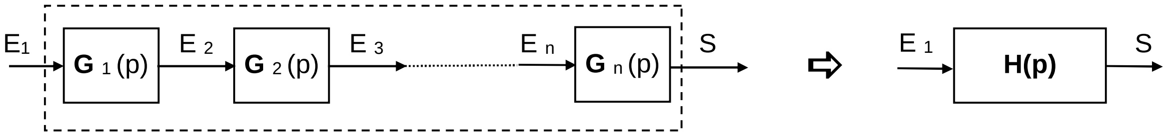


Fig. 2–2 : Connexion en série (ou cascade) de fonctions de transfert

La fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque élément :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)} = G_1(p) \,.\, G_2(p) \,.\, ... \,.\, G_n(p)$$

Ceci est évident puisque, par définition, on a :

$$G_1(p) = \frac{E_2(p)}{E_1(p)} \quad ,........., \quad G_n(p) = \frac{S(p)}{E_n(p)} \qquad \text{et que} \quad H(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)}$$

2- 2.2 - Eléments en parallèle

Soient n éléments de fonction de transfert $G_1(p)$ ....$G_n(p)$ mis en parallèle (fig. 2–3).

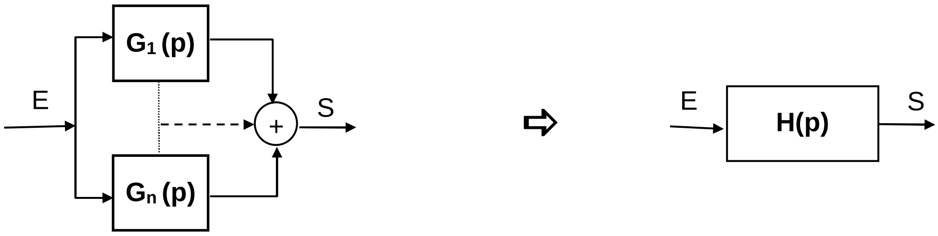


Fig. 2–3 : Connexion en parallèle de fonctions de transfert

La fonction de transfert équivalente H(p) a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p) + G_2(p) + ... + G_n(p)$$

On peut considérer que S(p) est le résultat de la superposition des n sorties des n éléments, c'est-à-dire que :

$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + ... + S_n(p)$ (en vertu de la linéarité du système, les effets s'ajoutent)

Chaque élément pris, indépendamment, donnera une sortie $S_i(p)$ quand on lui applique l'entrée E(p). Donc :

$$S(p) = \sum_i S_i(p) = G_1(p) \cdot E(p) + G_2(p) \cdot E(p) + \ldots\ldots + G_n(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = [\, G_1(p) + G_2(p) + \ldots\ldots + G_n(p)\,] \cdot E(p)$$

d'où : $$H(p) = G_1(p) + G_2(p) + \ldots\ldots + G_n(p)$$

2- 2.3 - Cas d'un système à n entrées indépendantes

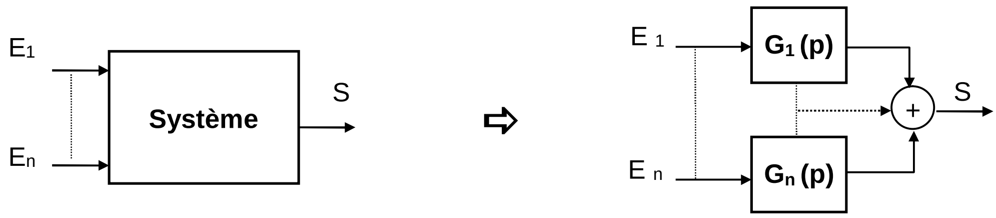


Fig. 2–4 : Système à n entrées indépendantes

La fonction de transfert n'a de sens qu'entre la sortie et une entrée. Le système de la fig. 2–4 pourra donc se décomposer en n constituants ayant la sortie en commun et pour entrée chacune des n entrées.

On calculera les fonctions de transfert $G_i(p)$ de chaque élément en supposant nulles les entrées autres que $E_i(p)$. *Ceci n'est possible que si les différentes équations du système ne sont pas couplées entre elles*.

Dans ce cas, on peut écrire :

$$S(p) = \sum_i G_i(p) \cdot E_i(p)$$

Il n'y a pas de fonction de transfert globale pour le système.

2- 3 - Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Soit un système asservi, le plus général, représenté par le schéma de la fig. 2–5.

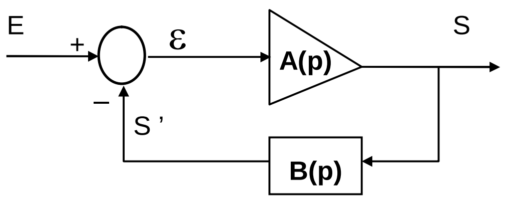


Fig. 2–5 : Schéma fonctionnel d'un système asservi (Boucle Fermée)

Soit A(p) et B(p), respectivement, les fonctions de transfert des chaînes directe et de retour.

Cherchons la fonction de transfert du système complet : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$

Nous avons les relations suivantes :

$S(p) = A(p) \, . \, \varepsilon(p)$, $S'(p) = B(p) \, . \, S(p)$, $\varepsilon(p) = E(p) - S'(p)$

$S(p) = A(p) \, . \, [\, E(p) - S'(p) \,] = A(p) \, . \, [\, E(p) - B(p) \, . \, S(p) \,]$

d'où $S(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p).B(p)} \, E(p)$

La fonction de transfert d'un système bouclé ou en Boucle Fermée (FTBF) est donc le rapport de la fonction de transfert de sa chaîne directe à 1 + A(p). B(p.:

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

2- 4 - Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (également appelée F.T.B.O.) est la fonction de transfert qui lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaîne de retour S ' (p) à l'erreur ε (p). Elle correspond à l'ouverture de la boucle (Fig. 2–6):

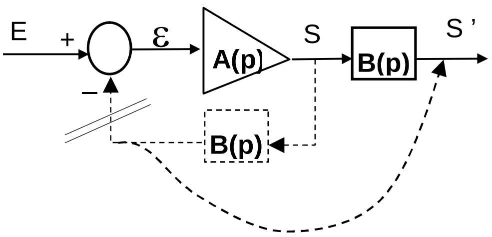


Fig. 2–6 : Schéma fonctionnel d'un système asservi en Boucle Ouverte

Dans ce cas, $\varepsilon = E$ puisque le comparateur ne reçoit plus qu'une seule information.

On a donc : $S'(p) = B(p) \, . \, S(p)$

$= B(p) \, . \, A(p) \, . \, \varepsilon(p)$

$= B(p) \, . \, A(p) \, . \, E(p)$

d'où : $\dfrac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = K(p) = A(p) \, . \, B(p)$

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (ou FTBO) d'un asservissement est le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe par la chaîne de retour.

La fonction de transfert en boucle ouverte a une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes ; de plus, elle est directement accessible à la mesure.

METHODES D'ETUDES DES ASSERVISSEMENTS

3- 1 - Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, qu'il était possible connaissant les équations différentielles, de déterminer la fonction de transfert d'un système. Mais il existe de nombreux cas où le système est un système industriel mal défini et dont, à fortiori on ne connaît pas les équations différentielles. Or, la connaissance de sa fonction de transfert est très importante pour déterminer ses performances et surtout sa stabilité. Il est donc important de mettre au point des méthodes capables de résoudre le problème.

En général, on applique cette procédure pour déterminer les fonctions de transfert des éléments qui entrent dans une chaîne. La connaissance expérimentale ou mathématique de toutes les fonctions de transfert des éléments permet alors de déterminer la fonction de transfert de l'ensemble.

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation d'entrées dites canoniques, faciles à mettre en œuvre dans toutes les techniques (électrique, mécanique, hydraulique). On en déduit alors les différentes constantes de la fonction de transfert.

Certains appareils dit analyseurs de fonction de transfert facilitent les mesures.

3- 2 - Entrées canoniques

3- 2.1 - Echelon unité

C'est une fonction nulle pour $t < 0$ et constante et égale à 1 pour $0 < t < \infty$ (fig. 3–1).

Cette fonction est appelée quelquefois u(t) (unité). Elle n'est pas définie pour $t = 0$ puisqu'il y a discontinuité à cet endroit.

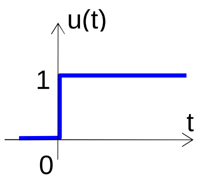


Fig. 3–1 : Fonction Echelon

Sa transformée de Laplace est :

$$\mathscr{L}\{ u(t) \} = \frac{1}{p}$$

3- 2.2 - Echelon de vitesse (rampe unité)

C'est une fonction nulle pour $t < 0$ et qui varie linéairement avec t pour $t \geq 0$ (fig. 3–2).

On l'exprime parfois sous la forme $r(t) = t \cdot u(t)$.

Cette fonction est appelée échelon de vitesse ou rampe, car sa vitesse de variation est constante et égale à 1.

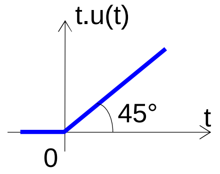


Fig. 3–2 : Fonction Rampe

On vérifie aisément que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathcal{L}\{ r(t) \} = \frac{1}{p^2}$$

En effet :

$\mathcal{L}\{ r(t) \} = \int_0^\infty e^{-pt}.t\,.\,dt\,,$ on pose : $u = t$ $\quad dv = e^{-pt}\,dt$

$du = dt$ $\quad v = \dfrac{e^{-pt}}{-p}$

Donc $\mathcal{L}\{ r(t) \} = \left[f(t)\,\dfrac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^\infty = 0 + \dfrac{1}{p}\left[-\dfrac{e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty = \dfrac{1}{p^2}$

3- 2.3 - Echelon d'accélération

Soit f(t) la fonction échelon d'accélération, définie par (voir fig. 3–3) : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2}u(t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

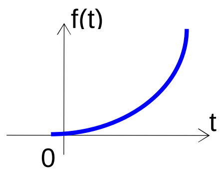


Fig. 3–3 : Fonction Accélération

$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_0^\infty e^{-pt}.\dfrac{t^2}{2}.\,dt\,,$ on pose : $u = \dfrac{t^2}{2}$ $\quad dv = e^{-pt}\,dt$

$du = t.dt$ $\quad v = \dfrac{e^{-pt}}{-p}$

Donc $\mathcal{L}\{ f(t) \} = \left[f(t)\,\dfrac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^\infty = 0 + \dfrac{1}{p}\,.\,\mathcal{L}\{ r(t) \} = \dfrac{1}{p^3}$

D'où :

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{1}{p^3}$$

3- 2.4 - Impulsion unitaire

Une impulsion est une fonction du temps de durée très courte mais dont l'amplitude est suffisamment grande pour que l'effet en soit sensible. L'impulsion est dite unitaire si la surface est égale à 1. On la note $\delta(t)$ (fig. 3–4).

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \le 0 \quad \text{et} \quad t \ge \tau \\ \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{1}{\tau} & \text{pour} \quad 0 < t < \tau \end{cases}$$

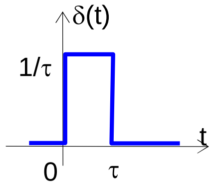


Fig. 3–4 : Fonction Impulsion $\delta(t)$

Toutes les impulsions, dont la durée égale numériquement l'inverse de l'amplitude, sont unitaires si cette durée tend vers zéro.

Pour t = 0, l'amplitude est théoriquement infinie.

$\delta(t)$ est définie par : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,.\,dt = 1$ (ce qui est équivalent à la surface unitaire)

Elle est appelée aussi ***impulsion de DIRAC***.

Calculons sa transformée de Laplace.

Pour cela, définissons la fonction f(t) (fig. 3–5) telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \quad \text{et} \quad t > \tau \\ 1 & \text{pour} \quad 0 < t < \tau \end{cases}$$

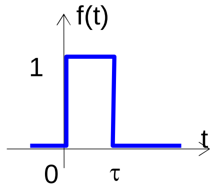


Fig. 3–5 : Fonction f(t)

f(t) peut être considérée comme la différence entre deux échelons unitaires dont l'un est décalé de τ :

$f(t) = u(t) - u(t-\tau)$ $\Rightarrow$ $\mathscr{L}\{ f(t) \} = \mathscr{L}\{ u(t) \} - \mathscr{L}\{ u(t-\tau) \} = \dfrac{1}{p}(1 - e^{-\tau p})$

Or : $\delta(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{f(t)}{\tau}$

Donc ; $\mathscr{L}\{ \delta(t) \} = \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{1}{\tau p}(1 - e^{-\tau p})$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau p})}{\frac{d}{d\tau}(\tau p)}$$

D'où :

$$\boxed{\mathscr{L}\{ \delta(t) \} = 1}$$

3- 2.5 - Entrée harmonique

Elle est définie par (Voir fig. 3–6):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 0 \\ A\sin(\omega t + \varphi) & \text{pour} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

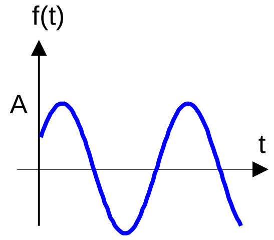


Fig. 3–6 : Signal harmonique

Sa transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{p.\sin\varphi + \omega.\cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

car $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ et $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$ (Voir annexe B)

3- 3 - Réponse d'un système asservi aux entrées canoniques

3- 3.1 - Réponse du système à une impulsion unitaire : réponse impulsionnelle

Soit un système de fonction de transfert H(p).

Appliquons sur son entrée une fonction, $e(t) = \delta(t)$, c'est-à-dire une impulsion unitaire.

Sa sortie sera donnée par : $S(p) = H(p) . E(p)$

Or : $E(p) = 1$, puisque $\mathcal{L}\{ \delta(t) \} = 1$.

Donc la transformée de Laplace S(p) de la sortie correspond exactement à la fonction de transfert H(p).

$$S(p) = H(p)$$

C'est aussi une autre définition de la fonction de transfert. On voit donc qu'une méthode pour connaître H(p) est de mesurer la réponse à une impulsion unité.

La Fig. 3–7 montre deux types de réponses impulsionnelles (selon la nature du système à exciter).

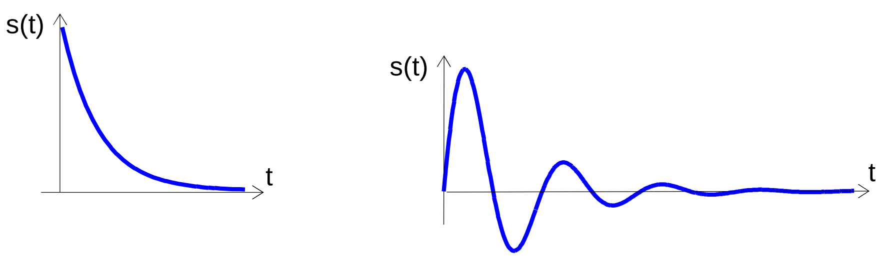


Fig. 3–7 : Exemples de réponses impulsionnelles

Du point de vue pratique, cette méthode présente quelques difficultés, car il est pratiquement impossible de réaliser physiquement une entrée $\delta(t)$. On se contente, en général, d'une impulsion de durée aussi courte que possible mais finie, d'où une certaine imprécision. Après avoir envoyé cette entrée $\delta(t)$ approchée, on doit enregistrer, en fonction du temps, la réponse s(t). Ce qui donne une courbe qu'il faut ensuite interpréter. Si on veut l'expression mathématique de la fonction de transfert, on approche cette courbe par des morceaux de courbes correspondant à des fonctions connues. Il faut alors prendre la transformée de ces fonctions du temps pour obtenir la fonction de transfert.

Cette opération, facile à décrire, est incontestablement délicate à réaliser. Elle est bien entendu entachée d'erreurs, mais aucune autre méthode n'est parfaite.

3- 3.2 - Réponse du système à un échelon unité : réponse indicielle

Pour pallier aux inconvénients de la réponse impulsionnelle, il est plus facile, pratiquement, d'utiliser comme entrée, un échelon unité.

L'entrée du système est donc : $e(t) = u(t)$, d'où $E(p) = \frac{1}{p}$

Sa sortie est alors :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p}$$ *C'est l'intégrale de la fonction de transfert.*

Pratiquement, l'essai est très rapide, il suffit de faire passer l'entrée de 0 à une valeur constante pendant un temps (donné) T puis de cette valeur à 0, et d'enregistrer la sortie en fonction du temps.

En principe, cette sortie doit être du même type que l'entrée si le système est linéaire, c'est-à-dire qu'au bout d'un certain temps correspondant à la durée du régime transitoire, la sortie doit rester constante.

S'il en est autrement, le système n'est pas linéaire (la réciproque n'est pas forcément vraie). Donc ce test permet de savoir si on est en présence d'un système linéaire ou non.

La Fig. 3–8 montre deux types de réponses indicielles (selon la nature du système à exciter).

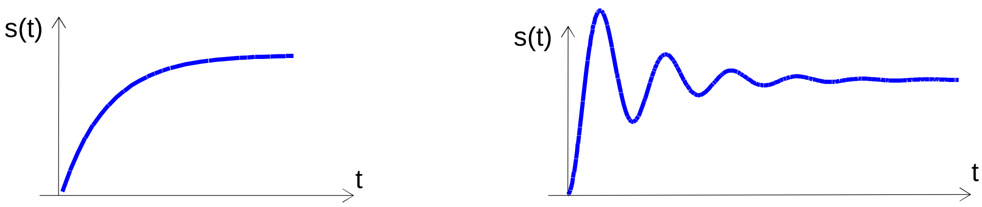


Fig. 3–8 : Exemples de réponses indicielles

L'exploitation des résultats pour déterminer la fonction de transfert est beaucoup plus laborieuse : Il faut décomposer l'échelon d'entrée en série de Fourier ainsi que la réponse de sortie en supposant que le phénomène a une période T.

Pour chaque fréquence élémentaire, on connaîtra les amplitudes de l'entrée et de la sortie, ainsi que leur déphasage.

On en déduit, à chaque fréquence, le ***" gain "*** et la ***" phase "*** du système. A ce stade, on se retrouve dans le cas de la réponse fréquentielle que nous allons étudier.

Cette méthode nécessite peu d'essais, mais beaucoup de calculs. La méthode suivante (réponse fréquentielle) nécessite beaucoup d'essais et peu de calculs.

3- 5 - Etude des systèmes du premier ordre

3- 5.1 - Définition

On appelle système du 1^{er} ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre telle que :

$$T.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

ou encore, un système dont la fonction de transfert est du type : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+Tp}$

Ces systèmes sont encore appelés ***systèmes à une seule constante de temps***, ou ***système à retard***.

Ils sont très nombreux en physique. En dehors des circuits RC ou RL en électricité, on peut considérer qu'un amplificateur est un système du 1^{er} ordre. En mécanique, tous les assemblages comportant un ressort et un amortisseur sont du 1^{er} ordre. Nous les passerons en revue à la fin de ce paragraphe.

3- 5.2 - Réponse indicielle

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

$S(p) = \frac{K}{1+Tp}E(p)$ ici $E_1(p) = 1 / p$ $S_1(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale $s_1(t)$ de $S_1(p)$ est :

$s_1(t) = K(1 - e^{-t/T})$ $\lim_{t \to \infty} s_1(t) = K$

On constate donc que la sortie $s_1(t)$ (Fig. 3–13) atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante T.

Cette constante T, appelée ***constante de temps***, caractérise donc la ***rapidité du système*** à atteindre son régime permanent.

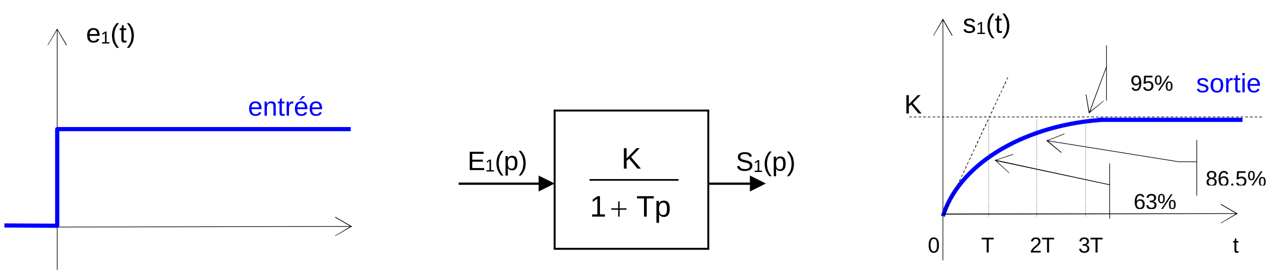


Fig. 3–13 : Réponse indicielle d'un système du 1^{er} Ordre

La pente de la tangente à l'origine est K/T, plus le système a une constante de temps faible, plus il "répond" vite.

Au bout d'un temps t = T, la sortie est $s_1(T) = K(1 - 1/e)$, ce qui représente environ 63% de K.

Temps de réponse : Nous avons vu que le temps de réponse était le temps au bout duquel la sortie avait atteint son régime permanent à 5% près. Dans le cas du système du premier ordre, ce temps correspond à ***3T*** environ.

3- 5.3 - Réponse à une rampe (échelon de vitesse)

Dans ce cas, nous avons : $e_2(t) = t.u(t)$ où $u(t)$: échelon unitaire

$E_2(p) = 1/p^2$

Donc $S_2(p) = \dfrac{K}{p^2(1+Tp)} = \dfrac{S_1(p)}{p}$ avec $S_1(p)$: transformée de la réponse indicielle d'un 1er Ordre.

d'où : $s_2(t) = \int_0^t s_1(t)\,dt = \int_0^t K\,(1 - e^{-t/T})\,dt$

$s_2(t) = K\,\{ t - T\,(1 - e^{-t/T})\}$

La figure 3–14 donne la réponse à une rampe d'un système du 1er Ordre.

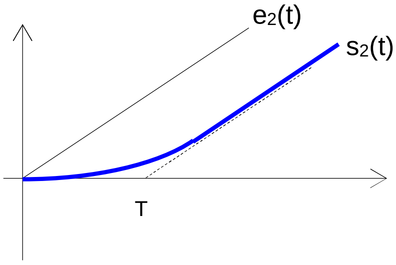


Fig. 3–14 : Réponse d'un système du 1er Ordre à une rampe (tracée pour K=1)

En régime permanent : $t \rightarrow \infty$, alors $s_2(t) = K\,(t - T)$

On met, ainsi, en évidence le retard T qui constitue une erreur permanente.

Dans le cas où K=1, l'erreur T entre l'entrée et la sortie est constante en fonction du temps. C'est l'erreur de "traînage".

Donc, un système du 1er ordre suit les variations linéaires de l'entrée avec un certain retard, d'où leur nom de système à retard.

3- 5.4 - Réponse à une impulsion unité

Dans ce cas, nous avons : $e_3(t) = \delta(t)$ où $\delta(t)$: impulsion unitaire

$E_3(p) = 1$

Donc $\quad S_3(p) = \dfrac{K}{1+Tp} = \dfrac{K}{T}\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{T}}$, $\qquad$ d'où : $\quad s_3(t) = \dfrac{K}{T} e^{-t/T}$

On met ainsi en évidence la constante de temps sur le graphique (Fig. 3–15).

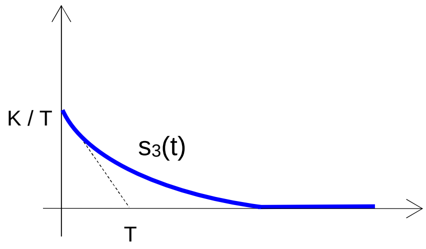
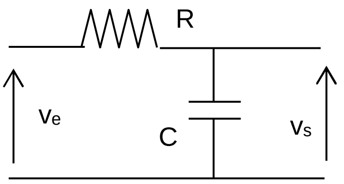


Fig. 3–15 : Réponse impulsionnnelle d'un système du 1er Ordre

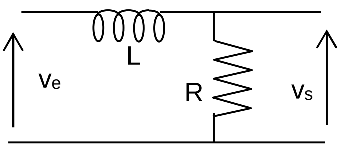
3- 5.6 - Exemples de systèmes du 1er ordre

3- 5.6.a - Filtre "passe-bas"

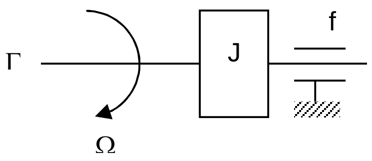
C'est un montage qui laisse passer les fréquences basses et atténue fortement les fréquences élevées.



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+RCp} \qquad T=RC$$



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+\frac{L}{R}p} \qquad T=L/R$$

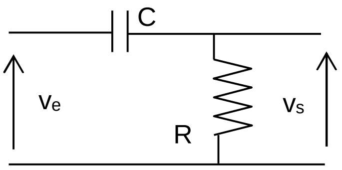


$$\Gamma = J\,\frac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega \qquad \frac{\Omega}{\Gamma} = \frac{\frac{1}{f}}{1+\frac{J}{f}p} \qquad T=J/f$$

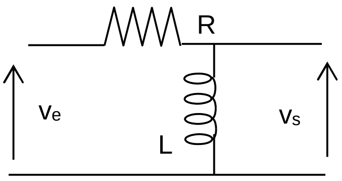
f : coefficient de frottement visqueux

3- 5.6.b - Filtre "passe-haut"

Ces dispositifs atténuent les fréquences basses et laissent passer intégralement les fréquences élevées. Ils jouent donc le rôle inverse des filtres passe–bas.



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{RCp}{1+RCp} \qquad T=RC$$



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{L}{R}p}{1+\frac{L}{R}p} \qquad T=L/R$$

Ces fonctions de transfert sont du type : $G(p) = \dfrac{Tp}{1+Tp}$

3- 6 - Etude des systèmes du second ordre

3- 6.1 - Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations linéaires différentielles à coefficients constants du 2ème ordre, du type :

$$B_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + B_1 \frac{ds(t)}{dt} + B_0 s(t) = \begin{cases} A_0 e(t) \\ A_0 \int_0^t e(t)dt \\ A_0 \frac{de(t)}{dt} \end{cases}$$

Leurs fonctions de transfert seront du type : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_0}{B_2p^2 + B_1p + B_0} . \begin{cases} 1 \\ 1/p \\ p \end{cases}$

Le comportement du système sera extrêmement différent suivant que le degré qui figure au dénominateur aura des racines réelles ou imaginaires.

On introduit les paramètres suivants :

- Gain statique : $K = \frac{A_0}{B_0}$ C'est le rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$ en régime statique ($\frac{ds(t)}{dt}$ =0 ; $\frac{d^2s(t)}{dt^2}$ =0)
- Pulsation propre non amortie : $\omega_n = \sqrt{B_0/B_2}$ rad/s
- Facteur d'amortissement (sans dimension) : $\xi = \frac{B_1}{2\sqrt{B_0B_1}}$ $\xi = 1$ (valeur critique)
- Constante de temps : $T = \frac{1}{\xi\,\omega_n}$

La fonction de transfert s'écrit en fonction des paramètres ainsi définis :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} . \begin{cases} 1 \\ 1/p \\ p \end{cases}$$

Prenons le cas de H(p) = $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}$ *et étudions les différentes réponses.*

Le comportement dynamique d'un tel système dépend de la valeur des deux constantes µn et surtout de ¶.

- Si **¶ > 1** : Le polynôme est décomposable, le dénominateur a 2 racines réelles ($-p_1$ et $-p_2$) :

$$-p_1 = -\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$-p_2 = -\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

- Si **0 < ¶ < 1** : Le polynôme n'est pas décomposable, le dénominateur a 2 racines complexes conjuguées ($-\bar{p}_0$ et $-\bar{p}_0^*$) (Fig. 3–22) :

$$-\bar{p}_0 = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$$

$$-\bar{p}_0^* = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$$

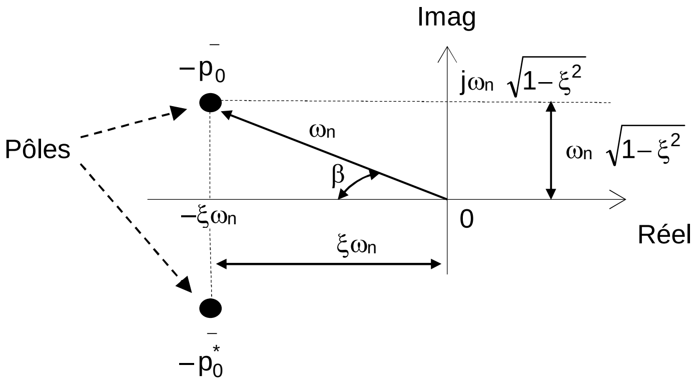


Fig. 3–22 : Relations entre les paramètres d'un système du 2nd ordre dans le plan Complexe

Remarque : $\xi = \cos\beta = \dfrac{\xi\omega_n}{\omega_n}$: coefficient d'amortissement

- Si **¶ = 1** : Les 2 racines sont égales ($-p_{1,2}$):

$$-p_{1,2} = -\omega_n \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = \omega_n = 1/\tau$$

3- 6.2 - Réponse à un échelon unité

$E(p) = 1 / p$ $\qquad$ $S(p) = \dfrac{K}{p}\,\dfrac{1}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_n}p + \dfrac{1}{\omega_n^2}p^2}$

- Si **0 < ¶ < 1** : Les 2 racines imaginaires conduisent à une solution oscillatoire amortie.
  Le régime permanent est ici $s(t) = K$ $\qquad$ $(\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} S(p) = K)$

La solution est :

$$S(p) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2\xi\omega_n}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}\right)$$

$$= K\left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi\omega_n}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega_n}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}\right)$$

Or $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+\xi\omega_n}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}\right) = e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t \qquad (t \geq 0)$

et $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}\right) = e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t \qquad (t \geq 0)$

$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\}$

$$s(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\underbrace{\left\{\sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t + \xi\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t\right\}}_{\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)=\sin(a+b)}\right) \qquad (t \geq 0)$$

En posant :

- ❖ $\sin a = \sqrt{1-\xi^2}$ (<1) et $\cos a = \xi$ (<1)

  ➔ $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ ➔ $a = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

- ❖ $b = \omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t$

On aura : $$s(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left\{\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}_{\varphi}\right\}\right) \qquad (t \geq 0)$$

- Si ¶ = ***1*** : Les 2 racines (pôles) sont égales : système amorti critique.

$$S(p) = \frac{K}{p}\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{p}\frac{\omega_n^2}{(p+\omega_n)^2}$$

On aura $s(t) = K\left(1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right) \qquad (t \geq 0)$

- Si ¶ ***> 1*** : Les 2 racines (pôles) sont négatives et inégales : système apériodique.

$$S(p) = \frac{K}{p}\frac{\omega_n^2}{\left(p+\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)\left(p+\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}$$

$$s(t) = K\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)}e^{-\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}-\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}\right) \qquad (t \geq 0)$$

$$s(t) = K\left(1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{-a_1 t}}{a_1}-\frac{e^{-a_2 t}}{a_2}\right]\right) \qquad (t \geq 0) \qquad \text{avec} \begin{cases} a_1 = \omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right) \\ a_2 = \omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right) \end{cases}$$

La Figure 3–23 donne les réponses indicielles (2D et 3D) d'un système du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ.

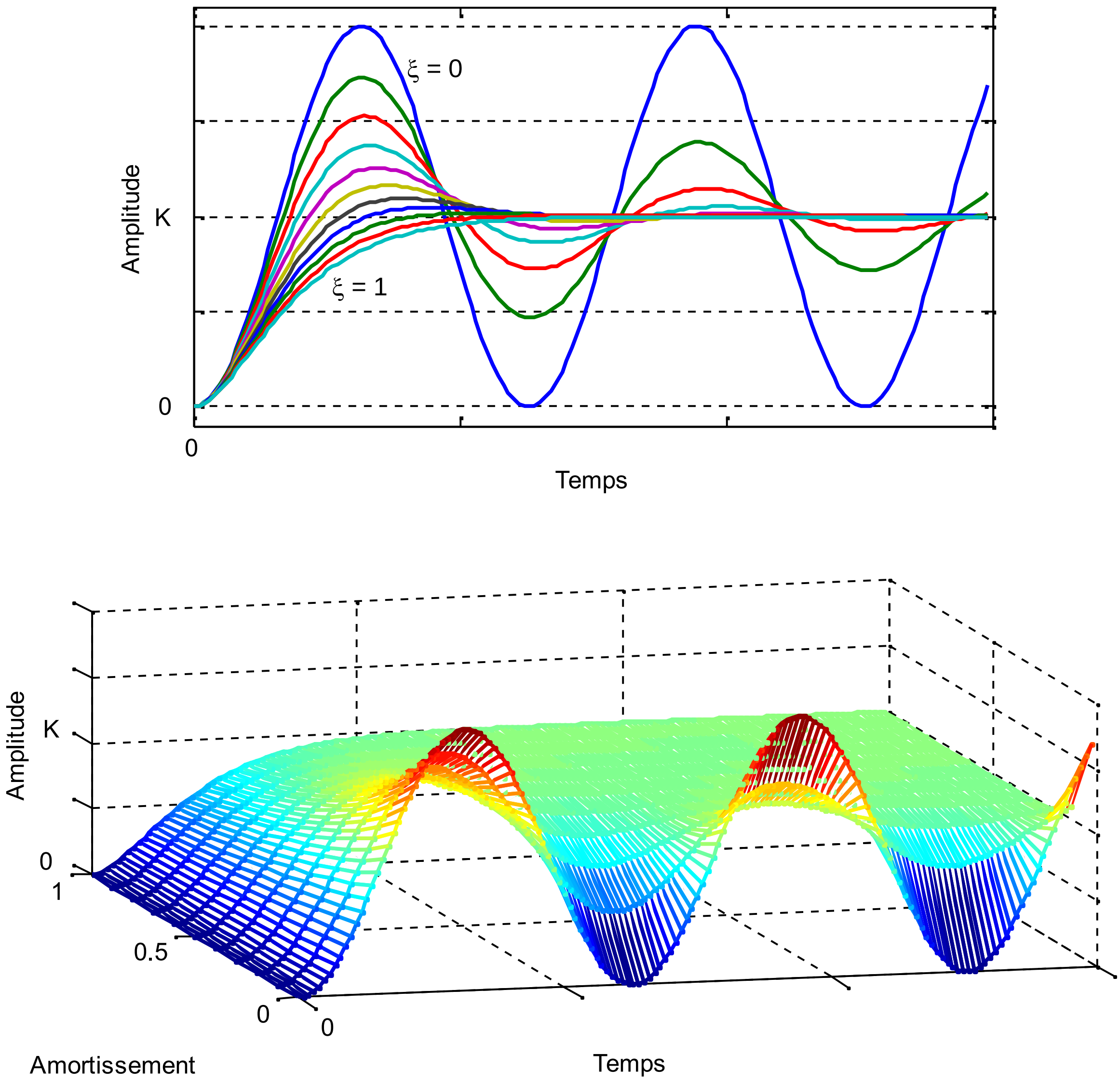


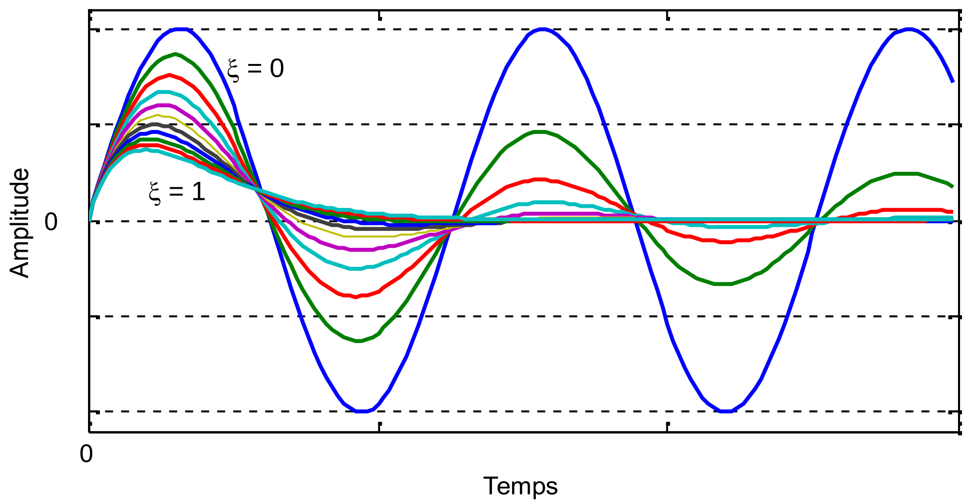
Fig. 3–23 : Réponses indicielles d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

3- 6.3 - Réponse à une impulsion unité

$$E(p) = 1 \qquad\qquad S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

- Si ***0 < ¶ < 1*** : $s(t) = K\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right)$ $\quad t \geq 0$
- Si ***¶ = 1*** : $s(t) = K\left(\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}\right)$ $\quad t \geq 0$
- Si ***¶ > 1*** : $s(t) = K\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t} - e^{-\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}\right)$ $\quad t \geq 0$

La Figure 3–24 donne les réponses impulsionnelles (2D et 3D) d'un système du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ.



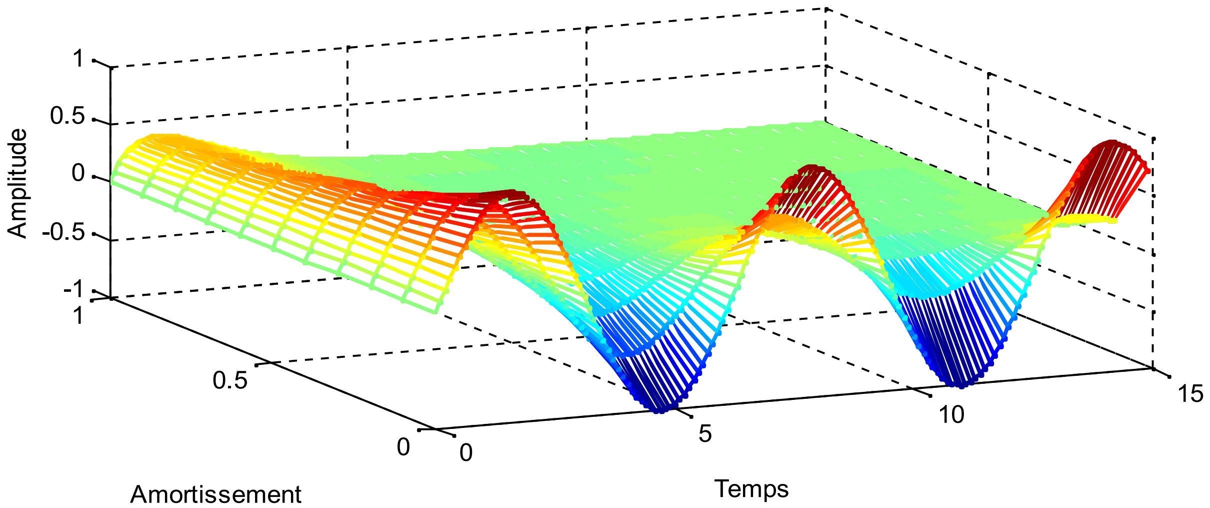
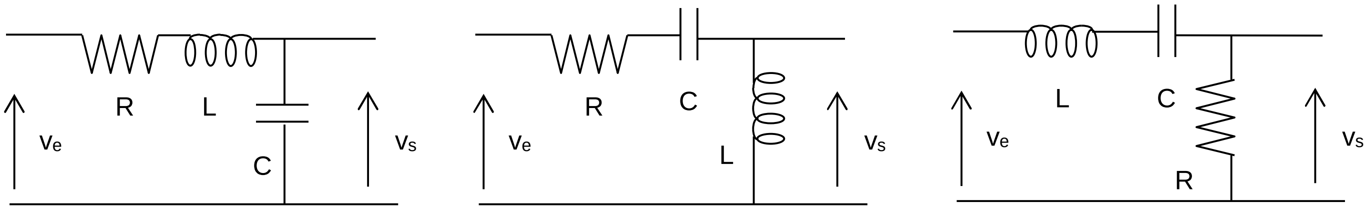


Fig. 3–24 : Réponses impulsionnelles d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

3- 6.4.d - Exemples de systèmes du 2ème ordre



$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2} \qquad \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{RCp}{1 + RCp + LCp^2} \qquad \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{LCp^2}{1 + RCp + LCp^2}$$

ici : $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$